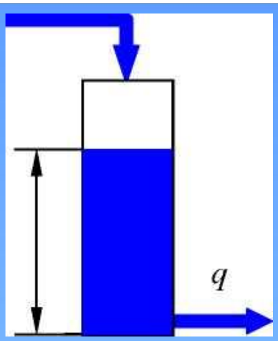
# Лекция 5

## Математические модели управления объектом

# 1. Управление



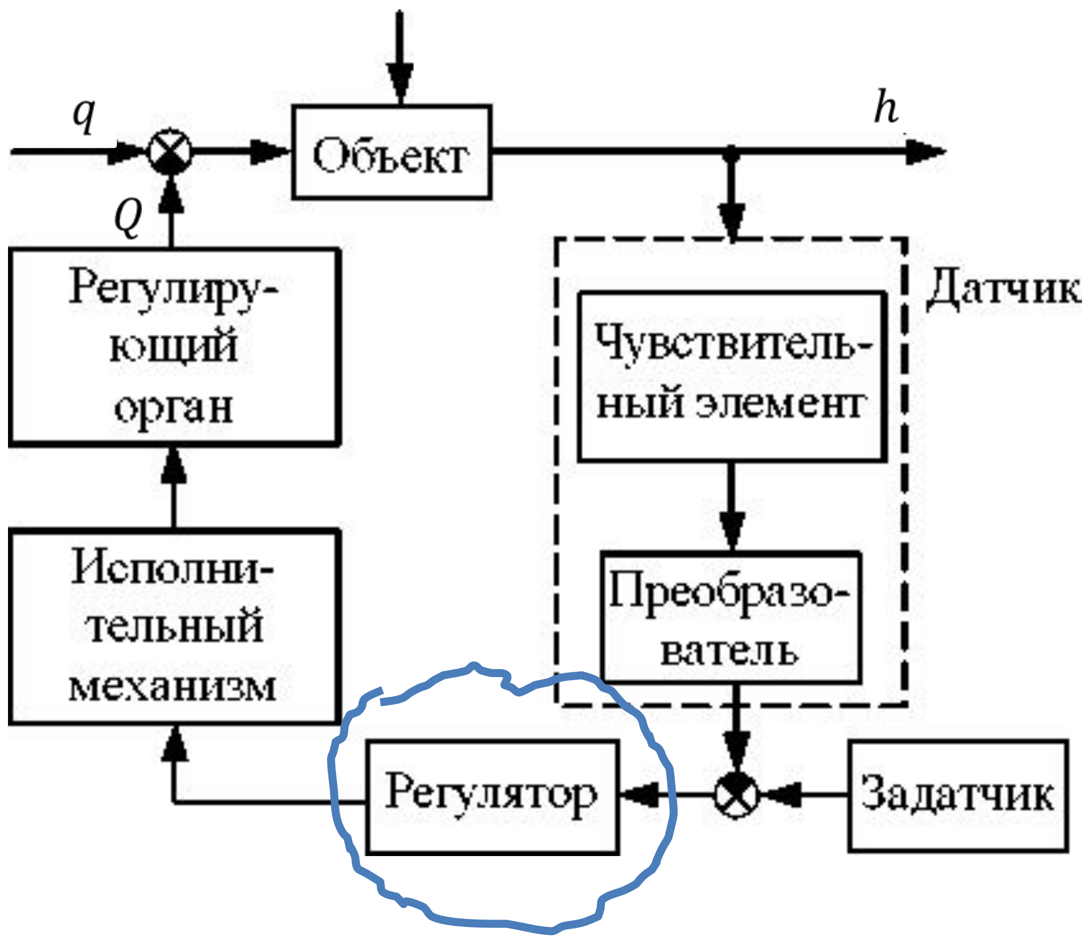

Нужно построить систему, которая автоматически поддерживает заданный уровень $h_0$ воды воды в цистерне ($м$).

