Системы нечеткого вывода

Нечеткая логика *(fuzzy logic)* –
это надмножество классической булевой логики.

Нечеткая логика как новая область математики была представлена в 70-х годах профессором калифорнийского университета Лотфи Заде (Lotfi Zadeh).

Нечеткие правила вывода образуют базу правил.
В нечеткой экспертной системе, в отличие от традиционной, работают все правила одновременно, но степень их влияния на выход может быть различной.
Принцип вычисления суперпозиции многих влияний на окончательный результат лежит в основе нечетких экспертных систем.

***Области применения*:**

• автомобильная промышленность (системы круиз-контроля, системы управления двигателями, трансмиссиями, антиблокировочные тормозные системы);

• аэрокосмическая промышленность (высокопроизводительные системы управления самолетами и космическими аппаратами);

• приборостроение и производство бытовой техники (стиральные машины, телевизоры, видеокамеры, фотоаппараты, видеомагнитофоны и др.);

• анализ и прогнозирование в сфере политики и экономики;

• финансы (системы управления портфелем ценных бумаг, системы анализа рисков);

• анализ данных (системы классификации, кластеризации и распознавания образов).

Характеристикой нечеткого множества выступает функция принадлежности. Обозначим через

$$\mu_C(x) \in [0, 1]$$

степень принадлежности к нечеткому множеству *C*, представляющей собой обобщение понятия характеристической функции обычного множества. Тогда нечетким множеством *C* называется множество упорядоченных пар вида

$$C = \{\mu_C(x) / x\}$$

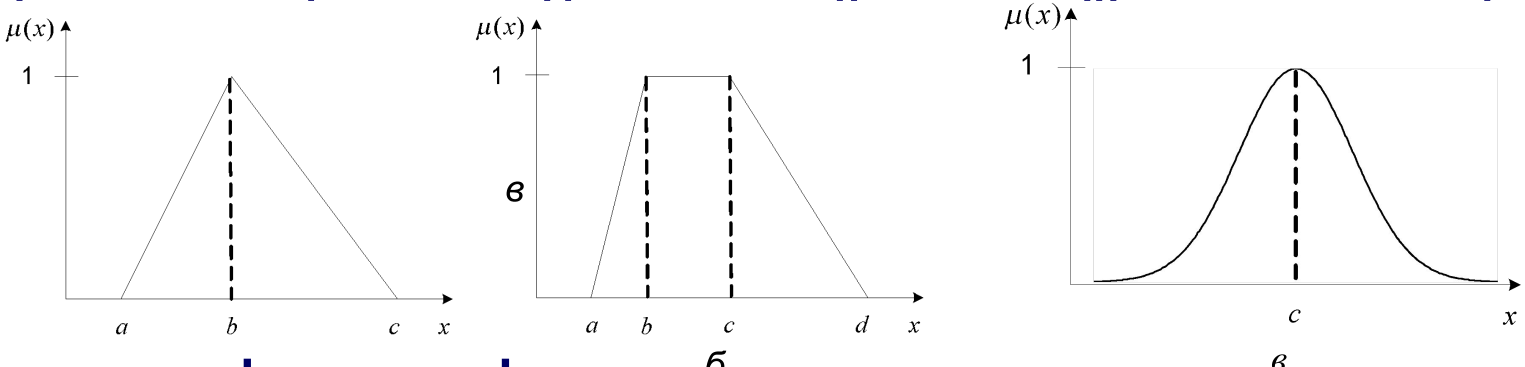
0 - означает отсутствие принадлежности к множеству,
1 – полную принадлежность.

Нечеткая логика (fuzzy logic)

Нечеткие знания формулируются в виде нечетких продукционных правил вывода, задаваемых в форме «если-то» (if-then rule): ЕСЛИ *x* это *A*, ТО *y* это *B*, где *A* и *B* – это лингвистические переменные и соответствующие им функции принадлежности $\mu_A(x),\ \mu_B(x)$

Для *n* переменных правило R_i примет вид нечеткого рассуждения:

R_i: ЕСЛИ x_1 это A_{i1} … И… x_n это A_{in}, ТО *y* это B_i.



Типовые формы функции принадлежности: а – треугольная,
б – трапецеидальная, в – гауссова

Системы нечеткого вывода

Под правилом понимается логическая конструкция, представленная в виде *if A then B* $\left(A \rightarrow B\right)$

Система нечеткого вывода состоит из *m* правил вида:

$$R_i = \left\langle if \left[\bigwedge_{j=1}^{n} x_j \in \left(\tau_i, B_i\right)^j \right] then\ y \in \left(\tau_i, B_i\right)^y \right\rangle, i = \overline{1, m}$$

$x_j,\ j = \overline{1, n}$ **– имена входных переменных;**

***y* – имя выходной переменной**

В общем случае механизм логического вывода включает четыре этапа:

1) Введение нечеткости (фазификация) - определяются степени истинности,

т.е. значения ФП для левых частей каждого правила.

2) Нечеткий вывод - определяются уровни «отсечения» для левой части каждого из правил.

3) Композиция - объединение полученных усеченных функций.

4) Дефазификация - приведение к четкости.

Операции:

Объединением нечетких множеств *A* и *B* называется нечеткое множество $A \cup B$

с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x),\ \mu_B(x))$$

Пересечением нечетких множеств *A* и *B* в *X*

называется нечеткое множество $A \cap B$

с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x),\ \mu_B(x))$$

Нечеткие множества *A* и *B* дополняют друг друга, если

$$\forall\ x \in X\ \ \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$$

Нечеткий вывод по способу Мамдани (Mamdani).

Данный алгоритм математически описывается следующим образом.

1. Процедура фазификации: определяются степени истинности,

т.е. значения ФП для левых частей каждого правила (предпосылок).

