10. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

10.1. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке *X* и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$

Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

Где $\alpha(\Delta x)$ **- бесконечно малая величина при** $\Delta x \to 0$

Следовательно,

$$\Delta y = \underline{f'(x) \cdot \Delta x} + \underline{\underline{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}}$$

Таким образом, приращение функции Δy

состоит из двух слагаемых:

1. линейного относительно Δx

2. нелинейного, являющегося бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем Δx

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Пример.

Найти приращение и дифференциал функции

$$y = 2x^2 - 3x$$

при x=10 и Δx=0.1

Решение:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$$

$$= 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - 2x^2 - 3x =$$

$$= (4x + 2\Delta x - 3)\cdot \Delta x$$

$$dy = f'(x)\cdot \Delta x = 4x\cdot \Delta x - 3\Delta x$$

при x=10 и Δx=0.1

$$\Delta y = 3.72 \qquad dy = 3.7$$

Пример.

Найти дифференциал функции

$$y = x$$

Решение:

$$dy = dx = f'(x) \cdot \Delta x = x' \cdot \Delta x = \Delta x$$

Следовательно, дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной:

$$\Delta x = dx$$