

Проф. КОПЫТИН И.В.

Лекционный курс «Квантовая механика»

Направление **03.03.03.** – «Радиофизика»

Бакалавры, **3** курс

Задание на период с **17** по **28** марта **2020** г.

Разобрать прилагающиеся ниже лекции **11-13**

Лекция 11

УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА
ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Для нахождения волновой функции временным уравнением Шрёдингера имеет смысл пользоваться только тогда, когда явно зависит от времени гамильтониан $\hat{H}(t)$. В нем такая зависимость возникает только через потенциальную функцию $U(t)$. Если зависимость гамильтониана от времени отсутствует, т.е. $U = U(\xi)$, то волновую функцию находят из уравнения Шредингера для стационарных состояний (часто говорят – из «уравнения Шрёдингера» без слова «временное»).

Пусть гамильтониан не зависит от времени: $\hat{H} = \hat{H}(\xi)$. Тогда в нем можно разделить переменные ξ и t . Имеем:

$$\hat{H}(\xi) \frac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial t} = \hat{H}(\xi) \psi(\xi, t). \quad (11.1)$$

Ищем волновую функцию в виде:

$$\psi(\xi, t) = \psi(\xi) \cdot f(t). \quad (11.2)$$

Подставим (11.2) в (11.1) и разделим переменные.

$$i\hbar \psi(\xi) \frac{df(t)}{dt} = f(t) \hat{H}(\xi) \psi(\xi) ;$$

$$i\hbar \frac{1}{\psi(\xi)} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} = \frac{\hat{H}(\xi)}{f(t)} = E . \quad (11.3)$$

Величина E – константа с размерностью энергии. Введена она потому, что в (11.3) левая сторона зависит только от t , а правая сторона – только от ξ . Поэтому равенство возможно, только если и правая, и левая стороны будут константами.

Из (11.3) получаются два уравнения:

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = E \rightarrow \frac{df(t)}{f(t)} = -\frac{i}{\hbar} E dt ; \quad (11.4)$$

$$\hat{H}(\Psi(\cdot, \xi)) = E\Psi(\cdot, \xi) \quad (11.5)$$

Интегрирование в (11.4) дает:

$$f(\cdot, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (11.6)$$

Константа интегрирования положена равной 1, так как общая константа в (11.2) все равно будет находиться из условия нормировки.

Уравнение (11.5) позволяет найти волновую функцию $\Psi(\cdot, \xi)$ и величину E . Так как гамильтониан от времени не зависит, то, следовательно, в нем вместо потенциальной функции $\mathcal{H}(\cdot)$ будет потенциальная энергия микросистемы $U(\cdot, \xi)$. Это означает, что гамильтониан $\hat{H}$ становится оператором энергии и уравнение (11.5) есть уравнение на его собственные функции и собственные значения. Последние – это энергии соответствующих состояний системы, имеющие определенные значения.

Состояние с определенным значением энергии E называется стационарным, а уравнение (11.5) называется уравнением Шрёдингера для стационарных состояний. Итак, в случае одной микрочастицы ($\xi = r$) это уравнение имеет вид:

$$\hat{H}(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \quad (11.7)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}). \quad (11.8)$$

Обычно интерес представляет именно волновая функция $\Psi(\mathbf{r})$, так как зависимость от времени полной волновой функции определена ф-лой (11.6). Но в ряде случаев требуется знание именно полной волновой функции стационарного состояния системы, и в соответствии с (11.2) она имеет вид:

$$\Psi(\xi, t) = \Psi(\xi) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (11.9)$$

а величины $\Psi(\xi)$ и E находятся из уравнения (11.5) или из уравнения (11.7) с гамильтонианом (11.8), если $\xi = r$. Спектр энергий может быть дискретным или непрерывным. В первом случае волновые функции (11.9) принимают вид

$$\Psi(\xi, t) = \Psi(\xi) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.10)$$

Во втором случае –

$$\Psi(E, \xi, t) = \Psi(E, \xi) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E t}. \quad (11.11)$$

Свойства стационарных состояний

1. Волновые функции в виде (11.10) или (11.11) образуют **полную систему**, т.е. допускают разложение произвольной функции $\Psi(\xi, t)$:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) \cdot \Psi_n(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) \cdot \Psi_n(\mathbf{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t},$$

если спектр энергий дискретный, и

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int a(E, t) \cdot \Psi(E, \mathbf{r}, t) dE =$$

$$\Psi \left(\int a(E, \mathbf{r}, t) \cdot dE \right) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E t},$$

если спектр энергий непрерывный.