Для базы знаний с *m* правилами обозначим степени истинности как

$$A_{kj}(\tilde{x}_j), k = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$$

2. Нечеткий вывод. Сначала определяются уровни «отсечения» для левой части каждого из правил. (логический минимум (min)):

$$\alpha_k = \min(A_{kj}(\tilde{x}_j)), k = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$$

Далее находятся «усеченные» функции принадлежности

$$B'_k(y) = \min(\alpha_k,\ B_k(y)),\ k = \overline{1,m}$$

3. Композиция, или объединение полученных усеченных функций, для чего используется максимальная композиция

$$\mu(y) = \max_k(B_k'(y)), k = \overline{1, m}$$

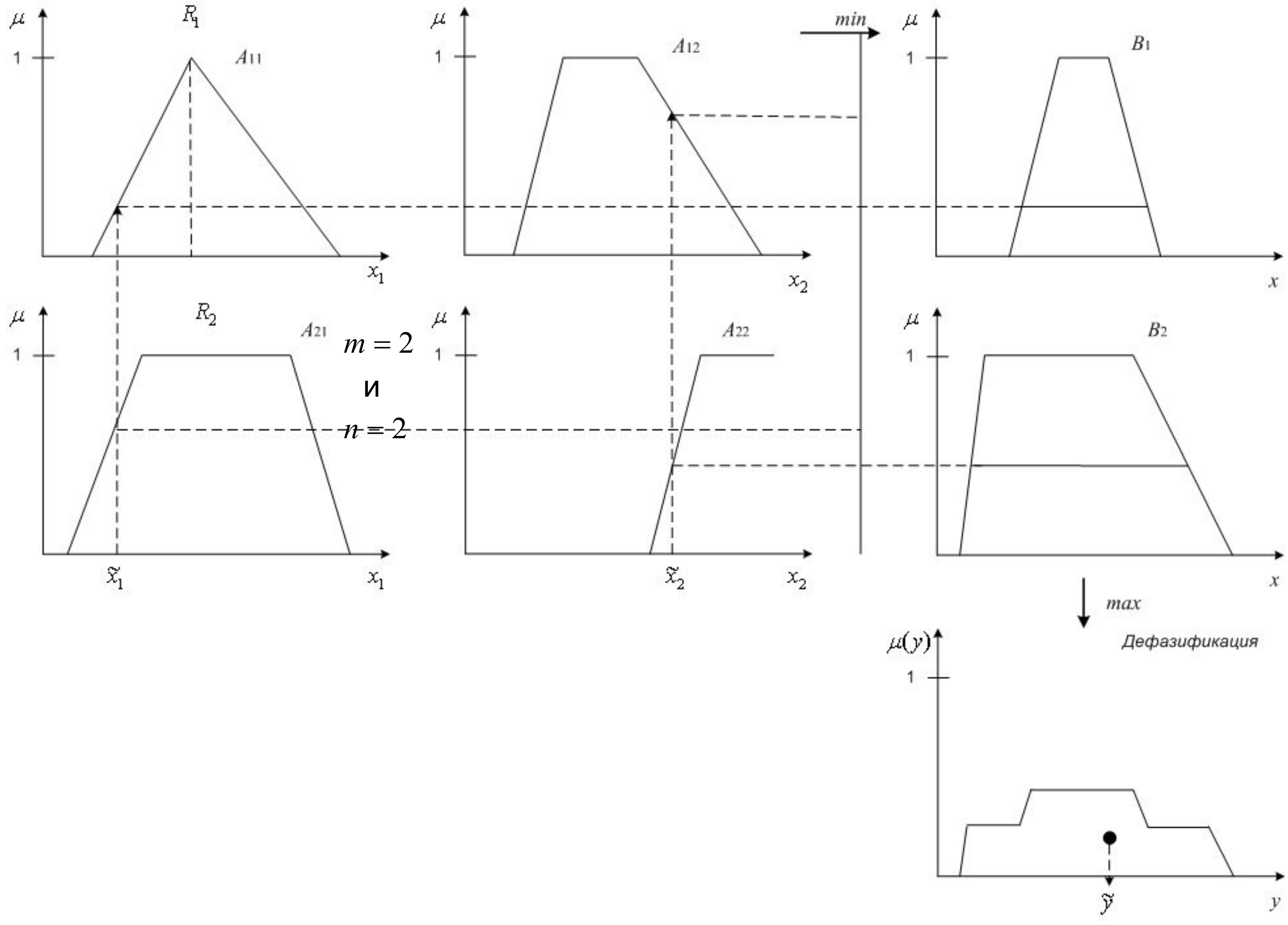
4. На этапе дефазификации приведение
к четкости.
Можно применить метод среднего центра
или центроидный метод:

$$\widetilde{y} = \frac{\int y\mu(y)dy}{\int \mu(y)dy}$$

или для дискретного варианта:

$$\widetilde{y} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}$$

Процесс нечеткого вывода Мамдами для $m = 2$ $n = 2$



Пример простейшей экспертной системы

На оценку погоды влияют 3 фактора:

- **Температура;**
- **Скорость ветра**
- **Осадки**

Правила:

Если температура **низкая** и ветер **сильный** и осадки **продолжительные**,

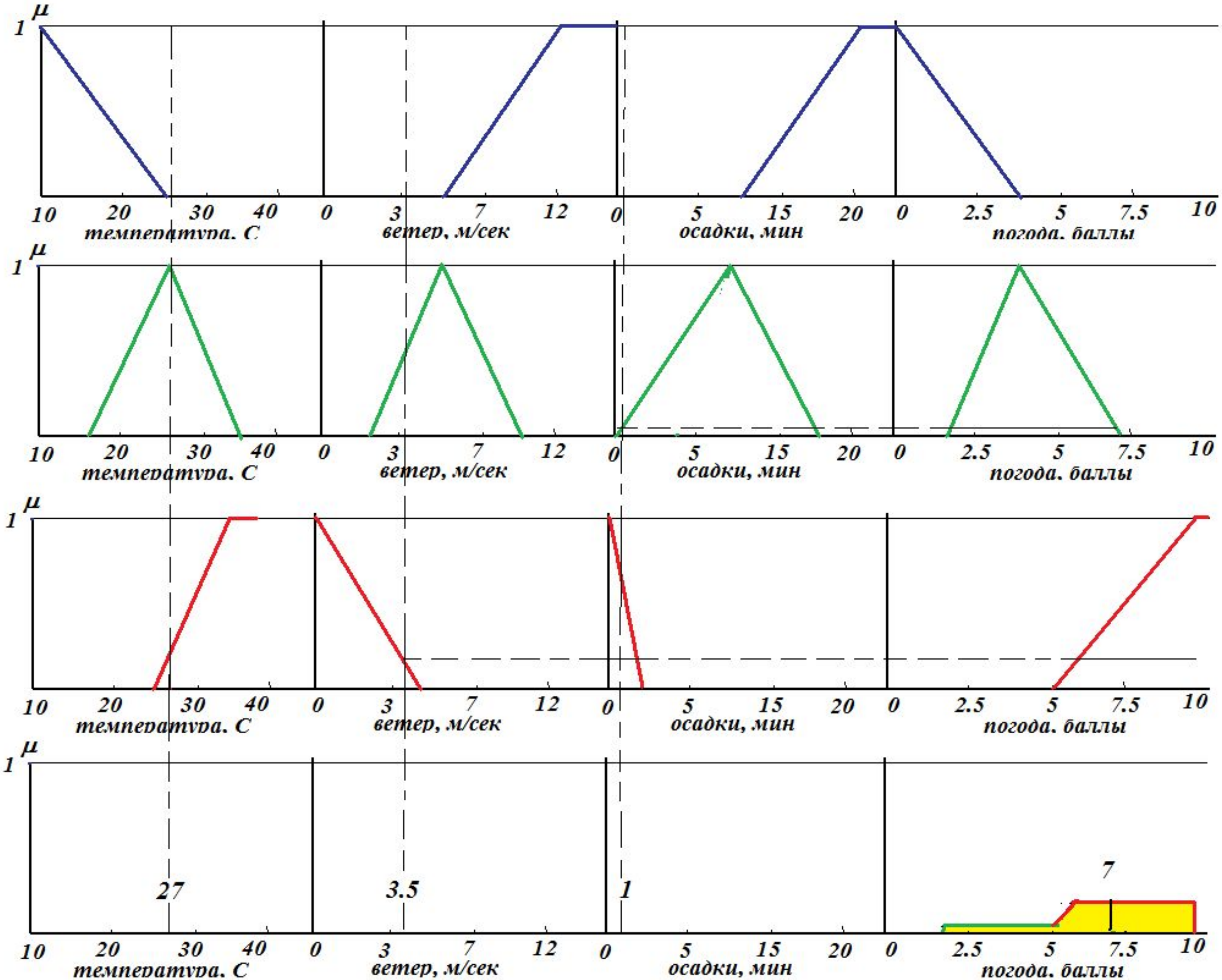
то погода **плохая.**

Если температура **умеренная** и ветер **умеренный** и осадки **непродолжительные**,

то погода **удовлетворительная.**

Если температура **высокая** и ветер **слабый** и осадки **кратковременные**,

то погода **хорошая.**


μ
1
10
20
30
40
температура, С
0
3
7
12
ветер, м/сек
0
5
15
20
осадки, мин
0
2.5
5
7.5
10
погода, баллы
27
3.5
1
7

Нечеткий вывод по Сугено (Sugeno).

В модели вывода Сугено на выходе дефазификатора на выходе системы не требуется. Для этого используется набор правил следующего вида:

$$if\,(x_1 \in A_t)AND...(x_j \in A_t)AND...(x_n \in A_t)then(y = f(X))$$

$f(\mathbf{X})$ – некоторая четкая функция (полином первого порядка) вида :

$$y = f(\mathbf{X}) = p_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

Этапы алгоритма Сугено.

1. Процедура фазификации аналогична способу Мамдани.

2. Нечеткий вывод. Определяются уровни «отсечения» α_k предпосылок правил

и рассчитываются индивидуальные выходы правил

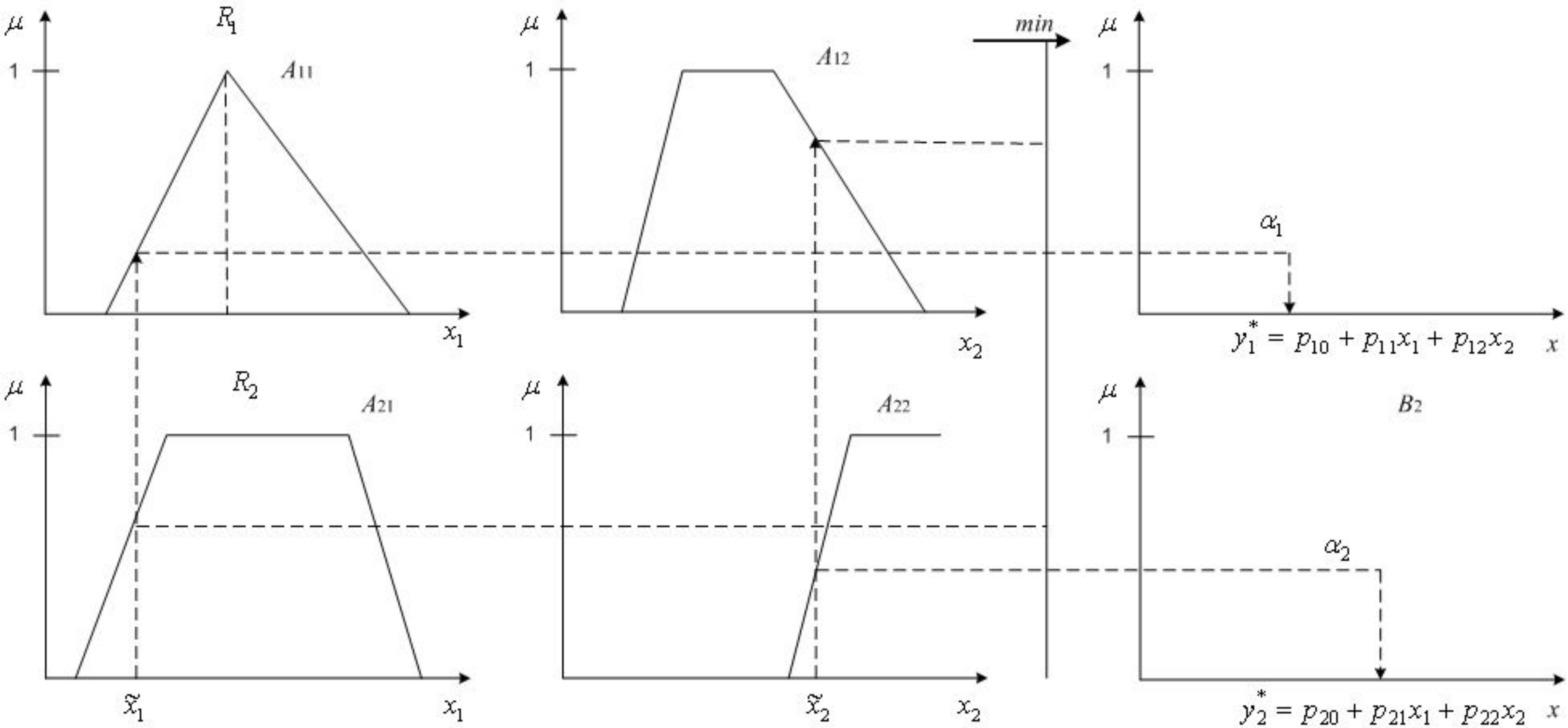
$R_k,\ k = \overline{1,m}$ $\tilde{y}$ $$y_k^* = p_{0k} + \sum_{j=1}^{n} p_{jk} x_j$$

