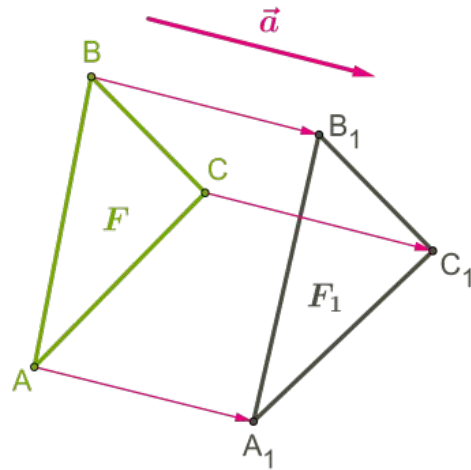




Параллельный перенос

Параллельный перенос

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x; y; z)$ фигуры F переходит в точку $(x+a; y+b; z+c)$, где a, b, c – постоянные. Параллельный перенос в пространстве задаётся формулами $x_1=x+a, y_1=y+b, z_1=z+c$.



Свойства параллельного переноса

Сформулируем некоторые свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос есть движение.

2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

3. При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

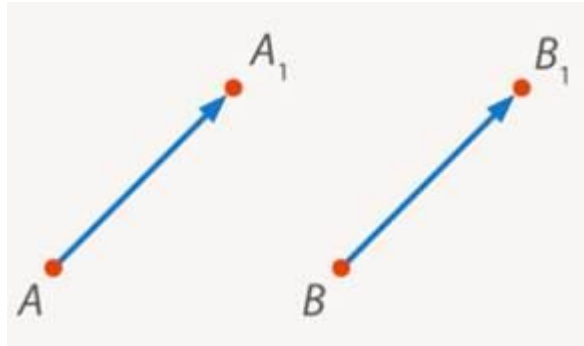
4. Каковы бы ни были две точки A и A_1 , существует, и притом единственный, параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A_1 .

5. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Параллельный перенос является движением

Докажем, что параллельный перенос является движением. При параллельном переносе на вектор \vec{p}

Любые две точки A и B переходят в точки A_1 и B_1 . Требуется доказать, что $A_1B_1 = AB$



Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB_1}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$ (Рис. 12) или $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$ (Рис. 13)

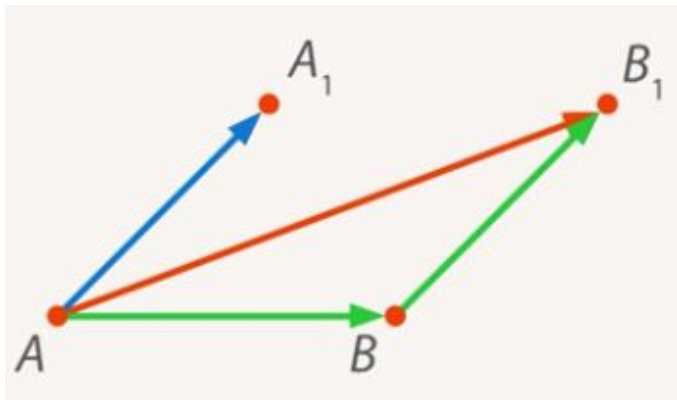


Рис. 1.

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$$

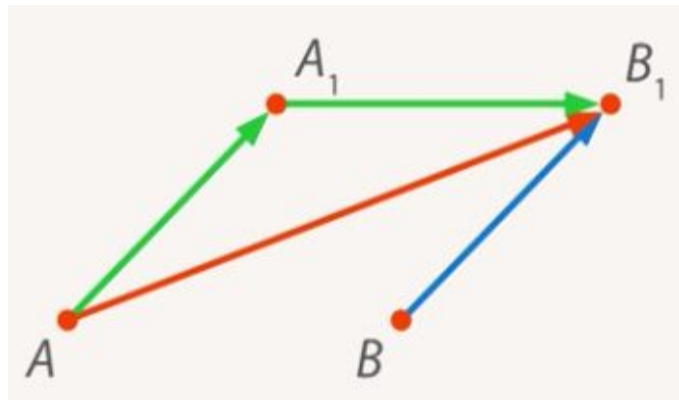


Рис. 2.