2. Плотность вероятности $\rho(\mathbf{r}, t)$ и плотность тока вероятности $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ не изменяются с течением времени.

По определению (см. (4.3)) и с учетом (11.9) получаем:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \Psi^*(\mathbf{r}, t) \cdot \Psi(\mathbf{r}, t) =$$

$$\Psi^*(\mathbf{r}) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} E t} \Psi(\mathbf{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E t} =$$

$$\Psi^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 \stackrel{=}{=} \rho(\mathbf{r}, t = 0),$$

что и требовалось доказать. Аналогично с использованием формул (10.5) и (11.9) (в этом случае $\xi = r$) доказывается, что $j(r, t) = j(r, t = 0)$.

3. **Среднее значение** физической величины **от времени не зависит.**

Если микросистема находится в состоянии с волновой функцией $\Psi(\xi, t)$, то по определению (8.1) среднее значение физической величины F

$$\bar{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\xi, t) F \Psi(\xi, t) d\xi.$$

Подстановка в это выражение волновой функции в виде (11.9) дает утверждаемое выше:

$$\bar{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\xi, t) F \Psi(\xi, t) d\xi =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\xi) F \Psi(\xi) d\xi = F(\bar{t} = 0).$$

4. Вероятность результата измерения физической величины *не изменяется* с течением времени.

Пусть микросистема находится в стационарном состоянии

$\Psi(\xi, t) = \Psi(\xi) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$. Рассмотрим, например, физическую величину F с дискретным спектром. Тогда вероятность того, что $F = F_n$, будет (см. (8.9)):

$$W(F_n, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(F_n, \xi, t) \Psi^*(F_n, \xi, t) d\xi$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \Psi(\xi) d\xi \right|^2 \cdot \left| e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \right|^2$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \Psi(\xi) d\xi \right|^2 = W(F_n = F, t = 0)$$

что и требовалось доказать.

ПРОВЕРОЧНЫЕ ВОПРОСЫ К ЛЕКЦИИ 11

1. Какое состояние называется стационарным?
2. Когда следует решать не временное уравнение Шрёдингера, а уравнение Шрёдингера для стационарных состояний?
3. Какой вид имеет зависящий от времени фактор в волновой функции стационарного состояния и откуда можно найти параметры, входящие в него?
4. Что такое «условия сшивания» для волновой функции? Когда необходимо их использовать?
5. Запишите общий вид уравнения Шредингера для стационарных состояний водородоподобного атома (атомное ядро с зарядовым числом Z и электрон).
6. Запишите общий вид уравнения Шредингера для стационарных состояний атома гелия (атомное ядро с зарядовым числом 2 и два электрона; движением ядра пренебречь).
7. Запишите общий вид уравнения Шредингера для стационарных состояний атома лития (атомное ядро с зарядовым числом 3 и три электрона).

Лекция 12

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Предположим, что нас интересуют **две физических величины** F и G , например, L_z и L^2 , или x и p_x , или L_x и L_y и пр. Соответственно предполагается, что известны их операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$, а также **коммутатор**

$$[\hat{F}, \hat{G}] \equiv \hat{F} \cdot \hat{G} - \hat{G} \cdot \hat{F} = i\hat{M}. \quad (12.1)$$

Оператор $\hat{M}$ может быть **любым** - нулем (тогда операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ коммутируют), константой или оператором.

Например, операторы $\hat{L}_z$ и L^2 коммутируют и $\hat{M} = 0$, для операторов x и $\hat{p}_x$ $\hat{M} = \hbar$, а для операторов $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$ $\hat{M} = \hbar \hat{L}_z$.

