Тема 10. Алгоритмы комбинаторной оптимизации

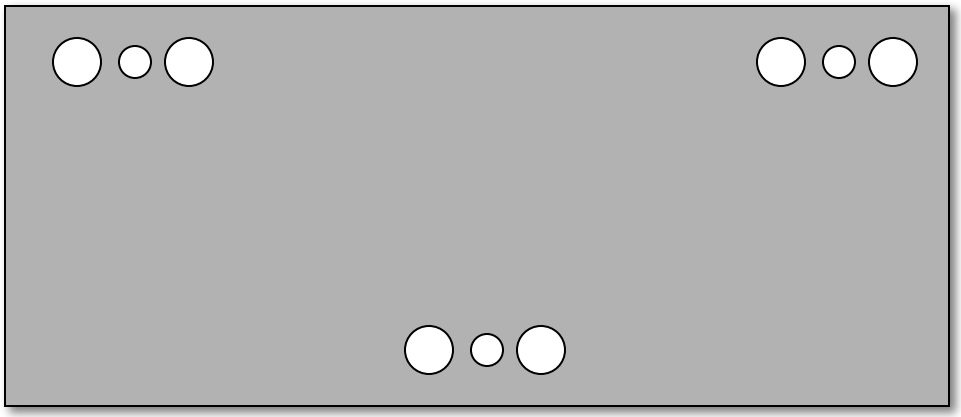
Задачи комбинаторной оптимизации

Пример 1. Производство краски

В производстве краски при смене цвета требуется очистка оборудования. Время очистки зависит от того, с какой краски на какую осуществляется переход. Требуется выбрать последовательность смены цвета, которая давала бы минимальную длительность производственного цикла.

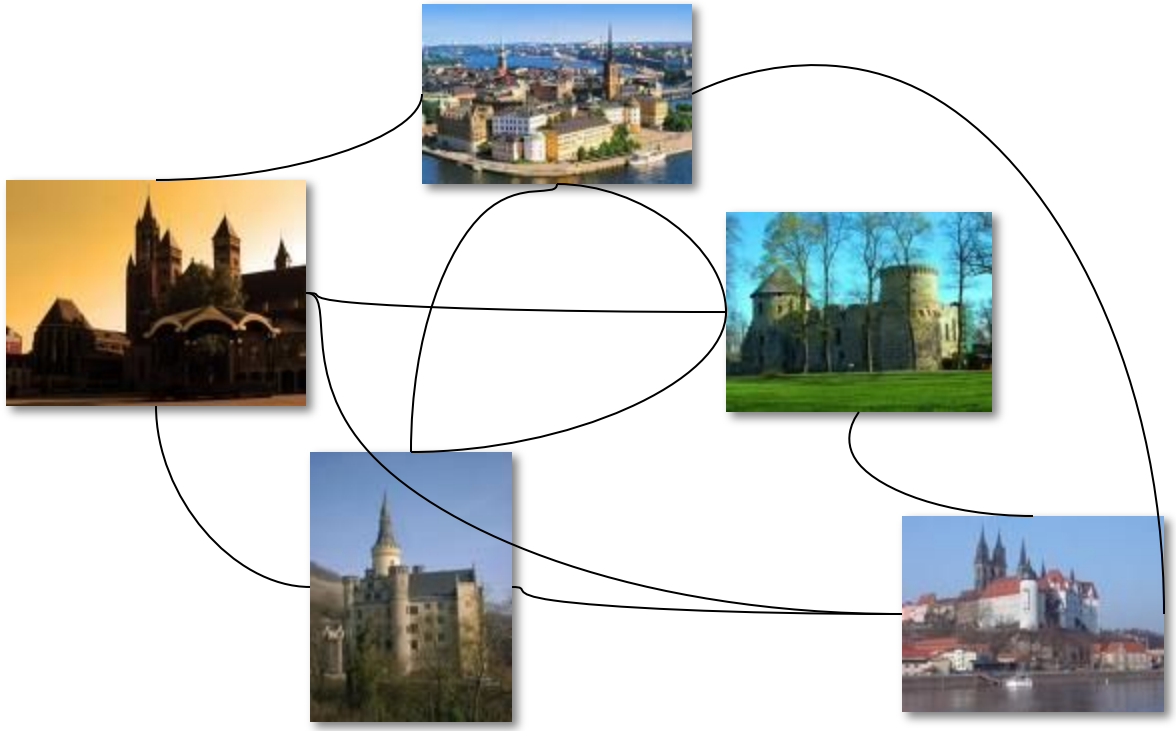
Задачи комбинаторной оптимизации

Пример 2. Координатно-пробивной пресс со сменным инструментом



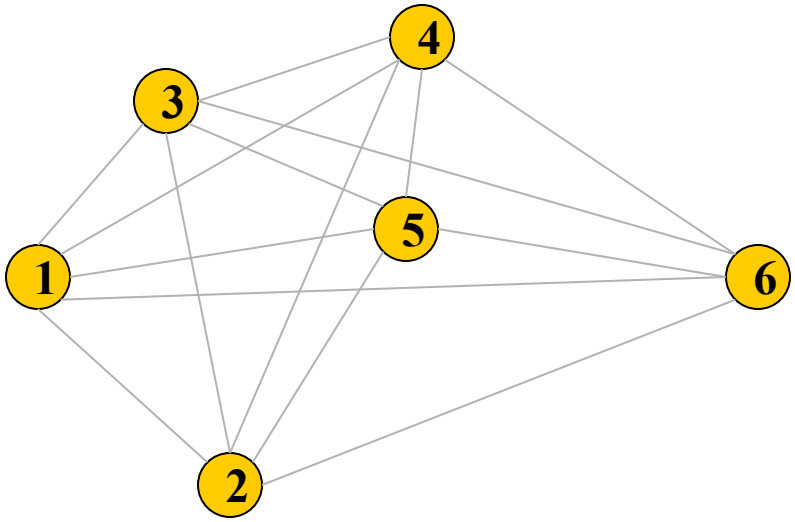
При изготовлении деталей на координатно-пробивном прессе время производственного цикла включает время перемещения заготовки и время смены инструмента. Требуется выбрать последовательность пробивки отверстий, которая давала бы минимальную длительность производственного цикла.

Задача коммивояжёра



Требуется объехать все города, побывав в каждом только один раз, и затратив минимальное время на весь путь.