Уровень $h$ – это *регулируемая величина*, а поток $Q$ – *сигнал управления*.

Для обратной связи используем датчик, измеряющий уровень воды $h$ в цистерне.

Поток на выходе $q$ ($м^3/с$).

Изменение уровня $\Delta h$ зависит от разности потоков $Q - q$ и площади сечения цистерны $S$ .


q
h
Объект
Q
Регулиру-
ющий
орган
Датчик
Чувствитель-
ный элемент
Исполни-
тельный
механизм
Преобразо-
ватель
Регулятор
Задатчик

$q$

Предположим что

$$Q(t) = Q_0 + \Delta Q\,(t), \qquad q(t) = q_0 + \Delta q(t)\,,$$

Тогда

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S}\int_0^t (q_0 + \Delta Q(t) - q_0 - \Delta q(t))\,dt.$$

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S}\int_0^t (\Delta Q(t) - \Delta q(t))\,dt.$$

Если опустить знак приращения $\Delta$ , то

$$h(t) = \frac{1}{S}\int_0^t (Q(t) - q(t))\,dt.$$

Здесь $h(t)$ , $Q(t)$ и $q(t)$ обозначают отклонения этих величин от номинальных значений.

Эта модель может быть записана как дифференциальное уравнение:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}[Q(t) - q(t)].$$

Для упрощения далее примем $S = 1\text{м}^2$.

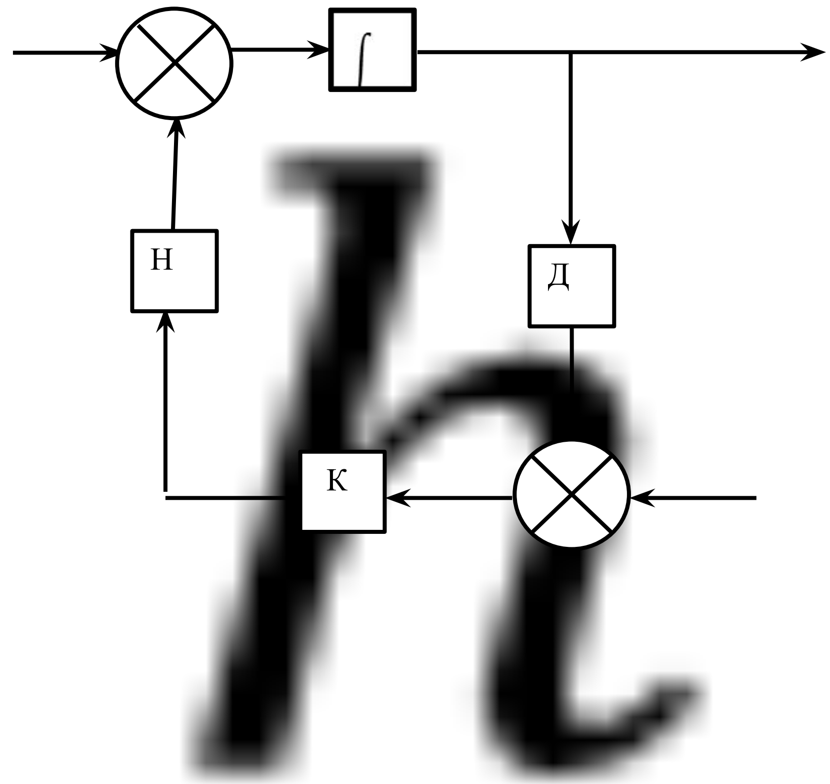
Ошибка управления вычисляется как разница между заданным и измеренным уровнями воды:

$$e(t) = h_0(t) - h(t) .$$

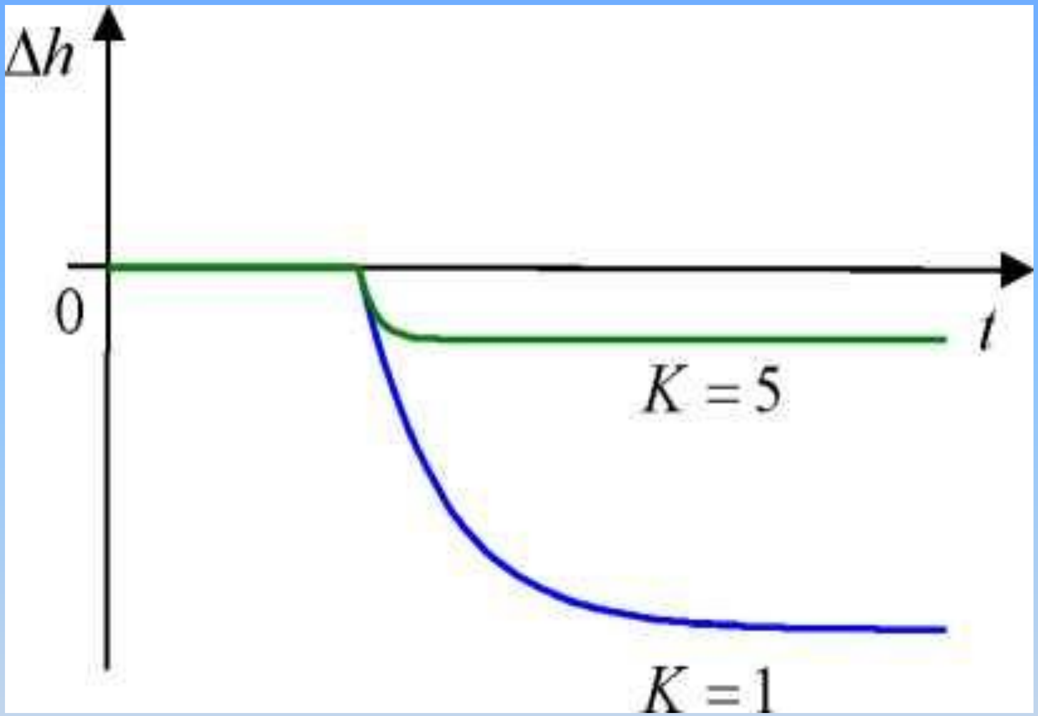
Применим самый простой регулятор – *усилитель* с коэффициентом $K$ (или *пропорциональный регулятор*, *П-регулятор*), который управляет потоком по закону

$$Q(t) = K \cdot e(t) = K \cdot [h_0(t) - h(t)].$$

*


Н
Д
К

Работа этого регулятора при различных значениях коэффициента $K$.



# 2. Передаточная функция

Пусть модель объекта задана линейным дифференциальным уравнением второго порядка, связывающим вход $x(t)$ и выход $y(t)$:

$$b_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t). \quad (18)$$

Применим к левой и правой частям преобразование Лапласа, считая, что все начальные условия нулевые.

Получается *уравнение в изображениях*, связывающее преобразования Лапласа входа $X(p)$ и выхода ) $Y(p)$:

$$b_2 \cdot p^2 Y(p) + b_1 \cdot p\, Y(p) + b_0 \cdot Y(p) = a_1 \cdot p\, X(p) + a_0 \cdot X(p)$$

После преобразований получаем

$$(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) \cdot Y(p) = (a_1 p + a_0) \cdot X(p)\,.$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} X(p) = W(p) \cdot X(p).$$

Здесь

$$W(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}\,. \qquad (30)$$

$W(p)$ – это *передаточная функция* объекта, записанная в виде функции от комплексной переменной $p$ а в (22).

Таким образом, при нулевых начальных условиях *изображение выхода* линейного объекта вычисляется как произведение его *передаточной функции* на *изображение входного сигнала*.

Из (18) следует и другой важный вывод: *передаточная функция* равна отношению *изображений* по Лапласу *выхода* и *входа* при нулевых начальных условиях.