3. Итоговая четкая величина вычисляется как средневзвешенное:

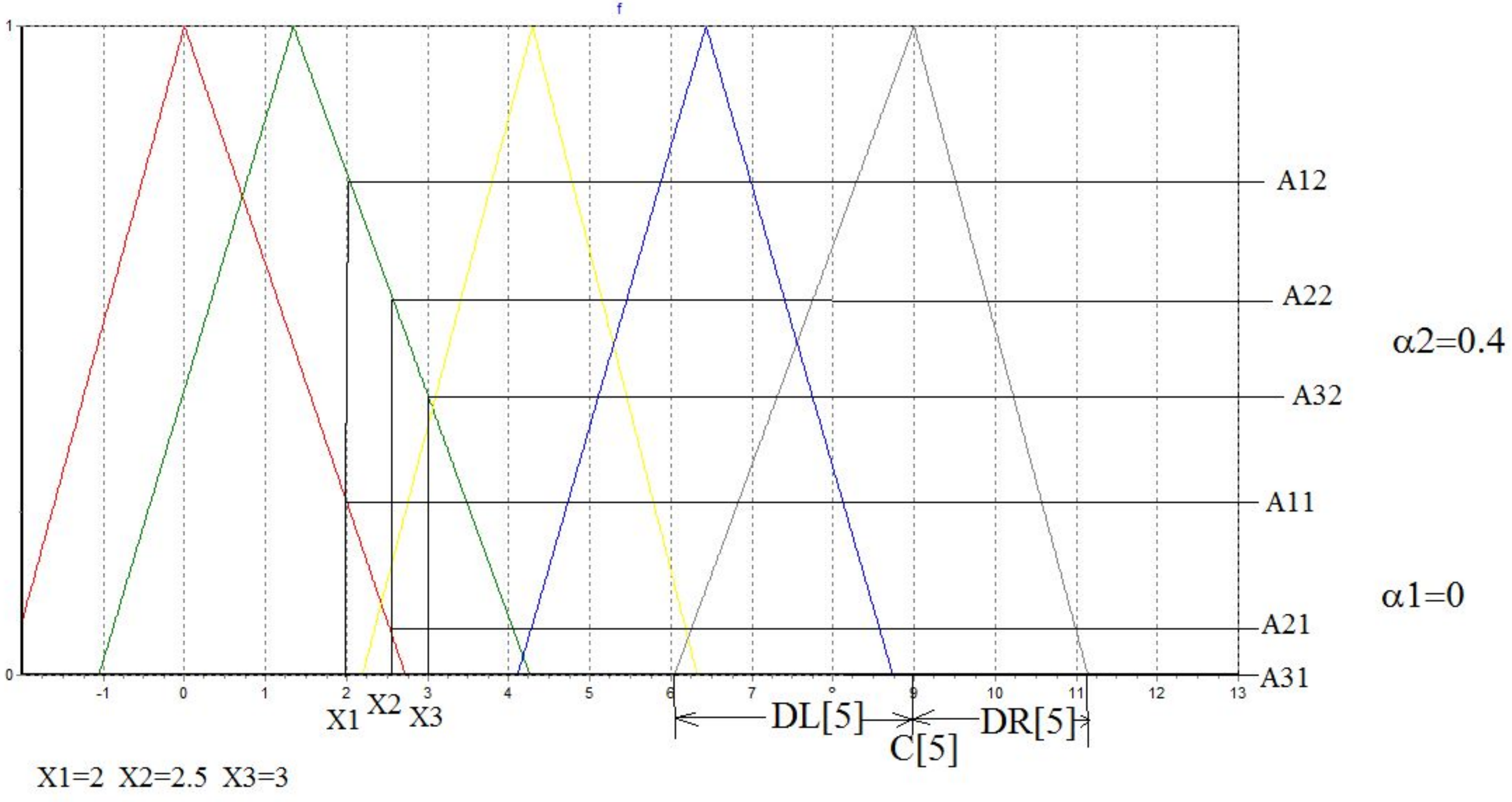
$$\breve{y} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k^*}{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k}$$

где m – количество правил вывода

Нечеткий вывод по Сугено



Определение уровней «отсечения»



Состав системы нечеткого вывода

База правил

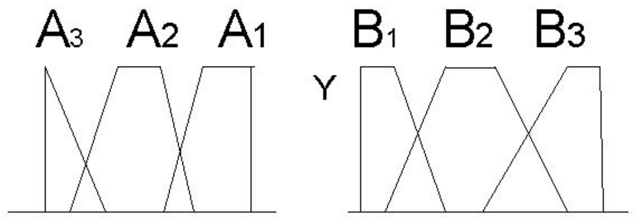
R_1 = Если X это A_1, то Y это B_1

R_2 = Если X это A_2, то Y это B_2

R_3 = Если X это A_3, то Y это B_3

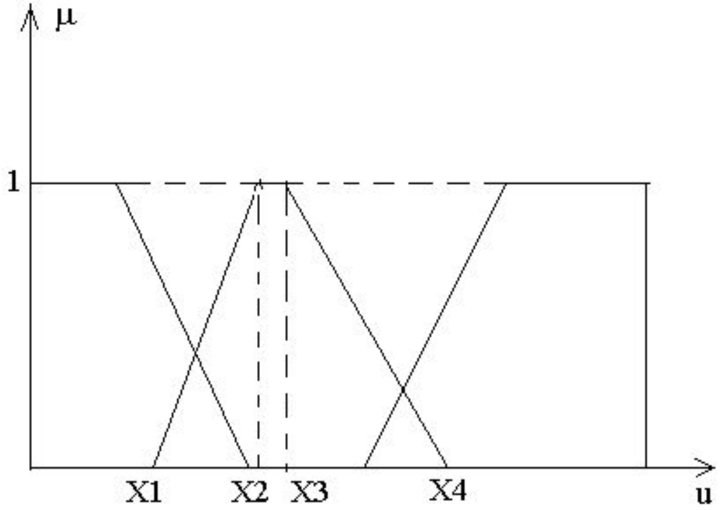
…. …. ….

