## Лекция 3

1.Системы массового обслуживания (СМО). Основные понятия. Классификация СМО

2.СМО с отказами. Одноканальная система с отказами. Уравнения Колмогорова.

3.Предельные вероятности состояний.

4.Многоканальная система с отказами. Граф состояний. Уравнения Колмогорова.

5.Предельные вероятности состояний для многоканальной СМО. Формулы Эрланга

6.Показатели эффективности СМО с отказами.

### 1.Системы массового обслуживания (СМО). Основные понятия. Классификация СМО

***Некоторые системы предназначены для многократного решения задач одинакового типа. К таким системам можно отнести:***

- ***билетные кассы***
- ***магазины***
- ***ремонтные мастерские***
- ***заправочные станции***
- ***телефонные станции***

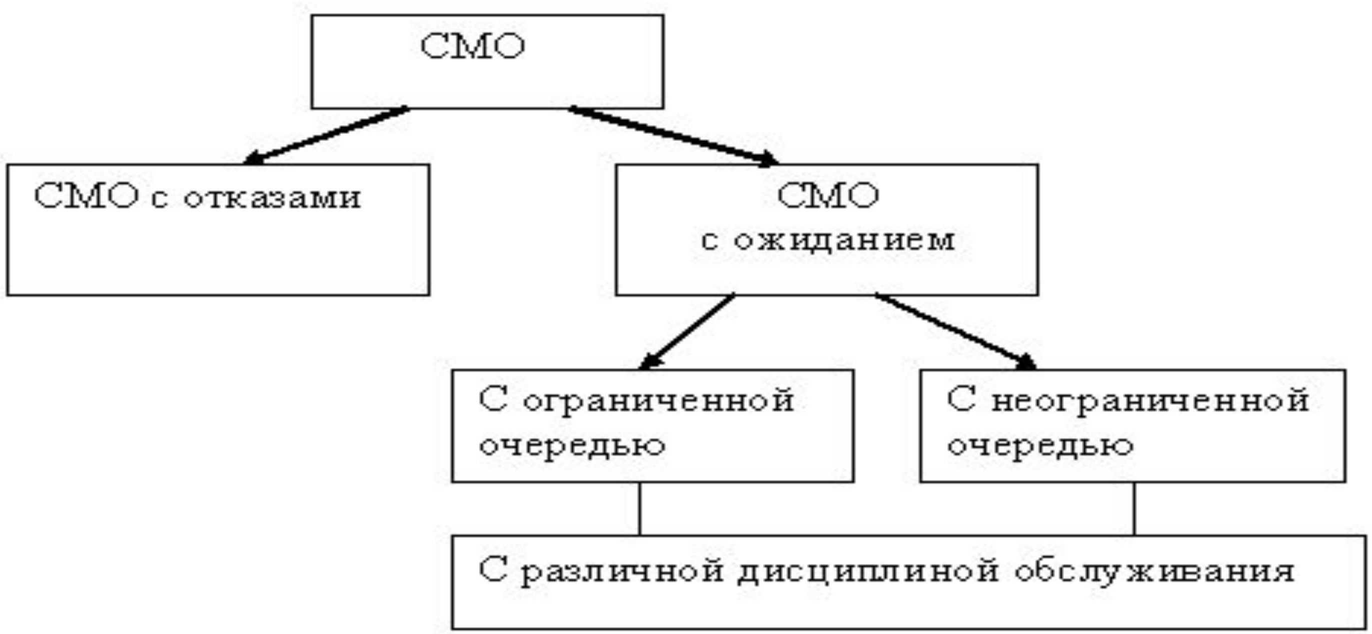
***Возникающие в этих системах процессы называют процессами обслуживания, а системы - системами массового обслуживания.***

Каждая СМО состоит из определенного числа мест обслуживания (рабочие места, кассы, приборы, станции, устройства). Такие единицы обслуживания называют *каналами обслуживания*. По числу каналов обслуживания СМО подразделяют на одноканальные и многоканальные.

Требования на обслуживание (или заявки на обслуживание) поступают в случайные моменты времени и образуют *поток заявок (поток требований).* Время обслуживания одной заявки также случайно. Окончания обслуживаний заявок образуют *поток обслуживаний*.

***Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих условия работы СМО с показателями эффективности.***

***Рассмотрим основную классификацию СМО.***



***В СМО с отказами заявка, пришедшая в систему, когда все каналы заняты, получает отказ и в дальнейшем в обслуживании не принимает участие.***
***В СМО с ожиданием заявка становится в очередь, если в очереди есть свободные места.***

## *2. СМО с отказами. Одноканальная система с отказами. Уравнения Колмогорова*

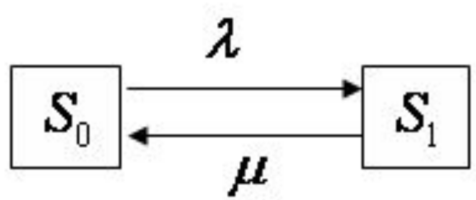
***Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью □. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ .***

***Предполагается, что потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние по стрелкам графа, <u>простейшие</u> с соответствующими интенсивностями.***

***Рассмотрим состояния системы***

***$S_0$ - канал свободен;   $S_1$- канал занят.***

***Граф состояний системы***




***Составим уравнения Колмогорова***

$$\boxed{\frac{dP_0}{dt} = \mu P_1 - \lambda P_0}$$

$$\boxed{\frac{dP_1}{dt} = \lambda P_0 - \mu P_1} \qquad \textbf{\textit{(3.1)}}$$

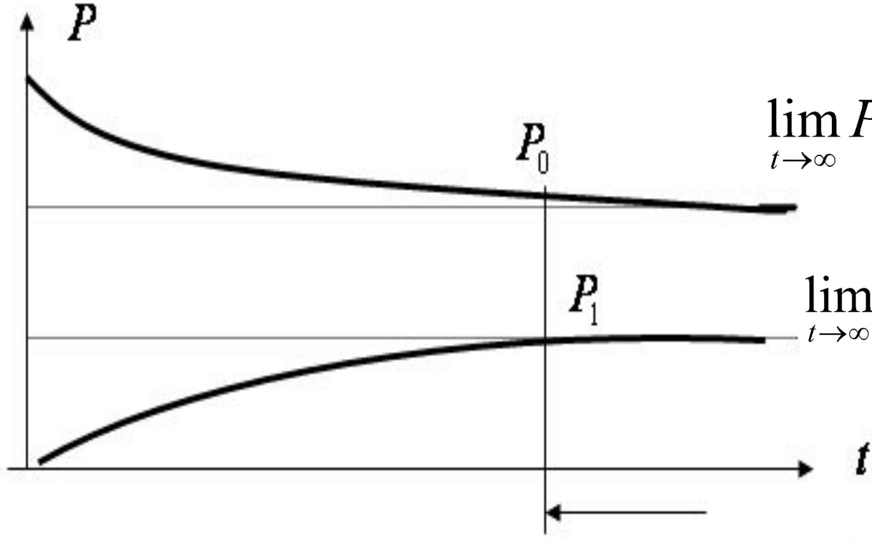
$$\boxed{P_0 + P_1 = 1} \qquad \textbf{\textit{(3.2)}}$$

При дополнительных условиях $\boxed{P_0(0) = 1, \ \ P_1(0) = 0}$

получаем начальную задачу. **Решение начальной задачи имеет вид**

$$\boxed{P_0(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}\left(\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\right)} \qquad \boxed{P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)} \qquad \textbf{\textit{(3.3)}}$$

## 3.Предельные вероятности состояний.




Следует заметить:

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_1(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

,

Это означает, что существуют ***предельные вероятности состояний***

**Замечание. Предельные вероятности можно найти и другим способом. Приравниваем производные к нулю:**

$$\frac{dP_0}{dt} = 0 \qquad \frac{dP_1}{dt} = 0$$

**из (3.1) получаем систему линейных алгебраических уравнений**

$$\boxed{\begin{cases} \mu \cdot P_1 = \lambda \cdot P_0, \\ \lambda \cdot P_0 = \mu \cdot P_1, \\ P_0 + P_1 = 1 \end{cases}}$$

