Тема: ***Несобственные интегралы***

Несобственные интегралы

Для существования $\int_a^b f(x)dx$ необходимы условия:

1) $[a;b]$ – конечен,

2) $f(x)$ – ограничена (необходимое условие существования определенного интеграла).

Несобственные интегралы – обобщение понятия определенного интеграла на случай когда одно из этих условий не выполнено.

1. Несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.

$\Rightarrow$ $y = f(x)$ непрерывна на $\forall\,[a;b]$, где $b \geq a$.

$\Rightarrow$ существует $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Имеем: $\int\limits_a^b f(x)dx = I(b)$, $D(I) = [a;+\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом I рода*** *от функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ называется предел функции $I(b)$ при $b \to +\infty$.*

Обозначают: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

Таким образом, по определению

$$(1)\qquad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

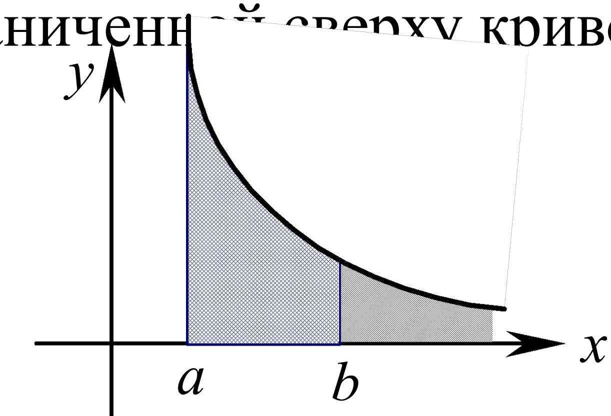
Если $y = f(x)$ непрерывна на $(-\infty;b]$, то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** I *рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $(-\infty;b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов I рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;+\infty)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



⇒ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;+\infty)$ сходится и равен S, то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямой $x = a$ (криволинейная трапеция с бесконечным основанием) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы I рода переносятся некоторые свойства определенных интегралов.

Кроме того, для несобственных интегралов существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;+\infty)$.

Тогда $\forall b \in [a;+\infty)$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\big(F(b)-F(a)\big)$$

(3)

$$\Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

Обозначим $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

Тогда (3) примет вид:

(4) $$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x)-F(a).$$

Формулу (4) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов по промежутку $[a;+\infty)$.

Аналогично для несобственных интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ доказывается справедливость формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b)-\lim_{x\to-\infty} F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$;

2) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} dx$; $(a > 0)$

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4 + x^2}$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x} dx$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x} dx$.

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}$.

3. Несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +(-)\infty$

$\Rightarrow$ $y = f(x)$ непрерывна на $\forall\,[a;b_1]$, где $a \le b_1 < b$.

$\Rightarrow$ существует $\displaystyle\int_a^{b_1} f(x)dx$

Имеем: $\displaystyle\int_a^{b_1} f(x)dx = I(b_1)$, $D(I) = [a;b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом II рода*** *по промежутку $[a;b]$ от функции $f(x)$, неограниченной в точке b, называется предел функции $I(b_1)$ при $b_1 \to b-0$* .

Обозначают: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

Таким образом, по определению

$$(5)\qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx$$

При этом, если предел в правой части формулы (5) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

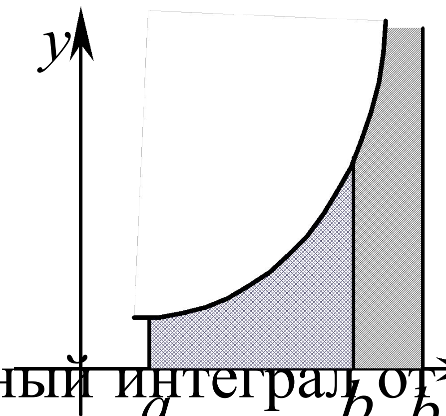
Если $y = f(x)$ непрерывна на $(a;b]$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +(-)\infty$, то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** *II рода* ***по промежутку*** $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, ***неограниченной в точке a*** **:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов II рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b)$.

Тогда $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b_1]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;b]$ сходится и равен S , то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (неограниченная криволинейная трапеция) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.