База данных



… … …

База знаний



Координаты термов

$$x_{pi}^{t}, i=\overline{1,m}; t=\overline{1,T_i}; p=\overline{1,4}$$

Границы термов

$$BL_i^t,\ BR_i^t,\ i=\overline{1,m};\ t=\overline{1,T_i}$$

Для обучения строится целевая функция

$$\Psi(\mathbf{Z})=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(F(\mathbf{Z})-Y_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min$$

Минимизация целевой функции осуществляется с помощью генетического алгоритма и дает оптимальные значения параметров нечеткой системы.

Нечеткая причинно-следственная сеть (когнитивная карта)

$$S = \left(P, V\right)$$

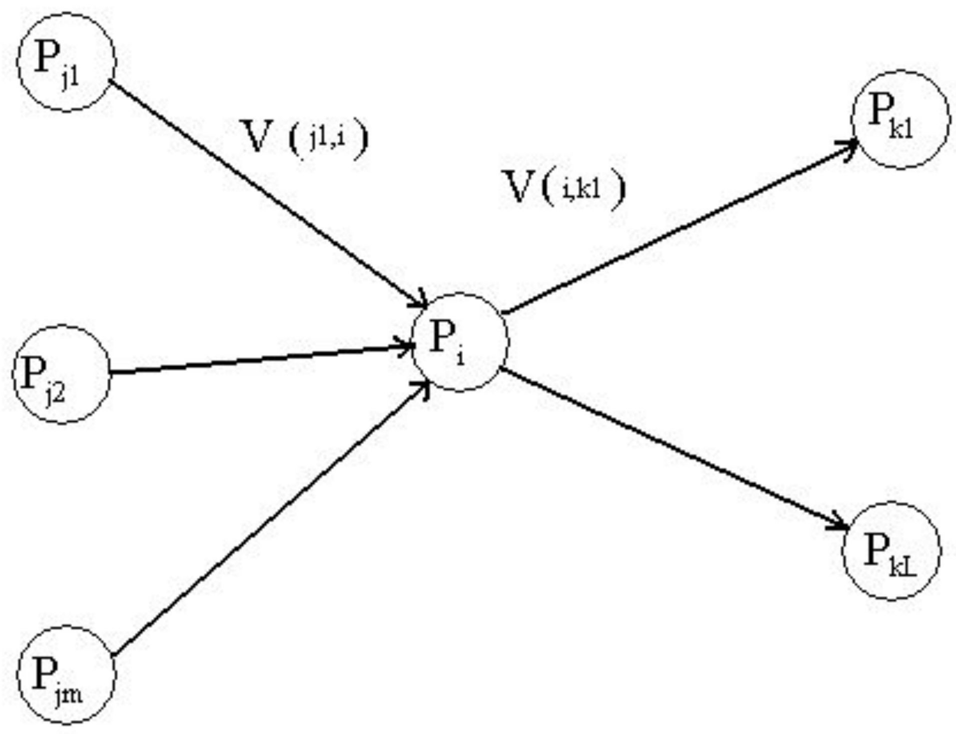
Множество элементов и множество связей между элементами системы:

$$P = \left\{p_i, i = \overline{1, p}\right\},$$

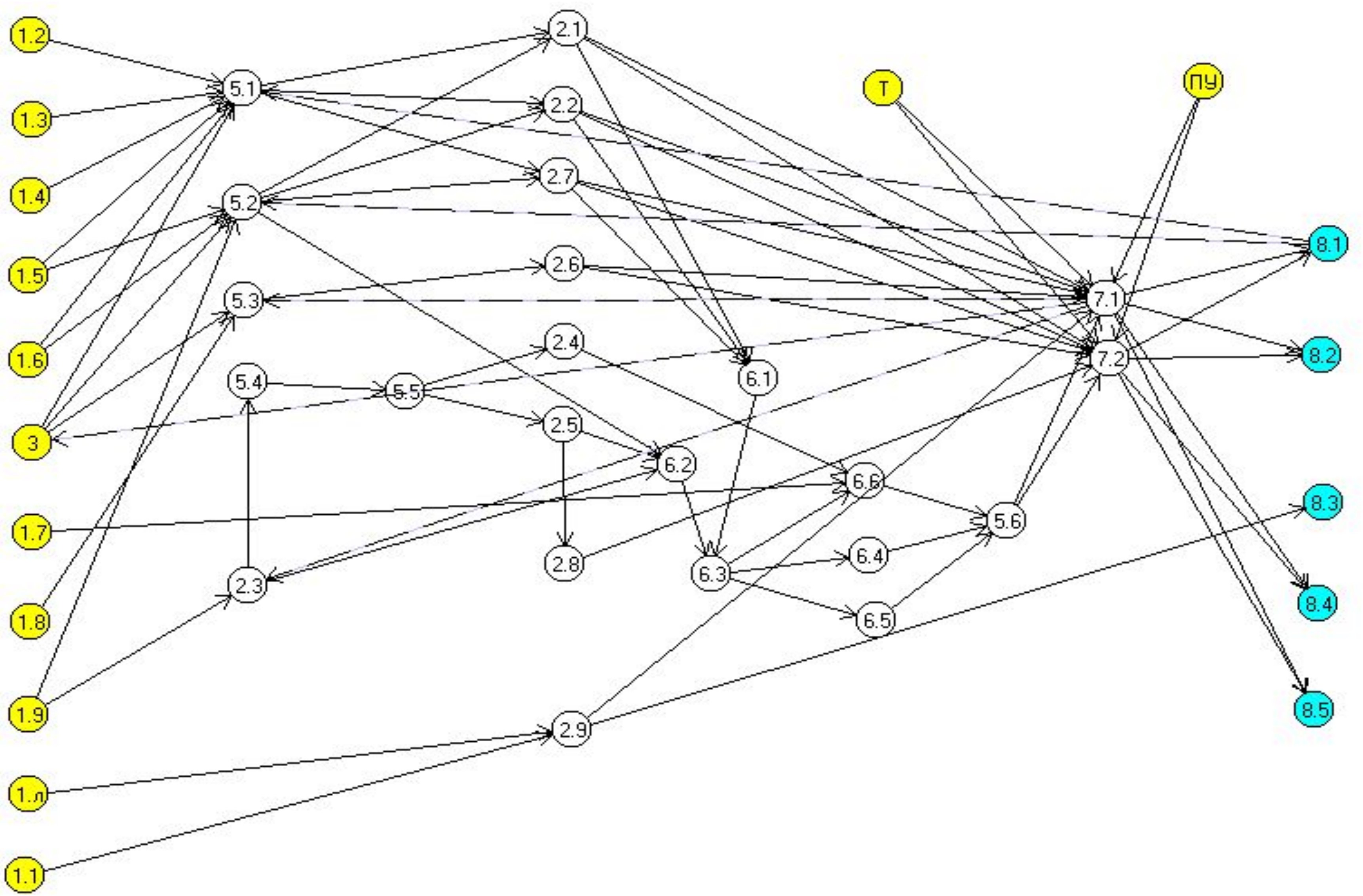
$$V = \left\{v\left(p_i, p_j\right), i, j = \overline{1, p}, i \neq j\right\}$$