Задача коммивояжёра. Структура данных



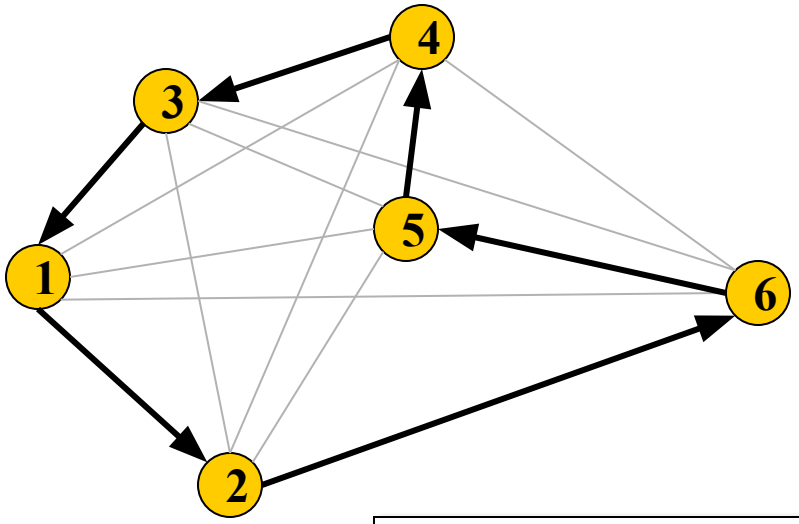
C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		6	4	8	7	14
2	6		7	11	7	10
3	4	7		4	3	10
4	8	11	4		5	11
5	7	7	3	5		7
6	14	10	10	11	7	

C_{ij} = расстояние от i до j

$C_{ij} = C_{ji}$	Симметричная задача
$C_{ij} \neq C_{ji}$	Несимметричная задача

Задача коммивояжёра. Точное решение

Алгоритм "перебора грубой силой" (brute-force ennumeration)



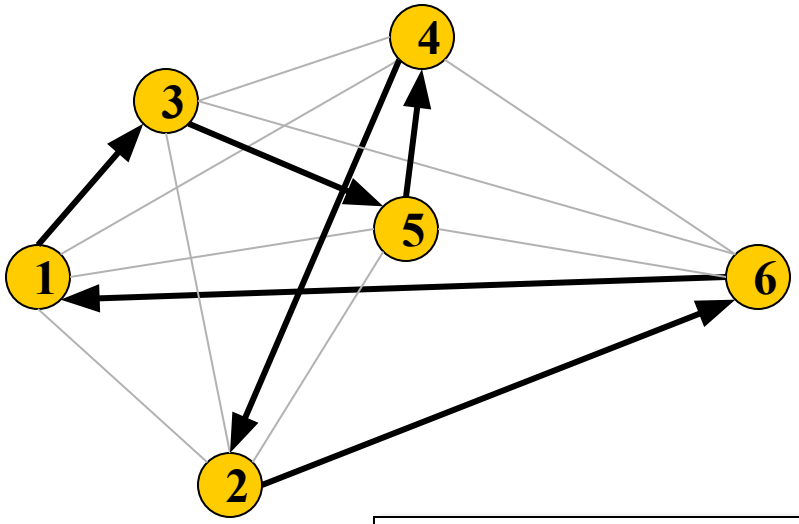
C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		6	4	8	7	14
2	6		7	11	7	10
3	4	7		4	3	10
4	8	11	4		5	11
5	7	7	3	5		7
6	14	10	10	11	7	

Решение 1-2-6-5-4-3-1, расстояние 36

Число вариантов в несимметричной задаче **(n-1)!**									
5!	10!	15!	20!	25!	30!	35!	40!	45!	50!
$\sim 10^{2}$	$\sim 10^{6}$	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^{18}$	$\sim 10^{25}$	$\sim 10^{32}$	$\sim 10^{40}$	$\sim 10^{47}$	$\sim 10^{56}$	$\sim 10^{64}$

Задача коммивояжёра. Быстрое решение

Алгоритм "ближайшего соседа"



C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		6	4	8	7	14
2	6		7	11	7	10
3	4	7		4	3	10
4	8	11	4		5	11
5	7	7	3	5		7
6	14	10	10	11	7	

Решение 1-3-5-4-2-6-1, расстояние 47

На каждом шаге алгоритма из всех возможных путей выбирается самый короткий. Как правило, на последних шагах приходится расплачиваться за "жадность" в начале. При определенном наборе данных алгоритм "ближайшего соседа" может даже выбрать наихудший путь.

Задача коммивояжёра. Метод ветвей и границ

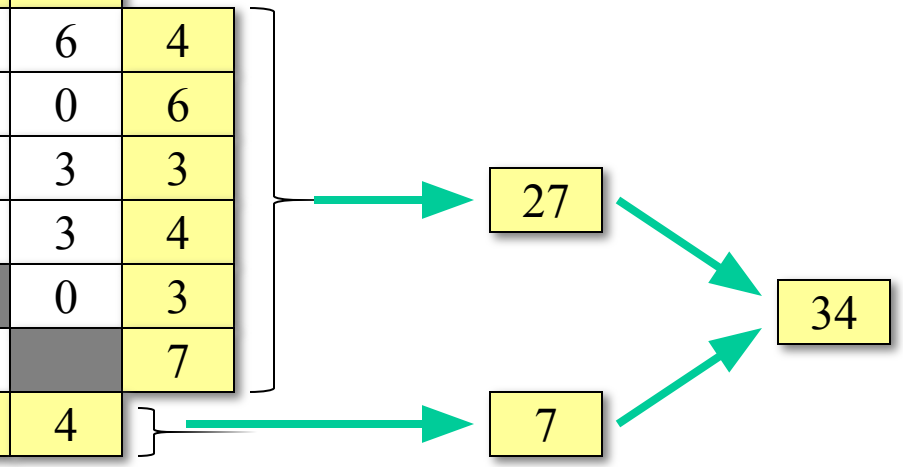
C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		6	4	8	7	14
2	6		7	11	7	10
3	4	7		4	3	10
4	8	11	4		5	11
5	7	7	3	5		7
6	14	10	10	11	7	

C_{ij}	1	2	3	4	5	6	
1		2	0	4	3	10	4
2	0		1	5	1	4	6
3	1	4		1	0	7	3
4	4	7	0		1	7	4
5	4	4	0	2		4	3
6	7	3	3	4	0		7

Приведение по строкам

Приведение по столбцам

C_{ij}	1	2	3	4	5	6	
1		0	0	3	3	6	4
2	0		1	4	1	0	6
3	1	2		0	0	3	3
4	4	5	0		1	3	4
5	4	2	0	1		0	3
6	7	1	3	3	0		7
	0	2	0	1	0	4	



Задача коммивояжёра. Метод ветвей и границ

Оценка нулей

C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		0	0	3	3	6
2	0		1	4	1	0
3	1	2		0	0	3
4	4	5	0		1	3
5	4	2	0	1		0
6	7	1	3	3	0	

Отказ от пути 1-2 увеличит расстояние на 1 (1+0)

C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		0^1	0	3	3	6
2	0^1		1	4	1	0
3	1	2		0^1	0	3
4	4	5	0^1		1	3
5	4	2	0	1		0
6	7	1	3	3	0^1	

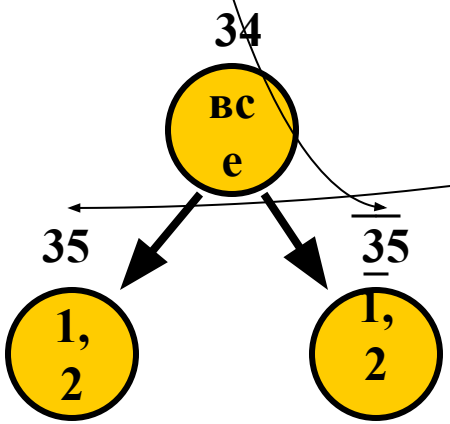
Выбирается первая из максимальных оценок