Если известно состояние микрочастицы, т.е. ее волновая функция $\Psi(\xi)$ (включать в аргумент время не будем), то можно будет вычислить **средние значения**

$\bar{F}$ и $\bar{G}$ по формуле (8.1):

$$\bar{F} = \int F \Psi^*(\xi) \Psi(\xi) d\xi \quad ;$$

$$\bar{G} = \int G \Psi^*(\xi) \Psi(\xi) d\xi \quad .$$

Можно ввести **операторы отклонения** от среднего значения: $\Delta\hat{F} = \hat{F} - \bar{F}$ и $\Delta\hat{G} = \hat{G} - \bar{G}$. Так как средние значения $\bar{F}$ и $\bar{G}$ - это константы, то **коммутатор**

операторов $\Delta\hat{F}$ и $\Delta\hat{G}$ **будет таким же**, как и

операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$:

$$[\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] = [\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{M} \quad . \quad (12.2)$$

С помощью операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ можно рассчитать **среднеквадратичные отклонения** $\langle \hat{F}^2 \rangle$ и $\langle \hat{G}^2 \rangle$ для физических величин F и G :

$$\langle \hat{F}^2 \rangle = \langle (F - \hat{F})^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (F - \hat{F})^2 \Psi^*(\xi) \Psi(\xi) d\xi ;$$

$$\langle \hat{G}^2 \rangle = \langle (G - \hat{G})^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (G - \hat{G})^2 \Psi^*(\xi) \Psi(\xi) d\xi .$$

Именно они используются для количественной характеристики **разброса**, т.е. **неопределенности**, значений физических величин F и G при их экспериментальном измерении. Если, например, $\langle \hat{F}^2 \rangle = 0$, то разброс отсутствует и величина F имеет вполне определенное значение. В классической физике величины $\langle \hat{F}^2 \rangle$ и $\langle \hat{G}^2 \rangle$ никак **не связаны** друг с другом. Однако в квантовой механике такая **взаимосвязь может возникнуть**, и именно она фиксируется **соотношением неопределенностей**.

Получим это соотношение. Пусть есть три линейных эрмитовых оператора $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$, и они связаны коммутационным соотношением

$$\hat{A} \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot \hat{A} = i\hat{C}, \quad (12.3)$$

или

$$\hat{C} = i(\hat{B} \cdot \hat{A} - \hat{A} \cdot \hat{B}). \quad (12.3^*)$$

Введем очевидное неравенство:

$$\int |\hat{A}\psi(\xi) - i\hat{B}\psi(\xi)|^2 d\xi. \quad (12.4)$$

Здесь $\psi(\xi)$ - волновая функция микрочастицы (время включать в аргумент не будем), α – произвольный параметр (будем считать его действительным, т.е. $\alpha = \alpha^*$). **Очевидность** неравенства (12.4) в том, что под знаком интеграла стоит **всюду неотрицательная величина**, а потому и сам интеграл будет неотрицательным. Раскроем неравенство (12.4):

$$\begin{aligned}
\int |\hat{A}\psi(\xi) - i\hat{B}\psi(\xi)|^2 d\xi &= \int (\hat{A}\psi(\xi) - i\hat{B}\psi(\xi)) \\
&\quad (\hat{A}\psi(\xi)^* + i\hat{B}\psi(\xi)^*) d\xi = \alpha \int (\hat{A}^2\psi(\xi)\psi(\xi)^* d\xi + \\
&\quad \psi(\xi)\hat{B}\hat{B}\psi(\xi)^* d\xi - i\alpha [\int \hat{B}\psi(\xi)\hat{A}\psi(\xi)^* d\xi - \\
&\quad \psi(\xi)\hat{A}\hat{B}\psi(\xi)^* d\xi]) = \alpha \int \psi(\xi)\hat{A}^2\psi(\xi) d\xi + \\
&\quad \psi(\xi)\hat{B}^2\psi(\xi) d\xi - i\alpha [\int \psi(\xi)\hat{A}\hat{B}\psi(\xi) d\xi - \\
&\quad \psi(\xi)\hat{B}\hat{A}\psi(\xi) d\xi] = \alpha \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \\
&\quad - \alpha \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle \psi(\xi) d\xi = \alpha \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle - \alpha \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle
\end{aligned}$$

Здесь для подчеркнутых операторов были использованы их свойства эрмитовости (см. (5.6)), определение среднего значения (см. (8.1), знак $\langle \dots \rangle$ означает усреднение), а также соотношение (12.3*).