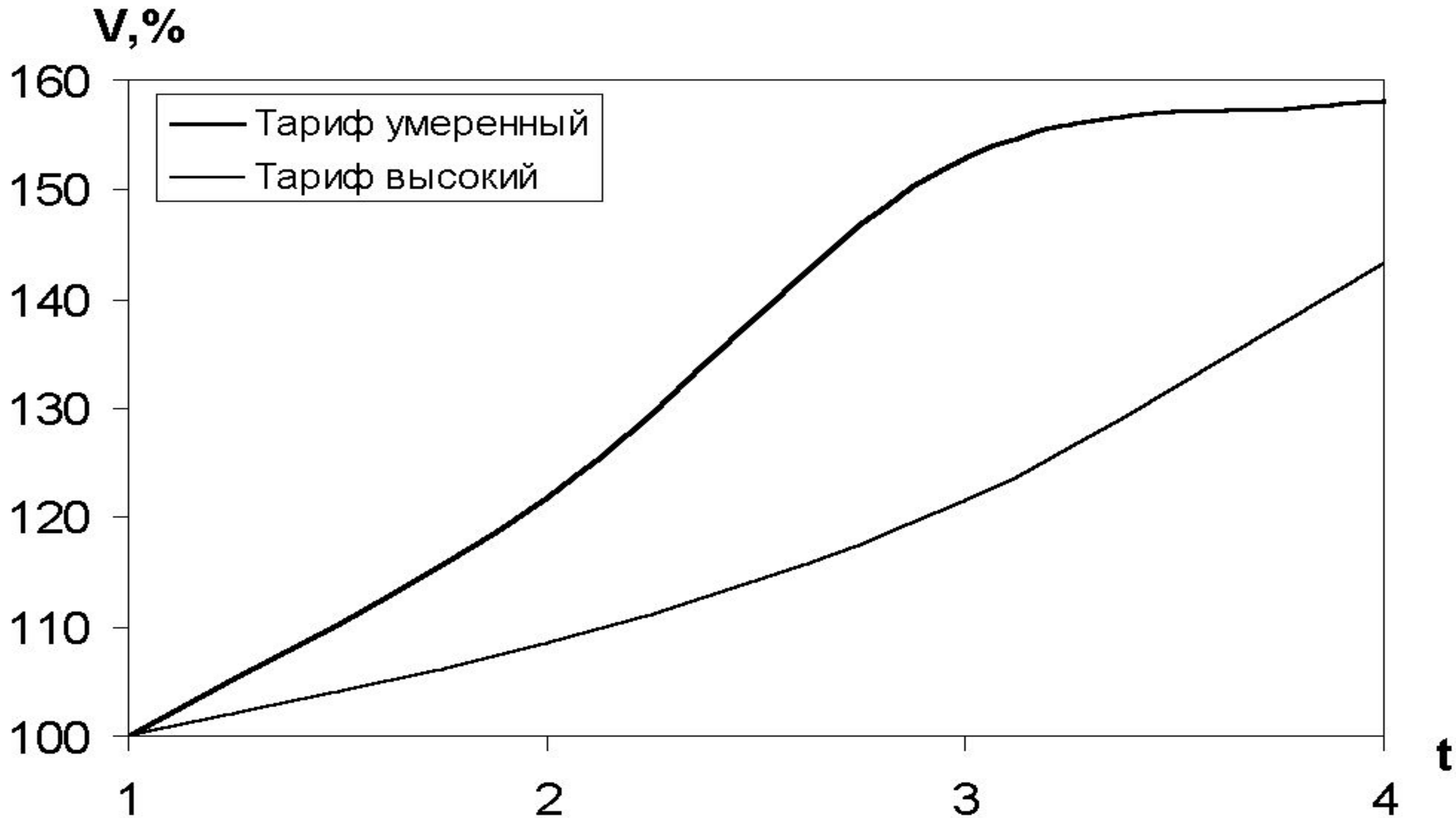
Отношения причинности между каждой парой элементов $\left(p_i, p_j\right)$

формируются в виде ориентированного графа. Связь между типовыми состояниями каждой пары элементов задаются одним из значений терм-множества лингвистической



Нечеткая сетевая модель лесопромышленного комплекса Удмуртии.





