# Лекция

## Тема: «Несобственные интегралы»

«

# Из студенческого фольклора



- Студента после первой сессии спрашивают:
  - У вас в программе интегралы были?
  Студент, задумываясь, чешет голову, потом отвечает:
  - Да, были какие-то, но... не определенные.

# Давайте вспомним!

- 1) неопределённый интеграл – это **множество первообразных функций**

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- 2) определённый интеграл – это **число** (например, площадь криволинейной трапеции)

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- 3) Отрезок интегрирования $[a;b]$ **КОНЕЧЕН**

Подынтегральная функция $f(x)$ **НЕПРЕРЫВНА** на отрезке интегрирования

# План

**1. *Несобственные интегралы I рода***

- *определение*
- *геометрическая интерпретация*
- *вычисление*

**2. *Признаки сходимости несобственных интегралов I рода***

**3. *Несобственные интегралы II рода***

- *определение*
- *геометрическая интерпретация*
- *вычисление*
- ***признаки сходимости***

## Задачи, приводящие к несобственным интегралам, рассматривались в геометрической форме

**Э. Торричелли и П. Ферма**

**в 1644.**




# Точные определения Несобственных интегралов даны О. *Коши* в 1823.



# Несобственные интегралы I рода



**<u>Определение 1:</u> несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $[a,+\infty)$**

**называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$**

**то есть** $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

**Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся***

**<u>Определение 2:</u> несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $(-\infty;b]$**

**называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $a \to -\infty$**

**то есть** $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

**Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся***

- Если функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, то может существовать ***несобственный интеграл данной функции с двумя бесконечными пределами интегрирования***, определяющийся формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

- где с — произвольное число.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

# ЗАМЕЧАНИЕ



- ***Несобственный интеграл***

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

***называют сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства, и расходящимся, если не существует хотя бы один из них***

# Несобственные интегралы (или интегралы Римана) I рода - это интегралы с бесконечными пределами интегрирования

$$I = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

# Вычисление несобственных интегралов



$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

# Примеры.
# Исследовать на сходимость интегралы:

**1)** $$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b =$$

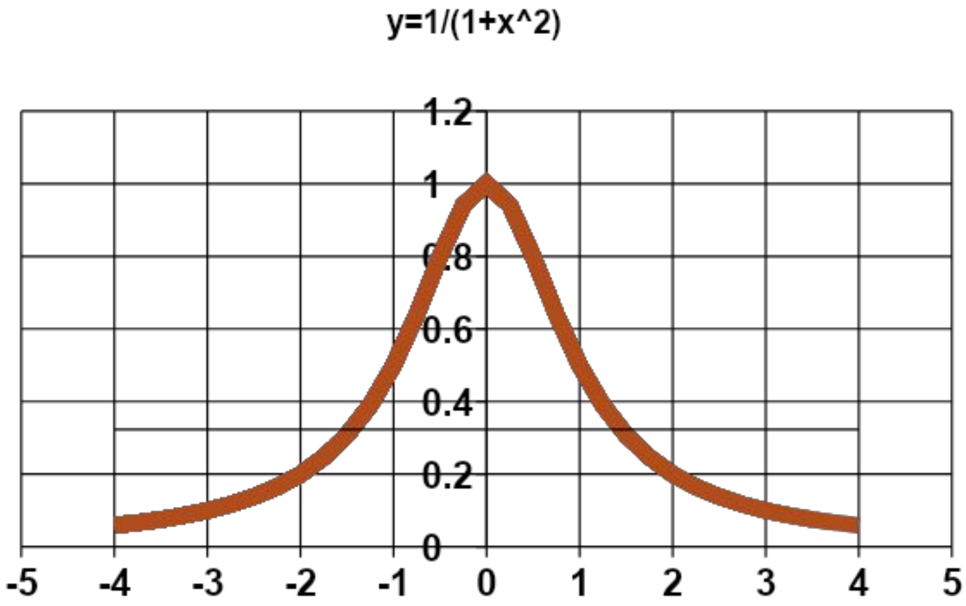
$$= -\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} - \frac{1}{e^0}\right) = 1$$