Все множество путей делится на два класса - включающие путь 1-2 и остальные

Задача коммивояжёра. Метод ветвей и границ

C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		0^1	0	3	3	6
2	0^1		1	4	1	0
3	1	2		0^1	0	3
4	4	5	0^1		1	3
5	4	2	0	1		0
6	7	1	3	3	0^1	

C_{ij}	1	3	4	5	6
2	0^1	1	4	1	0
3	0		0	0	3
4	3	0		1	3
5	3	0	1		0
6	6	3	3	0	
	1				

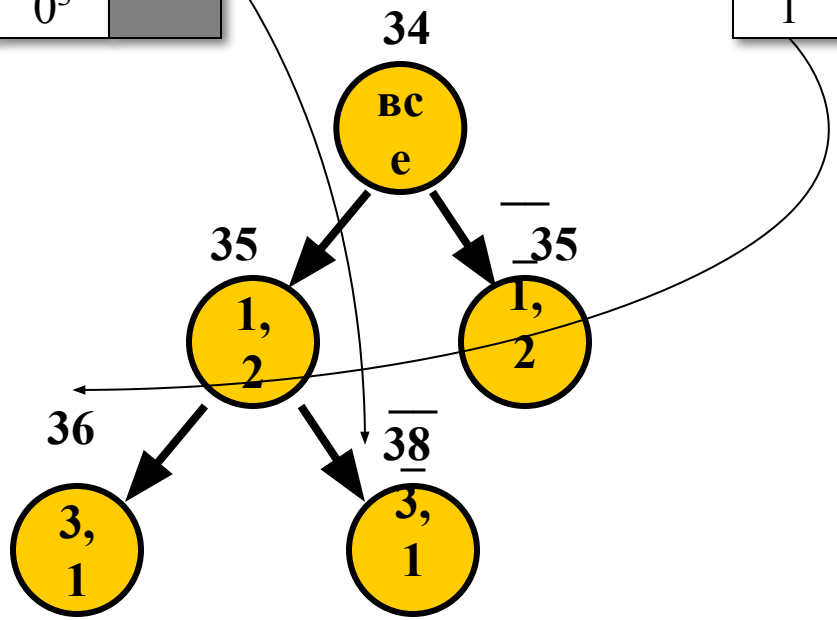


Ветвление

Задача коммивояжёра. Метод ветвей и границ

C_{ij}	1	3	4	5	6
2		1	4	1	0^1
3	0^3		0^1	0	3
4	3	0^1		1	3
5	3	0	1		0
6	6	3	3	0^3	

C_{ij}	3	4	5	6
2	1	3	1	0
4	0		1	3
5	0	0		0
6	3	2	0	
		1		

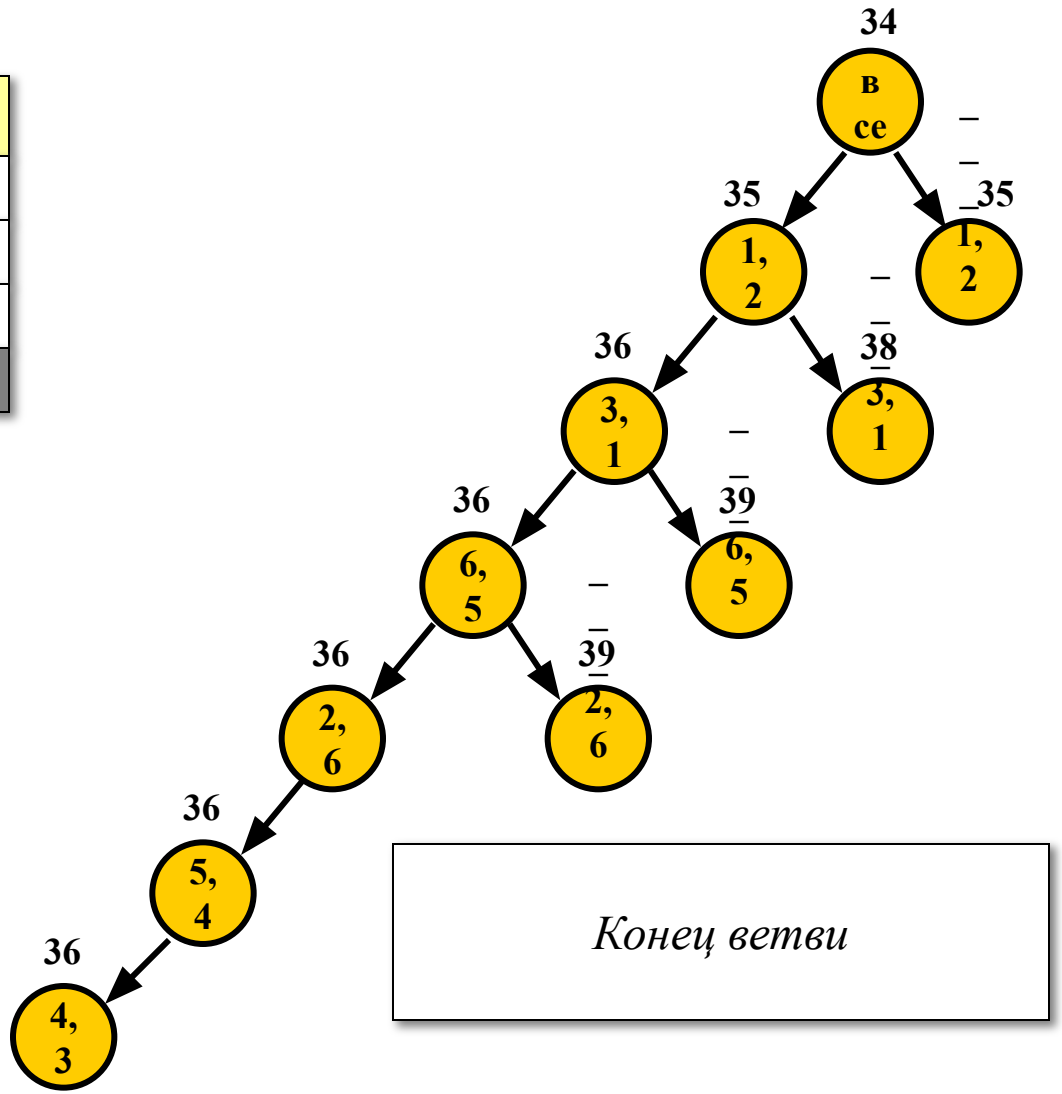


Задача коммивояжёра. Метод ветвей и границ

C_{ij}	3	4	5	6
2		3	1	0^1
4	0^1		1	3
5	0	0^2		0
6	3	2	0^3	

C_{ij}	3	4	6
2		3	0^6
4	0^3		3
5	0	0^3	

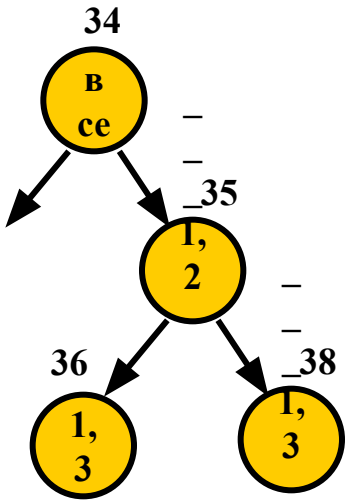
C_{ij}	3	4
4	0	
5		0



Задача коммивояжёра. Метод ветвей и границ

C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		0^1	0^3	3	3	6
2	0^1		1	4	1	0
3	1	2		0^1	0	3
4	4	5	0^1		1	3
5	4	2	0	1		0
6	7	1	3	3	0^1	