**Решаем эту систему:**

$$\boxed{P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}} \qquad \textbf{(3.4)}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}} \qquad \textbf{(3.5)}$$

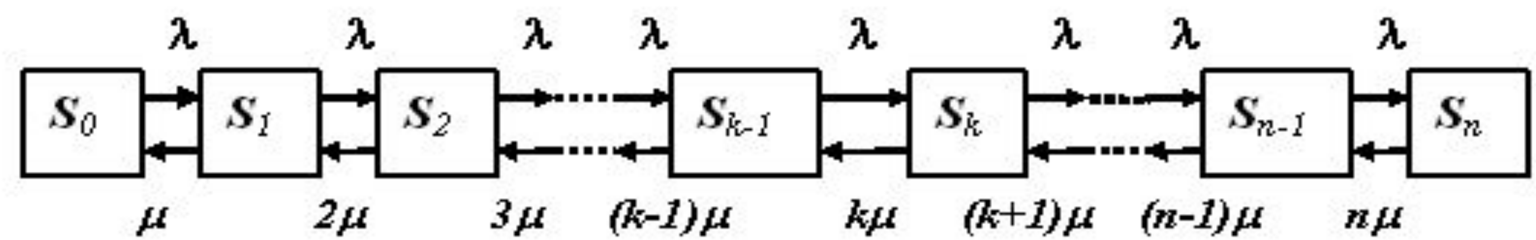
## *4.Многоканальная система с отказами. Граф состояний. Уравнения Колмогорова*

Имеется ***n*** каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью □ ***.***
Поток обслуживаний ***<u>для одного канала</u>*** имеет интенсивность ***μ.***

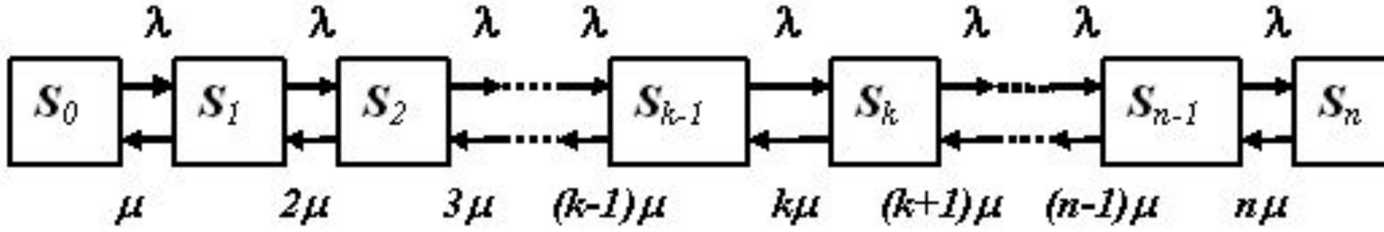
***Потоки заявок и обслуживаний предполагаются простейшими.***

***Рассмотрим возможные состояния системы.***

$S_0$ - **в системе находится *0* заявок ( все каналы свободны);**
$S_1$ - **в системе *одна заявка* (один канал занят);**
$S_2$ - **в системе *две заявки* (два канала заняты);**
**…………………………………………………………**
$S_{k-1}$ - **в системе *k-1 заявка* ( *k-1* каналов заняты);**
$S_k$ - **в системе *k заявок* ( *k* каналов заняты);**
**…………………………………………………………..**
$S_{n-1}$ **- в системе *n-1 заявка* ( *n-1* каналов заняты)**
$S_n$ - **в системе *n заявок* ( *n* каналов заняты).**




Граф состояний системы




**Составляем дифференциальные уравнения**

$$\frac{dP_0}{dt} = \mu P_1 - \lambda P_0$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda P_0 + 2\mu P_2 - (\lambda + \mu) P_1$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \lambda P_1 + 3\mu P_3 - (\lambda + 2\mu) P_2$$

..........................................................

$$\frac{dP_{k-1}}{dt} = \lambda P_{k-2} + k\mu P_k - (\lambda + (k-1)\mu) P_{k-1}$$

$$\frac{dP_k}{dt} = \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} - (\lambda + k\mu) P_k$$