**Ответ:** несобственный интеграл сходится и равен 1(или сходится к 1)

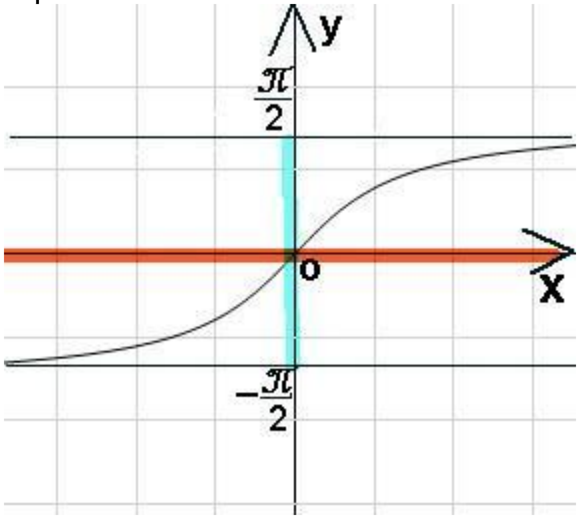
2) $$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}(\ln x)\Big|_{1}^{\infty}=\infty$$

**Ответ:** несобственный интеграл стремится к бесконечности или расходится

**3)**




$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}(arctgx)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$



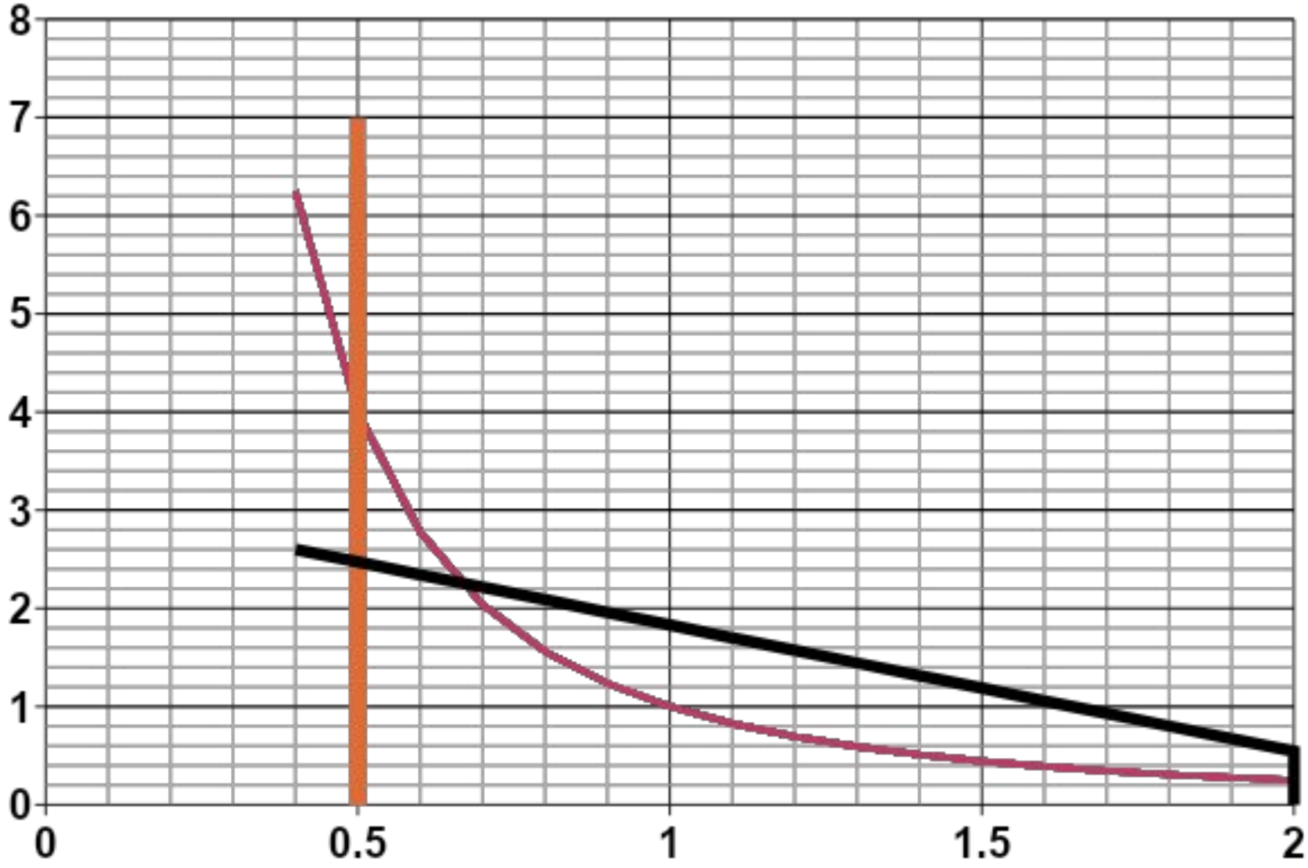
# Геометрический смысл несобственного интеграла I рода