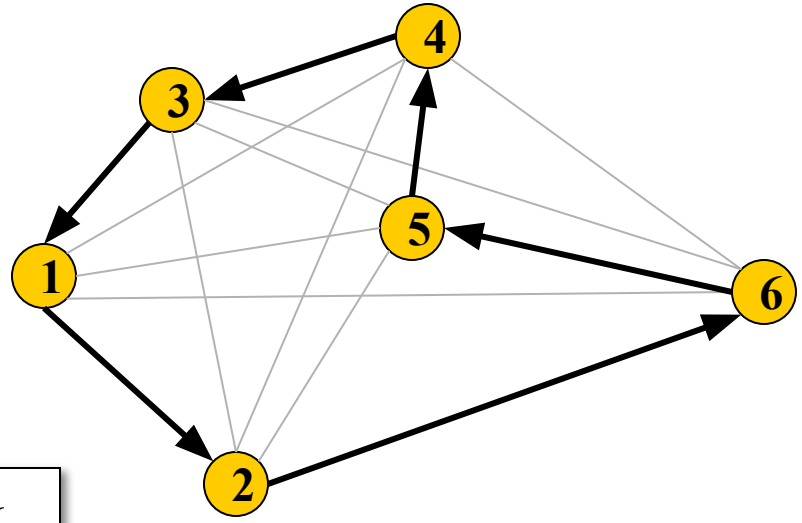
C_{ij}	1	2	4	5	6
2	0		4	1	0
3	1	1	0	0	3
4	4	4		1	3
5	4	1	1		0
6	7	0	3	0	
		1			



Проверка альтернативных вариантов

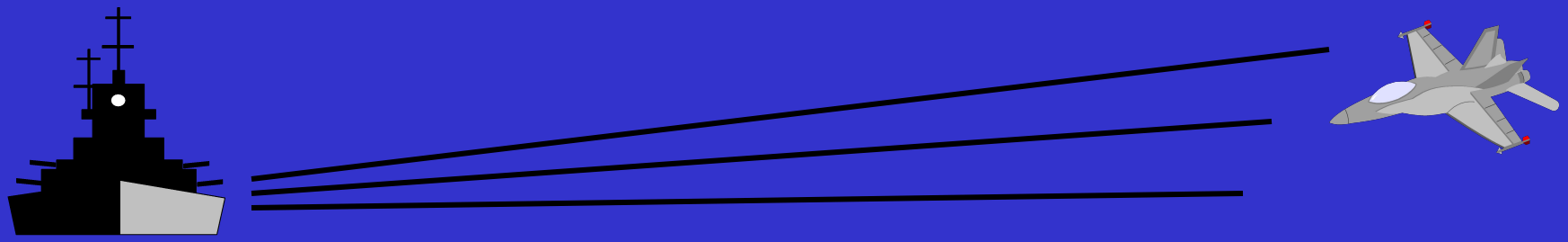
Задача коммивояжёра. Метод ветвей и границ

C_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		6	4	8	7	14
2	6		7	11	7	10
3	4	7		4	3	10
4	8	11	4		5	11
5	7	7	3	5		7
6	14	10	10	11	7	



Решение 1-2-6-5-4-3-1, расстояние 36

Динамическое программирование



Метод динамического программирования состоит в том, что оптимальное управление строится постепенно. На каждом шаге оптимизируется управление только этого шага. Вместе с тем на каждом шаге управление выбирается с учетом последствий, так как управление, оптимизирующее целевую функцию только для данного шага, может привести к неоптимальному эффекту всего процесса. Управление на каждом шаге должно быть оптимальным с точки зрения процесса в целом.

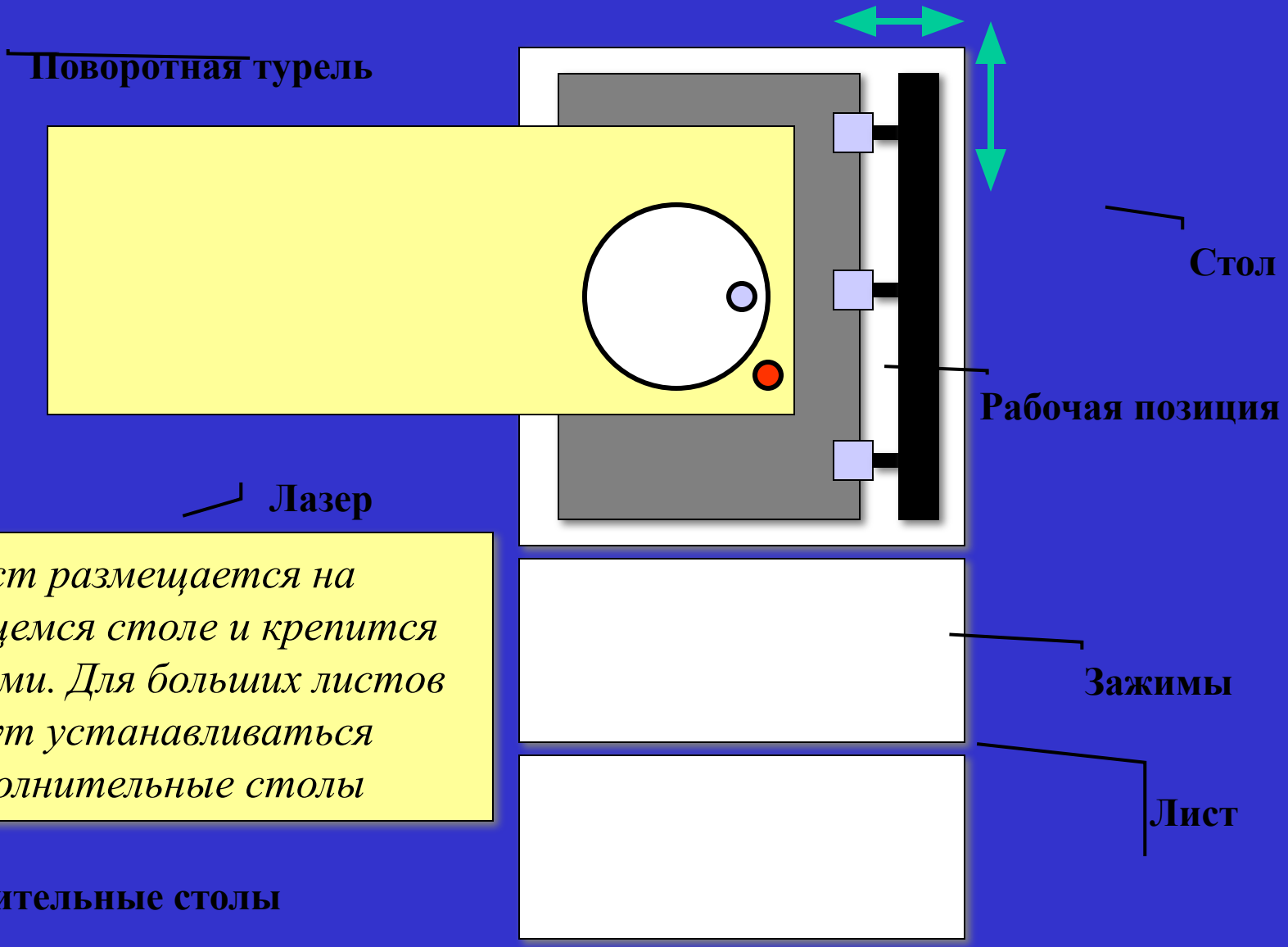
Каково бы ни было начальное состояние системы перед очередным шагом, управление на этом этапе выбирается так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.