Динамика развития системы ЛПК при разных уровнях тарифов на энергоносители

Пример расчета

$$if\,(x1 \in A11)\,and\,(x2 \in A12)\,then\,(y \in B1)$$
$$if\,(x1 \in A21)\,and\,(x2 \in A22)\,then\,(y \in B2)$$
$$if\,(x1 \in A31)\,and\,(x2 \in A32))\,then\,(y \in B3)$$
$$if\,(x1 \in A11)\,and\,(x2 \in A32))\,then\,(y \in B2)$$
$$if\,(x1 \in A31)\,and\,(x2 \in A12))\,then\,(y \in B2)$$

Правила

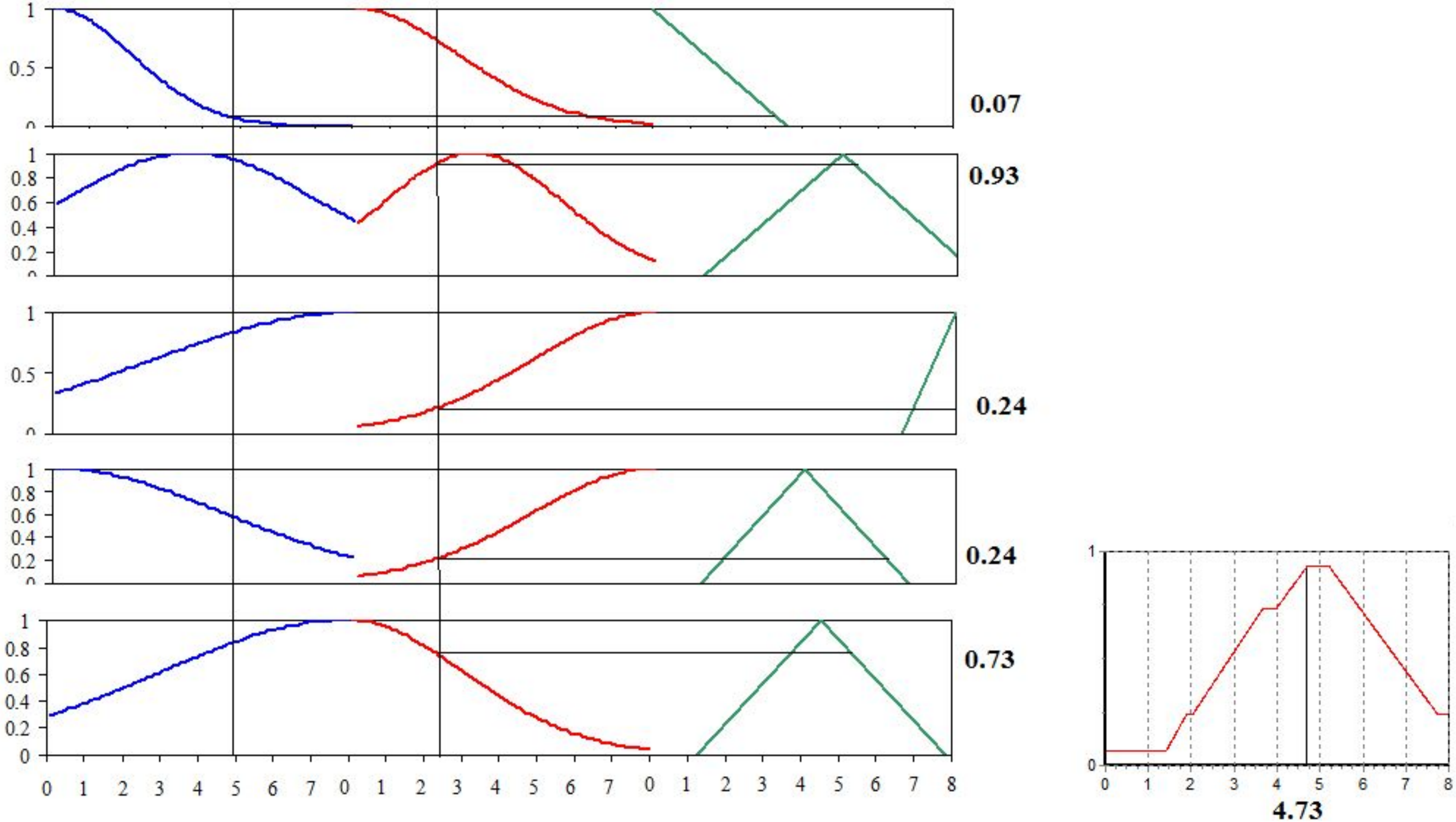
Функции принадлежности

$$\mu(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - Cx}{Sx} \right)^2 \right)$$