Итак, получено:

$$\Delta \hat{Q}^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle \quad (12.5)$$

Функция $y(\alpha)$ имеет **вид параболы** и, если ее нарисовать в плоскости (α, y) , то ни при каких значениях α она не должна **пересекать** ось абсцисс ($y > 0$), но может ее **касаться** сверху ($y = 0$). Иными словами, квадратное уравнение по параметру α , т.е. уравнение $y = 0$, не должно иметь **действительных корней**, но их величины могут и совпадать. Как известно из алгебры, два корня x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеют вид:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Отсюда следует, что, если

$$b^2 - 4ac \leq 0 \rightarrow ac \geq b^2 / 4,$$

действительных корней либо не будет (знак “>”), либо они будут совпадать (знак “=”). Соответственно,

полагая $a = \langle \hat{A}^2 \rangle, b = \langle \hat{C} \rangle, c = \langle \hat{B}^2 \rangle$, получаем условие выполнения соотношения (12.5):

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \cdot \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{4}. \quad (12.6)$$

Операторы $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ - произвольные, и можно выбрать их как физические операторы: $\hat{A} = \hat{F}$, $\hat{B} = \hat{G}$ и $\hat{C} = \hat{M}$.

Подставляя их в (12.6), получаем **соотношение неопределенностей** для физических величин F и G :

$$\boxed{\langle (\Delta F)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta G)^2 \rangle \geq \frac{\langle \hat{M} \rangle^2}{4}}. \quad (12.7)$$

Из него следует, что среднеквадратичные значения физических величин $\langle (\Delta F)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta G)^2 \rangle$ действительно не будут независимы, если величина $\langle \hat{M} \rangle \neq 0$. Более того, если, например, величина $\langle (\Delta F)^2 \rangle > 0$, т.е. F имеет **определенное значение**, то $\langle (\Delta G)^2 \rangle = \infty$, т.е. G

не будет иметь определенного значения. И, наоборот, если $\langle \hat{G} \rangle \neq 0$, то $\langle \hat{F} \rangle^2 = \infty$, и физическая величина F не будет иметь определенного значения.

В классической физике такого не бывает!

Рассмотрим **частный случай** соотношения неопределенностей (12.7), положив $F = x$ и $G = p_x$.

Поскольку коммутатор $x\hat{p}_x - \hat{p}_x x = i\hbar$, то $\hat{M} = \hbar$ и $\langle \hat{M} \rangle = \hbar$. Соотношение неопределенностей (12.7) тогда принимает вид:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta \hat{p}_x)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (12.8)$$

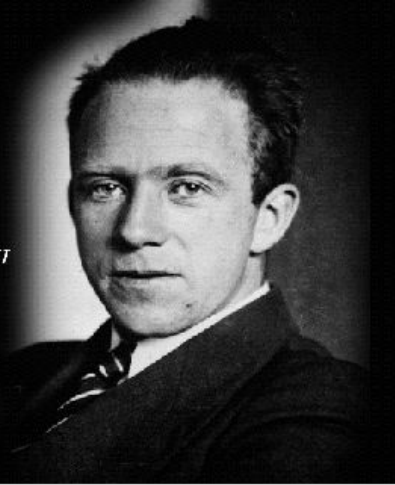
Это **соотношение неопределенностей Гейзенберга**, полученное им в 1925 г. Иногда его записывают в упрощенном виде:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \quad (12.9)$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$$

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_H, A_H] + (\partial A_S)_H$$