Ричард Эрнст Беллман (1920 - 1984)

Пример задачи динамического программирования

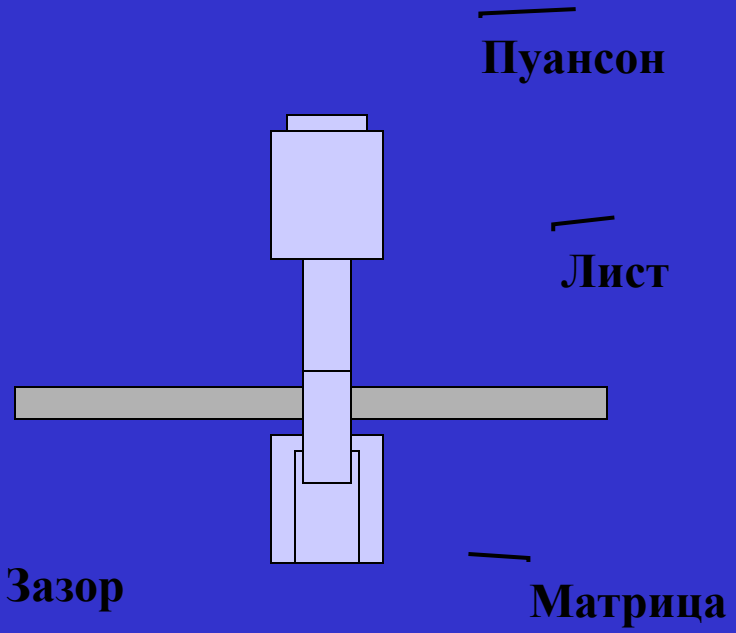
Оптимизация последовательности работ штамповочной машины Strippit-1250

Схема работы машины



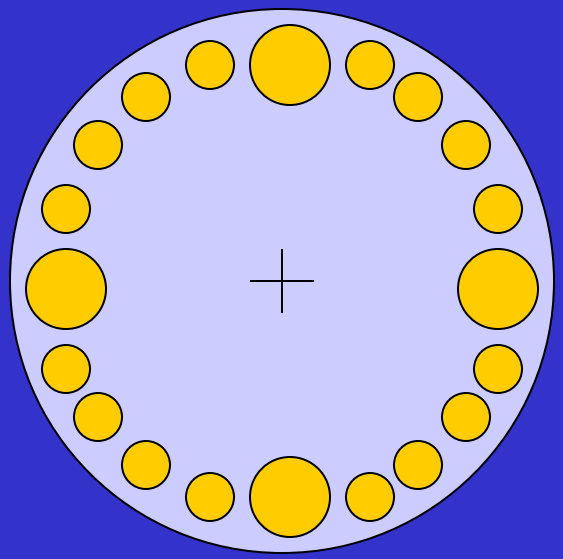
Лист размещается на движущемся столе и крепится зажимами. Для больших листов могут устанавливаться дополнительные столы

Пробивной инструмент



Для пробивки отверстий используется пара инструментов - пуансон и матрица. Для одного пуансона могут применяться разные матрицы. Выбор матрицы зависит от толщины листа. Чем толще лист, тем больше должен быть зазор между пуансоном и матрицей.

Поворотная турель



Пробивной инструмент (пуансоны и матрицы) устанавливается в поворотную турель, имеющую 20 станций (16 нормальных и 4 большие)

Задача оптимизации последовательности заданий

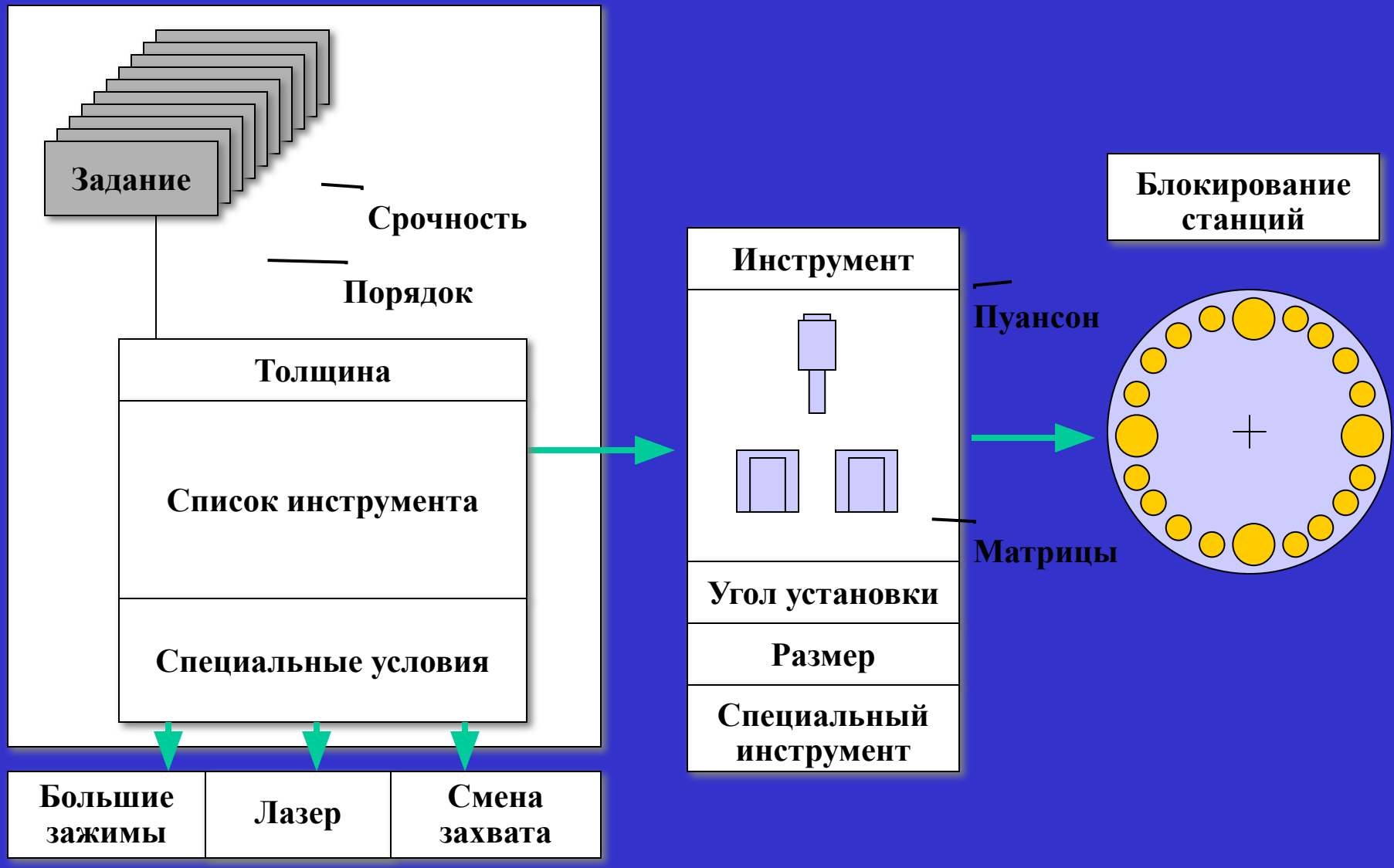
В малосерийном производстве через штамповочную машину за день проходит до 50 партий изделий (заданий). Для каждого задания требуется установка в турель от 1 до 19 инструментов. Для минимизации общего времени производства требуется подобрать такую последовательность выполнения заданий, при которой время смены инструмента было бы минимальным.