- Несобственный интеграл выражает площадь БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Например, $$\int_{0,5}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$



# Вычислим эту площадь:

- По определению получаем:

$$\int_{0,5}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0,5}^{b}\frac{dx}{x^2}$$

1) вычислим интеграл

$$\int_{0,5}^{b}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{0,5}^{b}=\frac{1}{x}\Big|_{b}^{0,5}=2-\frac{1}{b}$$

**2)** Вычислим предел

$$\lim_{b\to+\infty}\left(2-\frac{1}{b}\right)=2$$

Ответ: несобственный интеграл $\int\limits_{0,5}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=2$

т.е. сходится.

Площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции равна 2

# *Признаки сходимости несобственных интегралов I рода*



- Вопрос о сходимости несобственных интегралов усложняется, если первообразная функция неизвестна.
- В таких случаях иногда удается решить вопрос о сходимости, используя специальные **признаки,** которые не требуют знания первообразной

**Признак сравнения 1.**

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ во всех точках интервала $[a,+\infty)$ неотрицательна: $f(x) \geq 0$

и для всех значений $x$

выполняется неравенство: $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$

Тогда:

1)если сходиться интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, то сходится и

интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

2)если расходиться интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и

интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$

# Пример

Решить вопрос о сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

***Решение***

Так как при $x > 0$ $e^{-x^2} < e^{-x}$ и интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Подынтегральная функция чётная, поэтому сходится и

интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$

Таким образом, заданный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится.

27.11.2014

***Замечание***

1. ***Интеграл*** $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$ ***называется интегралом***

***Пуассона и играет очень большую роль в теории вероятностей.***

***2. Сформулированный признак сравнения относится только к функциям, сохраняющим один и тот же знак в бесконечном интервале интегрирования***

# Исследование интегралов от функций, не сохраняющих постоянный знак, например таких, как

$$\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{1+x^2}$$

**<u>Признак сравнения 2.</u>**

**Если сходиться интеграл** $\int\limits_a^{-\infty} |f(x)| dx$ **- интеграл от**

**абсолютной величины функции** $f(x)$

**то сходится и интеграл** $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$

**При этом интеграл** $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ **называется** ***абсолютно***

***сходящимся***

# Замечание

1) Если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$, то абсолютно

сходятся и интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x dx$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x dx$

так как модули подынтегральных функций не превосходят $|f(x)|$

2) Если интеграл от $|f(x)|$ расходится, то об интеграле от $f(x)$ на одном этом основании ещё ничего нельзя сказать: он может расходиться, а может и сходиться.

В последнем случае говорят, что $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ ***сходится условно***

# Пример

- Интеграл Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ **сходится**, а интеграл $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ (от модуля подынтегральной функции) **расходится.**

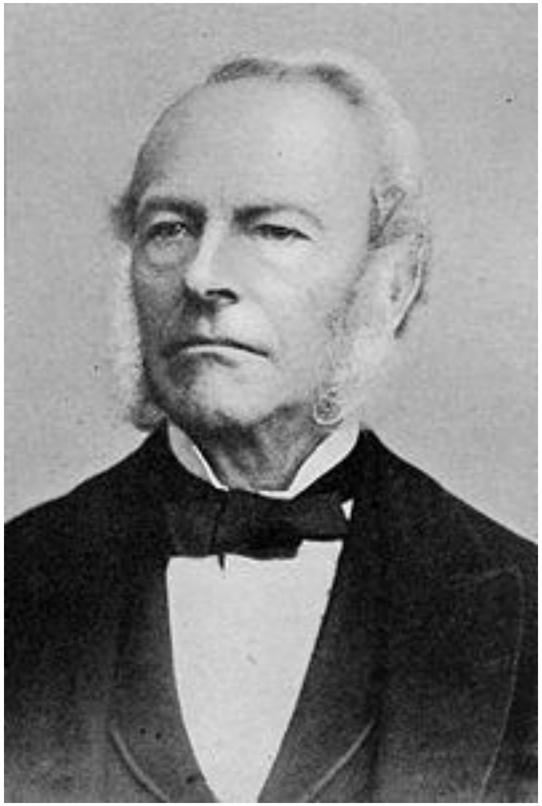
Следовательно, интеграл Дирихле **сходится условно.**

Его величина вычислена специальными приёмами равна:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

## Различие условно и абсолютно сходящихся несобственных интегралов установлено Дж. Стоксом и П. Г. Л. Дирихле *в* 1854 г.