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$$

Так как $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{p}$, значит $A_1B_1 = AB$.

Мы доказали, что при параллельном переносе расстояние между точками сохраняется, значит, параллельный перенос является движением.

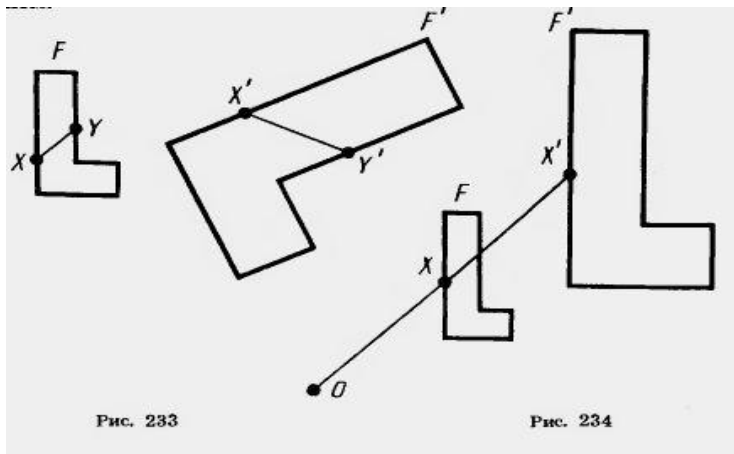


Преобразования подобия

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз (рис. 233). Это значит, что если произвольные точки X, Y фигуры F при преобразовании подобия переходят в точки X', Y' фигуры F' , то $X'Y' = k \cdot XY$, причем число k — одно и то же для всех точек X, Y . Число k называется коэффициентом подобия. При $k = 1$ преобразование подобия, очевидно, является движением.

Пусть F — данная фигура и O — фиксированная точка (рис. 234). Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX' , равный $k \cdot OX$, где k — положительное число.

Преобразование фигуры F , при котором каждая ее точка X переходит в точку X' , построенную указанным способом, называется гомотетией относительно центра O . Число k называется коэффициентом гомотетии, фигуры F и F' называются гомотетичными.



Гомотетия - есть преобразования подобия.

Доказательство. Пусть O — центр гомотетии, k — [коэффициент](#) гомотетии, X и Y — две произвольные точки фигуры (рис. 235).

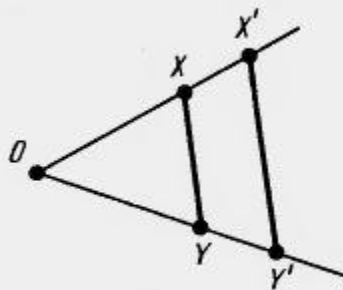


Рис. 235

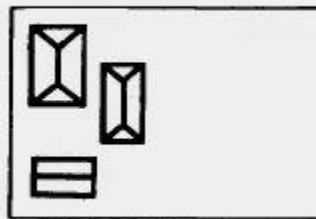


Рис. 236

При гомотетии точки X к Y переходят в точки X' и Y' на лучах OX и OY соответственно, причем $OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$. Отсюда следуют векторные равенства $\overline{OX'} = k\overline{OX}$, $\overline{OY'} = k\overline{OY}$.

Вычитая эти равенства почленно, получим:

$$\overline{OY'} - \overline{OX'} = k(\overline{OY} - \overline{OX}).$$

Так как $\overline{OY'} - \overline{OX'} = \overline{X'Y'}$, $\overline{OY} - \overline{OX} = \overline{XY}$, то $\overline{X'Y'} = k \overline{XY}$.

Значит, $|\overline{X'Y'}| = k |\overline{XY}|$, т. е. $X'Y' = kXY$. Следовательно, гомотетия есть преобразование подобия. Теорема доказана.



Конец.