Общее время производства

Выполнение программы

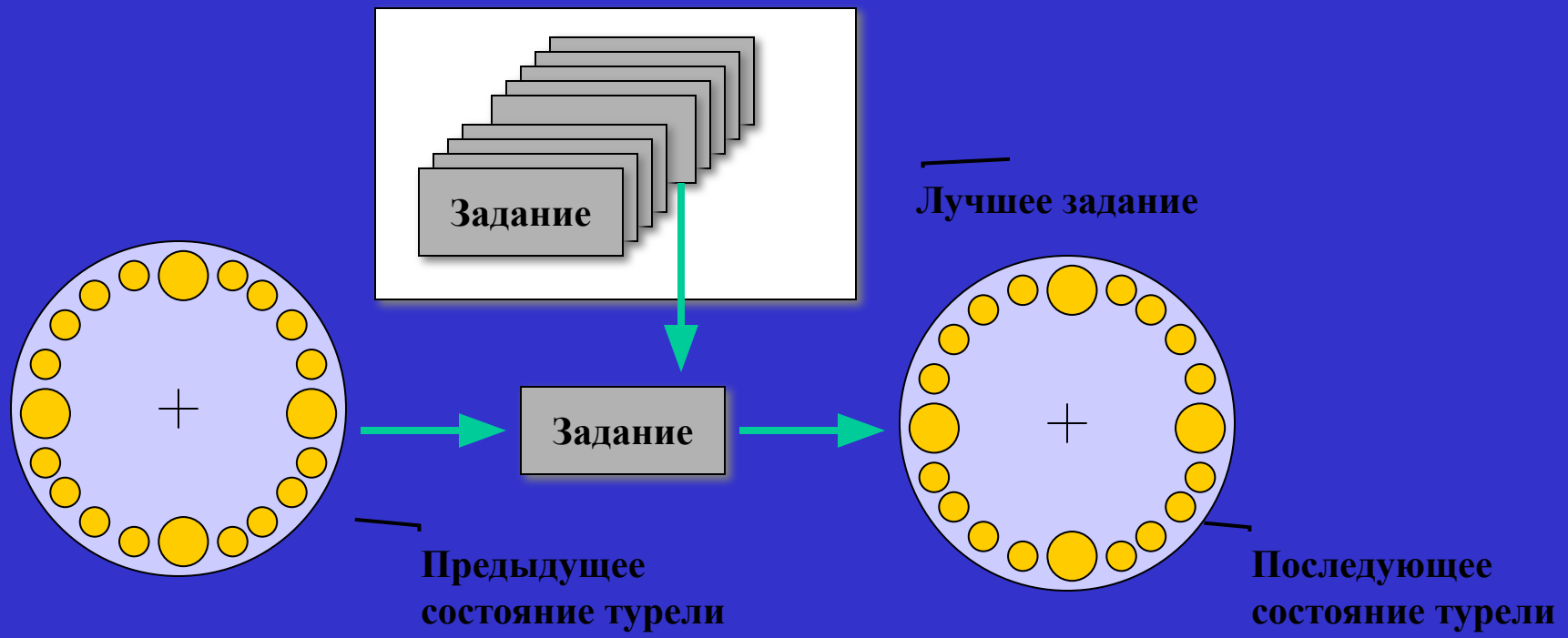
Смена инструмента

Ограничения



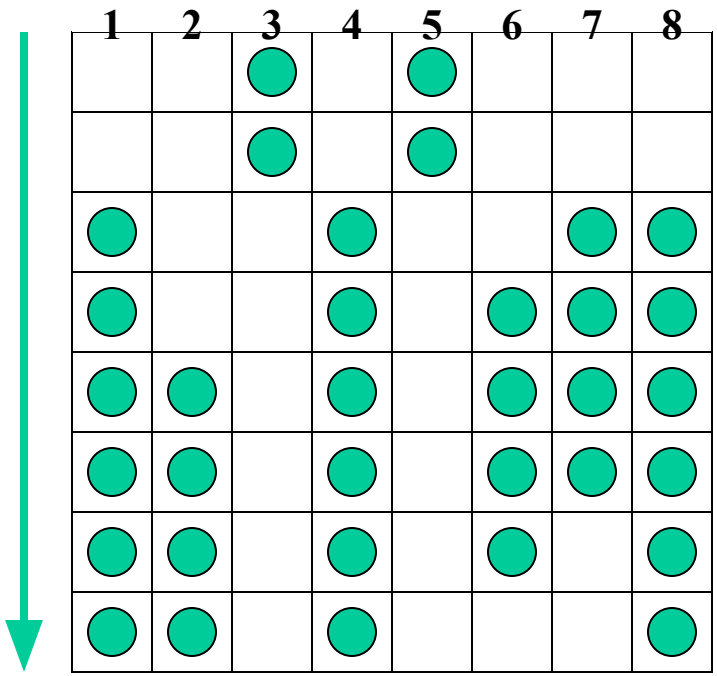
Эвристический алгоритм

1. *Последовательно выполняются N шагов, где N - число заданий.*
2. *На каждом шаге из списка оставшихся заданий выбирается лучшее задание.*
3. *Выбор на основе стоимостной функции для всех комбинаций инструмент - станция.*
4. *При вычислении стоимостной функции учитывается влияние выбора на оставшиеся задания.*
5. *Ограничения применяются как можно раньше для снижения размерности задачи.*