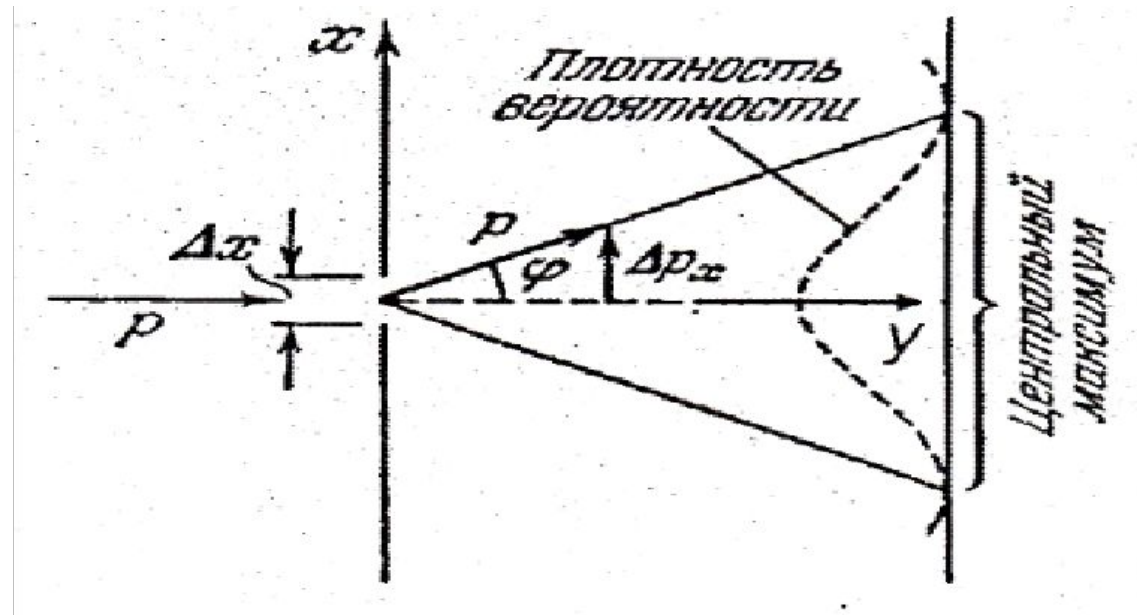
Вернер Гейзенберг
(1901 - 1976)



подразумевая под величинами Δx и Δp_x **неточности** в значениях координаты x и проекции импульса p_x на ось x при их **экспериментальном измерении** у микрочастицы. Из (12.9)

прямо следует, что у микрочастицы понятие траектории **отсутствует** в классическом ее понимании.

Действительно, движение частицы по траектории означает, что в любой момент времени для точно заданной координаты x можно указать точное значение проекции импульса p_x и наоборот. А из соотношения (12.9) следует, что чем **точнее** измеряется координата, т.е. $\Delta x \rightarrow 0$, тем **неопределеннее** будет проекция импульса, так как $\Delta p_x \rightarrow \infty$. И, наоборот, если $\Delta p_x \rightarrow 0$, то $\Delta x \rightarrow \infty$.



Дифракция электронов на одной щели.

Соотношение неопределенностей **утверждает**, что для характеристики состояния микрочастицы **нельзя использовать** физические величины из классической физики, если их операторы не коммутируют. Для этой цели следует применять только те из них, которые являются **интегралами состояния**.

ПРОВЕРОЧНЫЕ ВОПРОСЫ К ЛЕКЦИИ 12

1. Как можно объяснить отсутствие понятия траектории у микрочастицы, исходя из соотношения неопределенностей?
2. Почему можно видеть траекторию альфа-частицы в камере Вильсона?
3. Запишите соотношение неопределенностей для операторов проекции импульса $\hat{p}_x$ и проекции момента импульса $\hat{L}_y$.
4. Запишите соотношение неопределенностей для операторов проекций момента импульса $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$.
5. Запишите соотношение неопределенностей для операторов момента импульса $\hat{L}_y$ и $\hat{L}^2$.