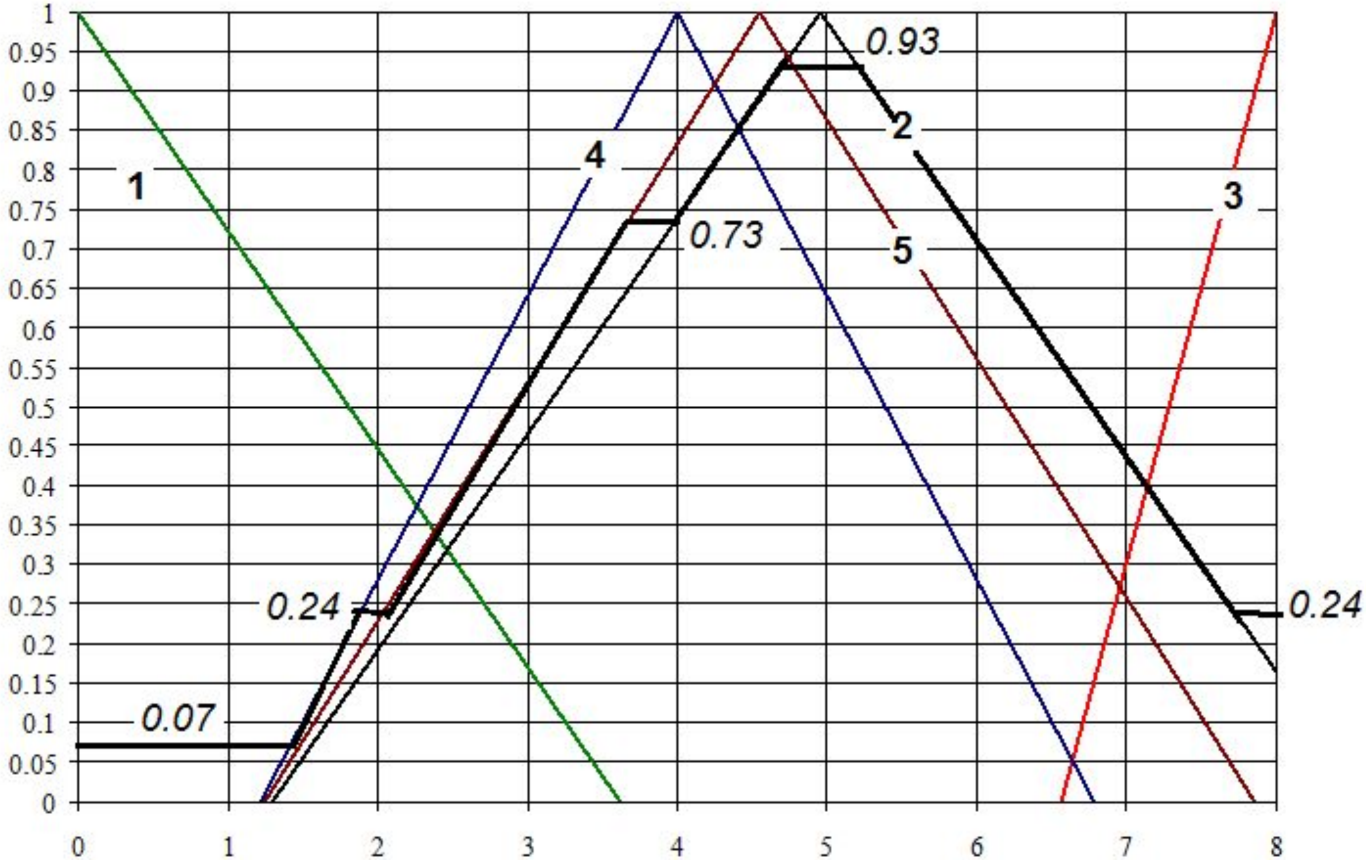
$$\mu(y) = \begin{cases} \dfrac{y - Cy}{By} + 1, & y \le Cy \\ -\dfrac{y - Cy}{By} + 1, & y > Cy \end{cases}$$

Cx1	Cx2	Sx1	Sx2	Cy	By
0.00	**0.00**	**3.00**	**4.01**	**0.00**	**3.62**
3.64	**3.16**	**4.86**	**3.35**	**4.95**	**3.66**
8.00	**8.00**	**7.59**	**4.64**	**8.00**	**1.43**
0.00	**8.00**	**6.49**	**4.65**	**4.00**	**2.78**
8.00	**0.00**	**7.13**	**4.40**	**4.55**	**3.31**

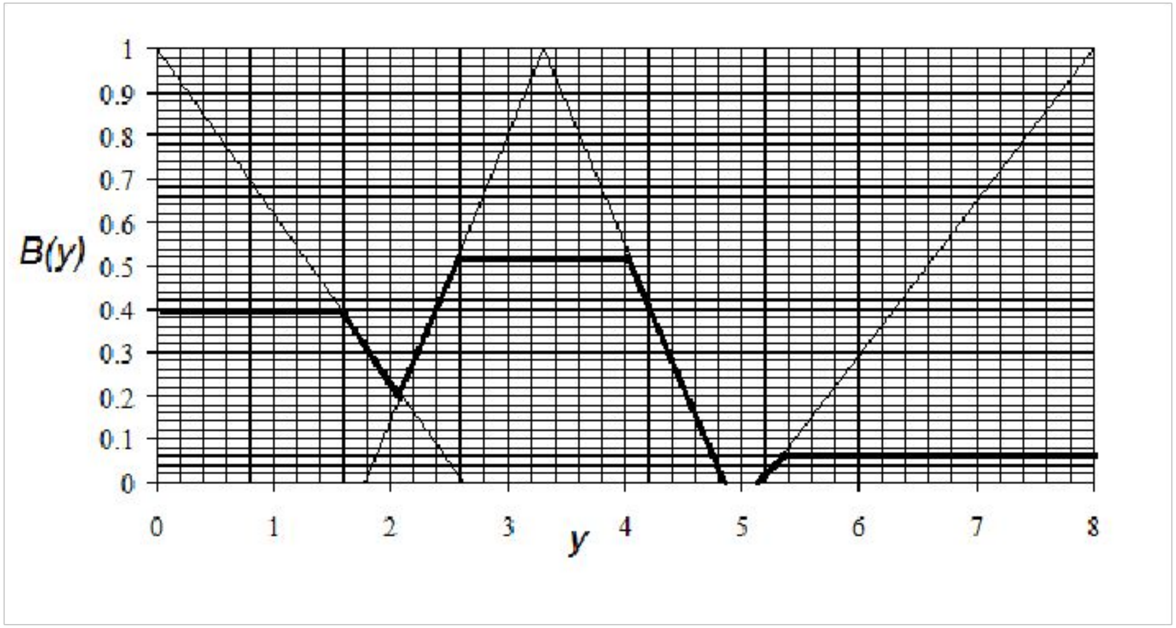
X1	**X2**
4.90	**2.44**


0.07
0.93
0.24
0.24
0.73
4.73

$$\widetilde{y} = \frac{\int y\mu dy}{\int \mu dy}$$



y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
B	0.07	0.07	0.24	0.53	0.73	0.93	0.71	0.44	0.24	
yB	0	0.07	0.48	1.59	2.92	4.65	4.26	3.08	1.92	
$\frac{B_{k-1} + B_k}{2}$		0.07	0.155	0.385	0.63	0.83	0.82	0.575	0.34	3.805
$\frac{y_{k-1}B_{k-1} + y_k B_k}{2}$		0.035	0.275	1.035	2.255	3.785	4.455	3.67	2.5	18.01



Разделим область изменения y на K=8 отрезков длиной h=1.

Табличные значения функции:

yk	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Bk	0.395	0.395	0.22	0.55	0.55	0	0.057	0.057	0.057

По формуле трапеций

$$, \int_y yB(y)dy \approx h\sum_{k=1}^{K}\frac{y_{k-1}B_{k-1}+y_kB_k}{2}=5.654$$

$$\int_y B(y)dy \approx h\sum_{k=1}^{K}\frac{B_{k-1}+B_k}{2}=2.055 \quad \text{и} \quad \tilde{y}=2.75\,.$$