..........................................................

$$\frac{dP_{n-1}}{dt} = \lambda P_{n-2} + n\mu P_n - (\lambda + (n-1)\mu) P_{n-1}$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda P_{n-1} - n\mu P_n$$

**(3.6)**

$$\boxed{P_0(t) + P_1(t) + \ldots + P_n(t) = 1}$$

**(3.7)**

**Записывая начальные условия**

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = \ldots P_n(0) = 0$$

**(3.8)**

**получаем начальную задачу**

## *5.Предельные вероятности состояний. Формулы Эрланга*

Соотношения $\frac{dP_k}{dt} = 0, k = 0,1,\ldots,n$ приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mu P_1 = \lambda P_0$$
$$\lambda P_0 + 2\mu P_2 = (\lambda + \mu) P_1$$
$$\lambda P_1 + 3\mu P_3 = (\lambda + 2\mu) P_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda P_{k-2} + k\mu P_k = (\lambda + (k-1)\mu) P_{k-1}$$
$$\lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} = (\lambda + k\mu) P_k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda P_{n-2} + n\mu P_n = (\lambda + (n-1)\mu) P_{n-1}$$
$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n$$
$$P_0 + P_1 + \ldots + P_n = 1$$

$$\mu P_1 = \lambda P_0$$
$$2\mu P_2 = \lambda P_1$$
$$3\mu P_3 = \lambda P_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k\mu P_k = \lambda P_{k-1}$$
$$(k+1)\mu P_{k+1} = \lambda P_k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\mu P_n = \lambda P_{n-1}$$
$$\boxed{\lambda P_{n-1} = n\mu P_n}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$
$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$$
$$P_3 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} P_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0$$
$$P_{k+1} = \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!\mu^{k+1}} P_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0$$

.

**Пусть** $\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{\mu}}$ ***среднее число пришедших заявок за среднее время обслуживания одной заявки.*** Тогда формулы для предельных вероятностей имеют вид

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_k + \ldots + P_{n-1} + P_n = 1$$

$$P_0 + \alpha P_0 + \frac{\alpha^2}{2!} P_0 + \ldots + \frac{\alpha^k}{k!} P_0 + \ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} P_0 + \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = 1$$

$$P_0 \left( 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^k}{k!} + \ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{n!} \right) = 1$$

$$P_0 \sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!} = 1 \qquad\qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!}}$$

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!}}} \quad \textbf{(3.9)}$$

$$\boxed{P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{s=0}^{n} \frac{\alpha^s}{s!}}} \quad \textbf{(3.10)}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

### 6.Показатели эффективности СМО с отказами

1.***Вероятность отказа (СМО)***, т.е. вероятность того, что заявка не будет обслужена. Это произойдет, если все каналов будут заняты (в СМО будет n заявок):

$$\boxed{P_{\text{отк.}} = P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0} \quad \textbf{(3.11)}$$

2.***Относительная пропускная способность СМО*** – средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой. Эта величина есть вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена:

$$\boxed{q = 1 - P_{\text{отк.}} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} P_0} \quad \textbf{(3.12)}$$

3.***Абсолютной пропускной способностью СМО*** называют среднее количество заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$Q = \lambda \cdot q$$

$$\boxed{Q = \lambda \cdot \left( 1 - \frac{\alpha^n}{n!} P_0 \right)} \qquad \textbf{(3.13)}$$

## 4.Среднее число занятых каналов

**Пусть** $K -$ **число занятых каналов**

| $K$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\dots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $\dots$ | $P_n$ |

(дискретная случайная величина)

$$\bar{k} = M(K) = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \ldots + n \cdot P_n$$

$$\boxed{\bar{k} = \sum_{m=0}^{n} m \cdot P_m} \qquad \textbf{(3.14)}$$

***Замечание***. Эту величину можно найти и другим способом

$$\bar{k} \cdot \mu = Q \qquad \boxed{\bar{k} = \frac{Q}{\mu}}$$

## 5.Среднее время пребывания заявки в СМО

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\mu} \qquad \bar{\tau} = M(\tau) = \frac{1}{\mu}$$