# Несобственные интегралы II рода

**Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x=b$**

**Определение 1:** **несобственным интегралом от функции $f(x)$ непрерывной в интервале $[a;b)$ и неограниченной при $x \to b$**

**называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$**

**Записывают это так:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \varepsilon > 0$$

**Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся***

Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = a$

Определение 2: несобственным интегралом от функции $f(x)$ непрерывной в интервале $(a;b]$ и неограниченной при $x \to a$

называется предел интеграла $\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$ при $\delta \to 0$

Записывают это так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx, \delta > 0$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*

27.11.2014

## Замечание

- Если первообразная функция $F(x)$ известна, то в обоих случаях можно записать, что

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Где $F(b) = \lim\limits_{x \to b} F(x)$ (или $F(a) = \lim\limits_{x \to a} F(x)$) - предел, к которому стремится первообразная $F(x)$ при $x \to b$ (или при $x \to a$)

Если этот предел **не существует, то интеграл расходится**

# Точка разрыва функции находится внутри отрезка интегрирования

- **Определение 3**. Несобственным интегралом от функции $f(x)$, имеющей разрыв во внутренней точке $x = c$ отрезка интегрирования $[a;b]$, называется интеграл

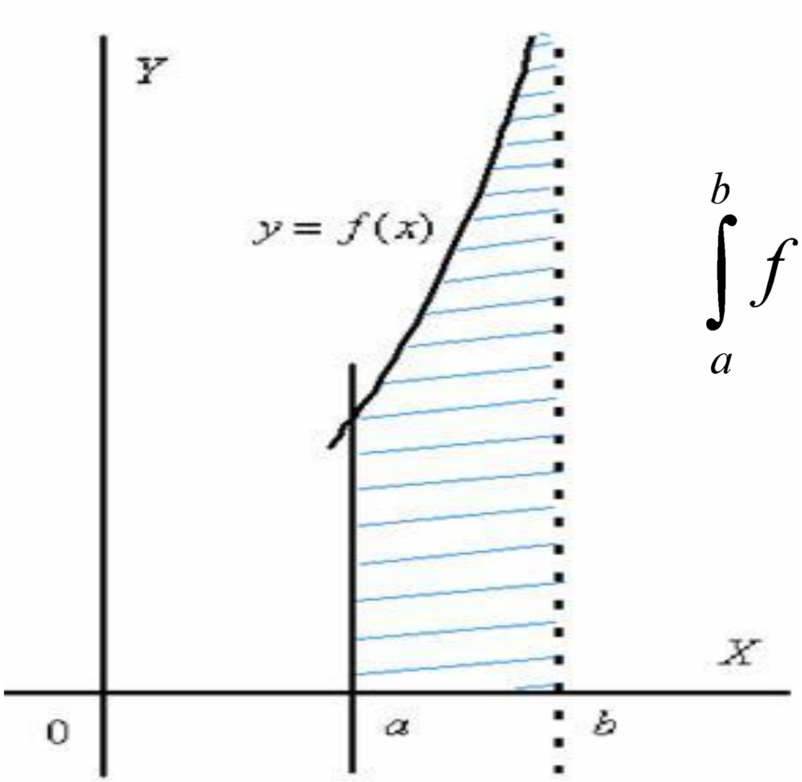
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