Лекция 13

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ ПО ВРЕМЕНИ И ИНТЕГРАЛЫ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ

Предположим, что оператор физической величины действует не только на координаты микрочастиц ξ , но еще **зависит и от времени** t , т.е. $\hat{F} = \hat{F}(\xi, t)$. Если известна волновая функция системы $\Psi(\xi, t)$, можно вычислить среднее значение $\bar{F}$:

$$\bar{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(\xi, t) \hat{F}(\xi, t) \Psi(\xi, t) d\xi. \quad (13.1)$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(\xi, t) \frac{\partial \hat{F}(\xi, t)}{\partial t} \Psi(\xi, t) d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Psi^*(\xi, t)}{\partial t} \hat{F}(\xi, t) \Psi(\xi, t) d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(\xi, t) \hat{F}(\xi, t) \frac{\partial \Psi(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Для удобства в последнем интеграле производная

$\frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\xi, t)$ переставлена с функцией $\hat{H}(\xi, t)$.

Подставим сюда производные $\frac{\partial}{\partial t} \psi(\xi, t)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\xi, t)$, взяв

их из временного уравнения Шрёдингера $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$

($\hat{H}$ - гамильтониан):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi ; \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \hat{H}^* \psi^* .$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{F}}{dt} \psi(\xi, t) = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \psi(\xi, t) d\xi + \frac{1}{i\hbar} \int \xi, t) FH\hat{\psi}(\xi, t) d\xi - \\
& - \frac{1}{i\hbar} \int \hat{\psi}(\xi, t) H\hat{\psi}(\xi, t) d\xi = \psi(\xi, t) \cdot \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \psi(\xi, t) d\xi + \\
& \psi(\xi, t)^* FH\hat{\psi}(\xi, t) d\xi - \psi(\xi, t)^* HF\hat{\psi}(\xi, t) d\xi = \\
& \psi(\xi, t) \left[\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} (FH - HF) \right] \hat{\psi}(\xi, t) d\xi.
\end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{F}}{dt} \psi(\xi, t) = \left[\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} (FH - HF) \right] \hat{\psi}(\xi, t) d\xi. \quad (13.2)$$

Введем оператор $\frac{d\hat{F}}{dt}$, который называется
«производной оператора по времени»:

$$\boxed{\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (\hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{H}]} \quad (13.3)$$

Здесь $[\hat{F}, \hat{H}]$ - коммутатор операторов $\hat{F}$ и $\hat{H}$.

Сравнивая (13.2) и (13.3), получаем:

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \left\langle \frac{d\hat{F}}{dt} \right\rangle. \quad (13.4)$$

Это соотношение позволяет вычислять величину $d\bar{F}/dt$, используя определение (13.3) оператора $d\hat{F}/dt$.

Если среднее значение физической величины $\bar{F}$ **не изменяется** с течением времени, то такая физическая величина называется **интегралом состояния** системы.

Из соотношения (13.4) следует, что это будет тогда,

когда $\frac{d\hat{F}}{dt} = 0$. Как видно из (13.3), для этого от

оператора $\hat{F}$ требуется **выполнение двух условий**:

1. $\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} = 0$, т.е. оператор $\hat{F}$ не должен **явно зависеть от времени**;

2. $[\hat{F}, \hat{H}] = 0$, т.е. оператор $\hat{F}$ должен
коммутировать с гамильтонианом $\hat{H}$.

Для физических операторов $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z, \hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{L}^2, \hat{K}$
первое условие выполняется, поэтому необходимо
вычислять их коммутаторы с гамильтонианом. Если
для каких-то из них коммутаторы будут равны нулю,
то эти физические величины и будут интегралами
состояния микросистемы.

ПРОВЕРОЧНЫЕ ВОПРОСЫ К ЛЕКЦИИ 13

1. Какие интегралы движения будут у свободно движущейся микрочастицы, если оно описывается в декартовой системе координат? А если в сферической системе координат?
2. Какие интегралы движения будут у свободно движущейся микрочастицы, если оно описывается в сферической системе координат?
3. Определите, какие интегралы движения будут у частицы, движущейся в центральном поле (потенциальная энергия частицы зависит только от расстояния до центра силы).