Учет ограничений

Задания



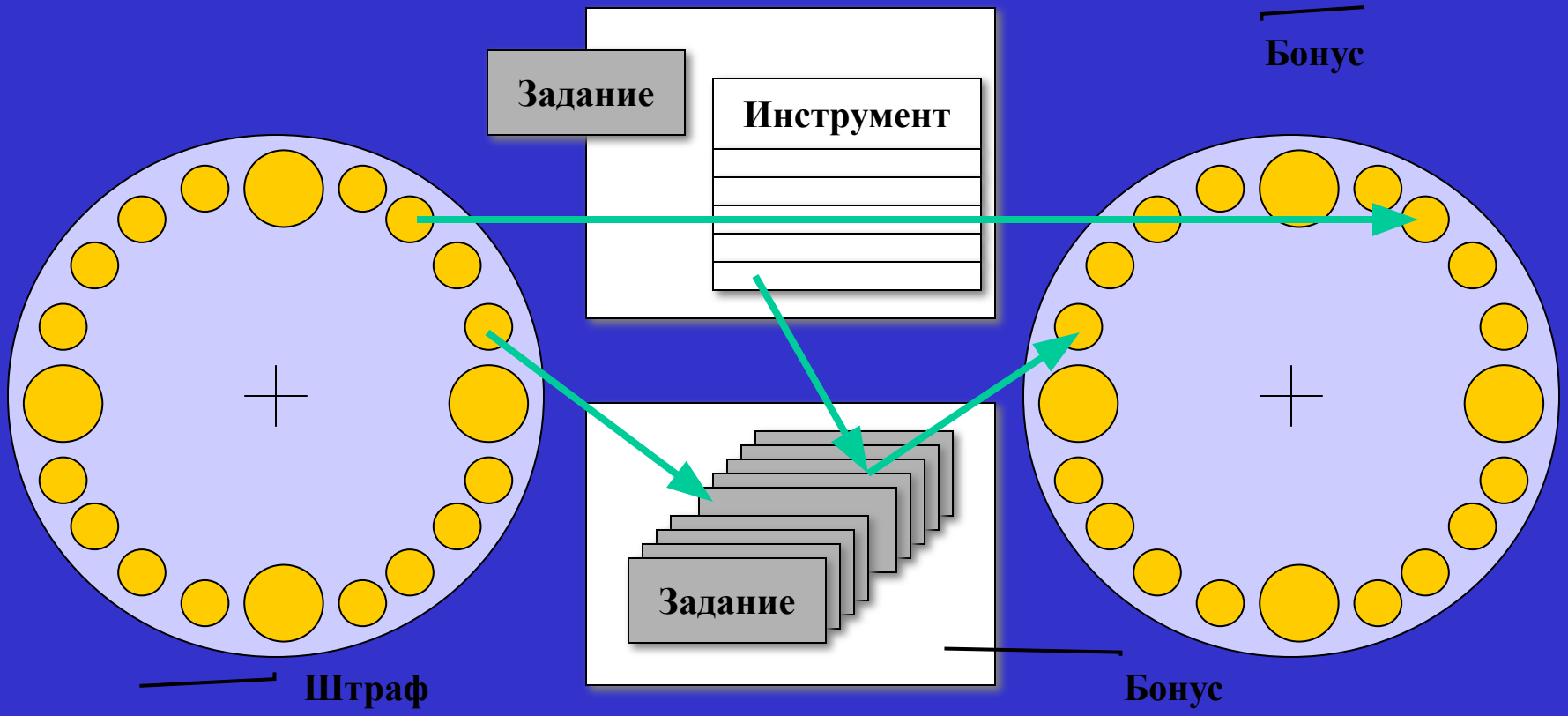
3 и 5 - срочные задания

6 перед 2

7 перед 6

Станции

Расчет стоимостной функции смены инструмента



Стоимостная функция поощряет установку инструмента, который может быть использован другими заданиями, и наказывает снятие инструмента, для которого еще есть задания.

Пример стоимостной функции для 8 инструментов

Станции

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
И 1	-60																			
И 2						44					-40					36				
И 3		40	42	42	40		42	44	44	42		40	42	42	42		40		48	42
И 4		40	42	42	42		40	42	42	42		40	44	-20	44		42	40	40	44
И 5			46	44				28	42				36	42				40	40	
И 6						32					28					42				
И 7		44	42	48			44	-60	46			42	42	40			42	40	44	
И 8		42	42	42	44		42	44	44	42		46	42	42	44		42	44	44	44

Ищется вариант размещения инструментов, который даст минимальное значение стоимостной функции

Полная стоимостная функция

Станции

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
И 1	-60																			
И 2						44					-40					36				
И 3		40	42	42	40		42	44	44	42		40	42	42	42		40		48	42
И 4		40	42	42	42		40	42	42	42		40	44	-20	44		42	40	40	44
И 5			46	44				28	42				36	42				40	40	
И 6						32					28					42				
И 7		44	42	48			44	-60	46			42	42	40			42	40	44	
И 8		42	42	42	44		42	44	44	42		46	42	42	44		42	44	44	44