# Геометрический смысл несобственных интегралов II рода



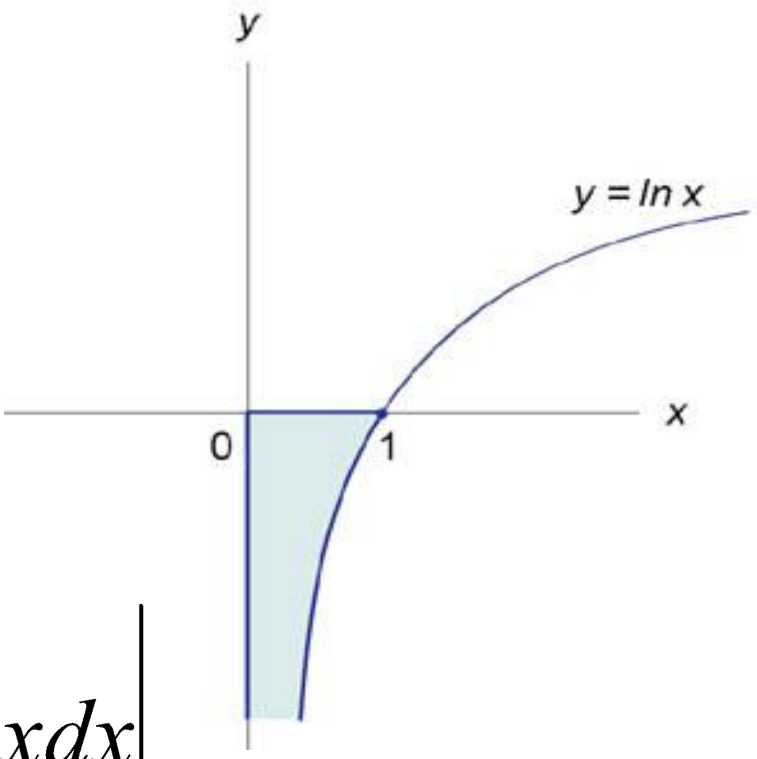
Несобственный интеграл, если он существует, выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции




$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \varepsilon > 0$$

# Пример

Найти площадь под кривой $y = \ln x$ в интервале от $x = 0$ до $x = 1$




$$S = \left| \int_0^1 \ln x dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \ln x dx \right|$$

# Решение

$$\int_a^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_a^1 = F(1) - F(a),$$

$$где \quad F(1) = (1\cdot \ln 1 - 1) = -1,$$

$$F(a) = \lim_{a\to 0}(a\ln a - a) = \lim_{a\to 0}(a\ln a) = [0\cdot\infty]$$

- Преобразуем неопределённость вида $[0\cdot\infty]$

$$\lim_{a\to 0}(a\ln a) = [0\cdot\infty] = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln a}{\frac{1}{a}}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

- Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln a}{\frac{1}{a}}\right) = \lim_{a\to 0}\frac{(\ln a)'}{\left(\frac{1}{a}\right)'} = \lim_{a\to 0}\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a\to 0}(-a) = 0$$

- Ответ: искомая площадь равна $S = |-1| = 1(ед.пл.)$

# Замечание



- **Признаки сходимости интегралов от функций с бесконечными разрывами подобны признакам сходимости несобственных интегралов I рода**

# Дополнение



1. На несобственные интегралы без всяких изменений переносятся простейшие свойства определённых интегралов

2. Основные приемы вычисления **несобственных интегралов:**

- дифференцирование и интегрирование по параметру,
- разложение в ряды,
- применение теории вычетов.

## 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Несобственные интегралы** имеют большое значение во многих областях математического анализа и его приложений.

- В теории специальных функций (цилиндрических функций, ортогональных многочленов и др.) одним из основных способов изучения является изображение функций в виде **несобственных интегралов**, зависящих от параметра, например, гамма-функция

- К **несобственным интегралам** относится и ***интеграл Фурье***, а также интегралы, встречающиеся в др. интегральных преобразованиях.
- Решения *краевых задач* математической физики записываются кратными **несобственными интегралами** с неограниченной подынтегральной функцией.
- В **теории вероятностей** большое значение имеет **несобственный интеграл Пуассона**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \pi$$

- В **теории дифракции** света используется н**есобственный интеграл**

$$\int_{0}^{+\infty} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Повторим ?**

**Классификация интегралов (дополнение)**

- *ОПРЕДЕЛЕННЫЕ* — интегралы, к которым есть ответ, и *НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ* — к которым ответа нет.
- *СОБСТВЕННЫЕ* — интегралы, которые сам взял, и *НЕСОБСТВЕННЫЕ* — которые списал.
- *СХОДЯЩИЕСЯ* — интегралы, которые сходятся с ответом, и *РАСХОДЯЩИЕСЯ* — которые не сходятся.