Дополнительные столы

Смена зажимов

Защита зажимов

Лазер

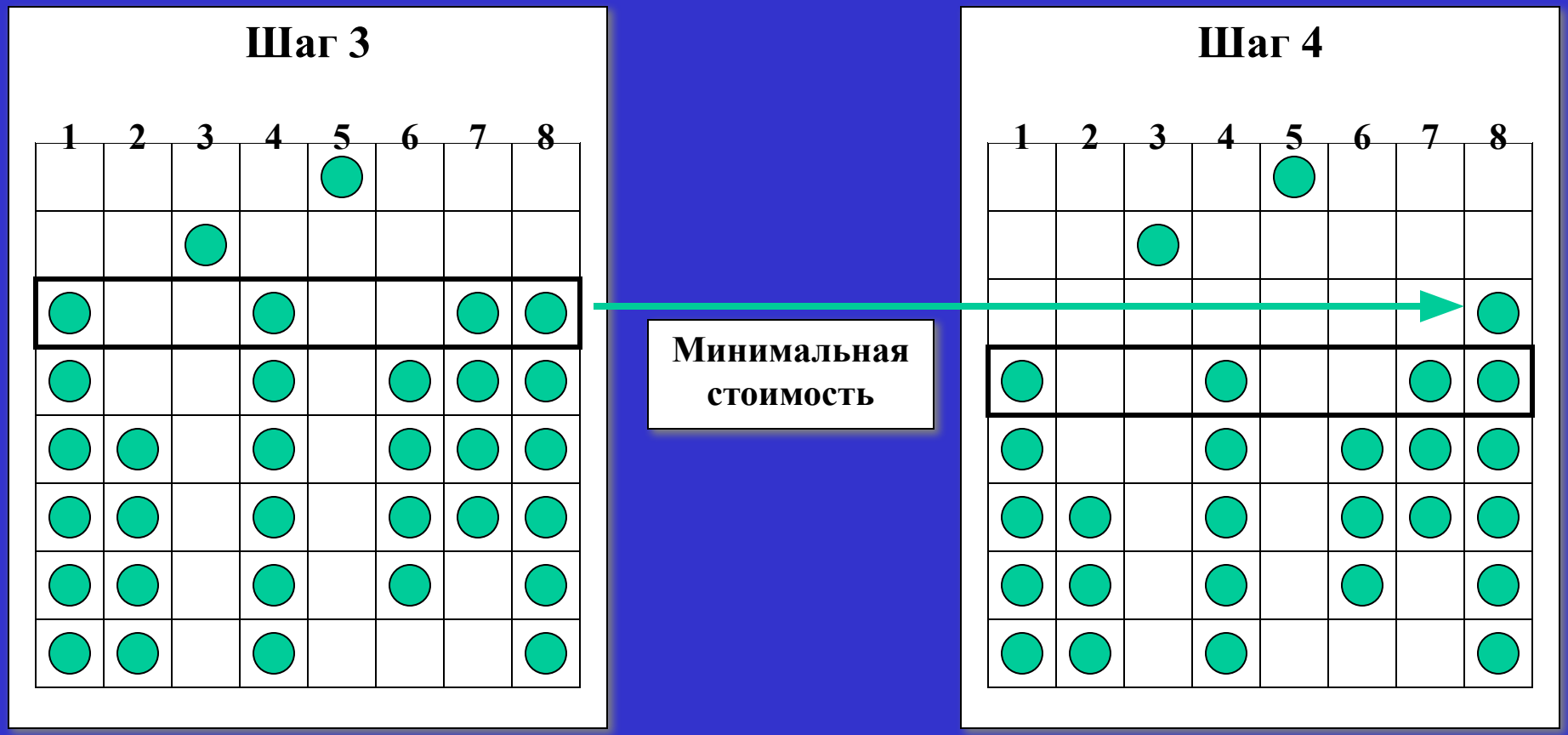
Σ/число инструментов

Σ

Σ

Стоимость

Выбор решения



Результаты оптимизации

```
INIT STATE-------------------------------------------------------------------------------
 Punch [   0 287 292 281  35 302 316 302  44  81  17 316  45 249  14 133 169 323 281 275 ]  0: 0
Matrix [   0 459 476 442  28 507 535 495  37  78  15 535  43 364   8 134 206 550 442 423 ]  0: 0
 Angle [   0  90   0   0  90   0   0   0   0   0  90   0  90   0   0   0   0  45   0   0 ]


RETOOLING--------------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287  91  40 281 138 316 323 302  44 289  17 316  45 249  14 133 169 281 281 275 ]  2: 6
Matrix [ 458  85  35 442 142 531 548 495  37 463  15 535  43 364   8 134 206 440 442 423 ]  2: 6
 Angle [   0   0   0   0   0  90   0   0   0  90  90   0  90   0   0   0   0  45   0   0 ]

  Job 15       *   *       *
  Job 14       *   *       *
  Job 16       *   *       *
  Job 17       *   *       *
  Job 18       *   *       *
  Job 19       *   *       *
  Job 20       *   *       *
  Job  4                   *   *   *       *                           *
  Job  3   *               *                                           *

RETOOLING--------------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287  91  40 281 138 316 323 302  44  60 316 139   6  17  14 133  54 297 302 275 ]  1: 7
Matrix [ 458  85  35 440 142 531 548 495  37  53 531 143   2  10   8 134  47 484 495 423 ]  1: 8
 Angle [   0   0   0   0   0  90   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0  90   0 ]

  Job  1               *       *           *       *   *   *   *           *
  Job  2                       *               *   *                           *   *
```

Результаты оптимизации

```
RETOOLING-------------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287  91  40 281 138 316 323 302  44  60 316 139   6 110  14 133  54 297 302 275 ]  0: 1
Matrix [ 458  85  35 440 142 535 550 495  37  53 535 143   2 111   8 134  47 484 495 423 ]  2: 2
 Angle [   0   0   0   0   0  90   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0  90   0 ]

  Job 13                       *   *               *           *

RETOOLING-------------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287  91  40 281 138 316 323 302  44  60 316 139   1 110  14 169 155  35 302 275 ]  1: 3
Matrix [ 458  85  33 440 142 531 550 495  37  53 531 143   2 111   8 206 172  28 495 423 ]  3: 3
 Angle [   0   0   0   0   0  90   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0  90   0 ]

  Job  5                                                       *
  Job  6                                                       *
  Job  7                                                       *
  Job 21       *           *       *                   *
  Job 28                       *       *   *                           *       *
  Job 27           *   *       *                   *                       *

RETOOLING-------------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287  91  40 281 249 163 323 302  70  60 316 139   1  25  14 169 155  35 302 133 ]  1: 4
Matrix [ 459  85  33 440 364 191 549 495  66  53 531 143   1  21   8 206 173  28 495 134 ]  2: 7
 Angle [   0   0   0   0  90   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0  90   0 ]

  Job  8                                                           *
  Job  9                                                           *
  Job 10                                           *               *
  Job 11                       *
  Job 12                       *
  Job 25                                               *
  Job 24                   *           *                       *               *
  Job 23   *                           *       *                       *           *
```

Результаты оптимизации

```
RETOOLING-------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287  91  40 281 249 163 323 302  70  60 316 139   1  25  14 169 155  35 302 133 ]  0: 0
Matrix [ 459  85  33 440 364 191 548 495  66  53 531 143   1  21   8 206 173  28 495 134 ]  0: 1
 Angle [   0   0   0   0  90   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0  90   0 ]

  Job 22                         *                                                   *

RETOOLING-------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287  64  40  36  26 163 323 264  70  60 284 139   1  45 114 169 155  35 102 107 ]  1: 8
Matrix [ 459  63  33  36  26 191 551 406  66  59 453 143   1  45 115 206 174  28 104 108 ]  1:11
 Angle [   0   0   0   0   0   0   0  90   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0 ]

  Job 33             *                                   *   *
  Job 30       *     *   *       *   *   *   *   *           *   *       *       *   *

RETOOLING-------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287 120  40  36  26 164 323 264  91 144 284 139   1  45 114 169  51  35 102 107 ]  1: 4
Matrix [ 459 120  33  36  26 195 551 406  88 153 453 143   1  45 115 206  50  35 104 108 ]  1: 5
 Angle [   0   0   0   0   0   0   0  90   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0 ]

  Job 31             *   *   *   *   *           *           *   *               *   *
  Job 34       *                 *               *       *                   *   *
  Job 32             *               *   *   *   *   *           *

RETOOLING-------------------------------------------------------------------------
 Punch [ 287 120  40  36 105 311 323 127  91 144 284 139   1  45  97 311  51 157 321 112 ]  2: 6
Matrix [ 459 120  39  36 106 523 551 127  88 153 453 145   1  45  98 523  50 177 546 114 ]  2: 8
 Angle [   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0  90   0   0   0   0 ]

  Job 29       *   *   *   *   *   *   *           *   *   *       *   *           *   *
  Job 26                                                                   *
```