Типичные законы распределения вероятностей. Нормальное распределение. Показательное распределение. Равномерное распределение. Их числовые характеристики

КАЛАБУХОВА Галина Валентиновна
к.социол.н., доцент

Вопросы темы

- Типичные законы распределения вероятностей
- Нормальное распределение. Числовые характеристики
- Показательное распределение. Числовые характеристики
- Равномерное распределение. Числовые характеристики
- Функция надежности. Показательный закон надежности

Типичные законы распределения вероятностей

Характеристики дискретной случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины *X* называется соответствие между каждым ее возможным значением x_1 и вероятностью ее появления p_1

Функцией распределения вероятностей дискретной случайной величины X называется функция *F(X)*, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньшее x:

$$F(x)=P(X<x).$$

Свойства функции распределения

1. F(x) определена при x (-∞; +∞)
2. $0 \le F(x) \le 1$, причем $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$
3. F(x) – неубывающая функция на (-∞; +∞)
4. F(x) – непрерывная функция слева в точках $x=x_k$ (k=1, 2, …) и непрерывная во всех остальных точках
5. Для дискретной случайной величины X, заданной таблицей, функция F(x) определяется формулой:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \text{если}\ x \le x_1, \\ p_1,\ \text{если}\ x_1 < x \le x_2, \\ p_1+p_2\ \text{при}\ x_2 < x \le x_3 \\ \dots \\ 1,\ \text{если}\ x > x_n. \end{cases}$$

Характеристики непрерывной случайной величины

Законом распределения непрерывной случайной величины *X* называется соответствие между каждым ее возможным значением x_1 и вероятностью ее появления p_1

Функцией распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция F(X), равная при каждом $x \in R$ вероятности того, что X в результате испытания примет значение, меньшее x:

$$F(x)=P(X<x),\ x \in R.$$

Характеристики непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция f(X), задаваемая равенством:

$$f(x)=F'(x),\ x \in R.$$

Свойства плотности распределения случайной величины

$$f(x) \geq 0 \text{ для любого } x \in R$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Числовые характеристики случайных величин

ХАРАКТЕРИСТИКА	ДСВ	НСВ
Математическое ожидание	$M(X)=\sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$	$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$
Дисперсия	$D(X)=\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i-(M(X))^2$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$	$\sigma(X)=+\sqrt{D(X)}$

Пример.
Определение вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Если случайная величина *X* задана плотностью распределения *f*(x), то вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (α,β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Нормальное распределение. Числовые характеристики

Определение

Нормальным называется распределение вероятностей таких непрерывных случайных величин, у которых плотность распределения вероятностей задается формулой:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m, σ – некоторые числа и σ>0.

Функция распределения вероятностей вычисляется по формуле:

$$F(x)=\Phi(\frac{x-m}{\sigma})+\frac{1}{2}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа

Числовые характеристики нормального распределения

ХАРАКТЕРИСТИКА	НСВ
Математическое ожидание	$M(X) = m$
Дисперсия	$D(X) = \sigma^2$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X) = \sigma$

Пример.
Определение вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Если случайная величина *X* задана плотностью распределения *f*(x), то вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (α,β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Пример.

Определение вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Если случайная величина *X* задана плотностью распределения *f*(x), то вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (α,β):

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Для случая нормального распределения

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

Значения функции Лапласа Ф(X) определяются из таблиц

Пример.

Случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность, того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50)

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

По условию задачи: α =10, β=50, *a* = 30, σ =10.

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

По условию задачи: α =10, β=50, *a* = 30, σ =10.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) = \Phi(\frac{50 - 30}{10}) - \Phi(\frac{10 - 30}{10})$$

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

По условию задачи: α =10, β=50, a = 30, σ =10.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) = \Phi(\frac{50 - 30}{10}) - \Phi(\frac{10 - 30}{10}) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

По условию задачи: α =10, β=50, *a* = 30, σ =10.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) = \Phi(\frac{50 - 30}{10}) - \Phi(\frac{10 - 30}{10}) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2)$$

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

По условию задачи: α =10, β=50, *a* = 30, σ =10.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) = \Phi(\frac{50-30}{10}) - \Phi(\frac{10-30}{10}) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}4772$$

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

По условию задачи: α =10, β=50, *a* = 30, σ =10.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) = \Phi(\frac{50 - 30}{10}) - \Phi(\frac{10 - 30}{10}) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$$

Ответ

Вероятность того, что случайная величина *X, распределенная по нормальному закону,* примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50), ≈0,9544

Пример.
Определение вероятности заданного отклонения

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ:

Пример.
Определение вероятности заданного отклонения

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины *X* по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ.

Для нормального закона распределения вероятностей:

$$P(|X-a|<\delta)=P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right]-\Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right]=$$

$$=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\cdot\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$$

Значение функции Лапласа Ф(Х) определяется с помощью таблиц

Пример.

Случайная величина *X* распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение *X* соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше 3

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot \Phi(\frac{\delta}{\sigma})$$

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(|X-a|<\delta)=2\cdot\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

По условию задачи: δ = 3, *a*=20, σ=10

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(|X-a|<\delta)=2\cdot\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$$

По условию задачи: δ = 3, *a*=20, σ=10

$$P(|X-20|<3)=2\cdot\Phi(\frac{\delta}{\sigma})=2\cdot\Phi(\frac{3}{10})$$

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(|X-a|<\delta)=2\cdot\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$$

По условию задачи: δ = 3, a=20, σ=10

$$P(|X-20|<3)=2\cdot\Phi(\frac{\delta}{\sigma})=2\cdot\Phi(\frac{3}{10})\approx 2\cdot 0{,}1179$$

Решение

Для решения воспользуемся формулой

$$P(|X-a|<\delta)=2\cdot\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$$

По условию задачи: δ = 3, *a*=20, σ=10

$$P(|X-20|<3)=2\cdot\Phi(\frac{\delta}{\sigma})=2\cdot\Phi(\frac{3}{10})\approx 2\cdot 0{,}1179=0{,}2358$$

Ответ

Вероятность того, что среднее значение случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, может иметь отклонение по абсолютной величине, меньшее 3, составляет 0,2358

Показательное распределение. Числовые характеристики

Определение

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывных случайных величин, у которых плотность распределения вероятностей задается формулой:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \textit{при } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \textit{при } x\geq 0\end{cases}$$

где λ – положительное число.

Функция распределения вероятностей вычисляется по формуле:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{при } x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & \textit{при } x\geq 0\end{cases}$$

Числовые характеристики показательного распределения

ХАРАКТЕРИСТИКА	НСВ
Математическое ожидание	$M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$
Дисперсия	$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

Пример

Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 8$

Решение

Плотность распределения вероятности показательного распределения определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при\ x \geq 0 \end{cases}$$

Решение

Плотность распределения вероятности показательного распределения определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при\ x \geq 0 \end{cases}$$

По условию задачи, λ = 8, следовательно можно записать:

Решение

Плотность распределения вероятности показательного распределения определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \ x \geq 0 \end{cases}$$

По условию задачи, λ = 8, следовательно можно записать:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \ x < 0 \\ 8 \cdot e^{-8x}, & при \ x \geq 0 \end{cases}$$

Решение

Функция распределения вероятности показательного распределения определяется формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & при\ x \geq 0 \end{cases}$$

Решение

Функция распределения вероятности показательного распределения определяется формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & при\ x \geq 0 \end{cases}$$

По условию задачи, λ = 8, следовательно можно записать:

Решение

Функция распределения вероятности показательного распределения определяется формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & при\ x \geq 0 \end{cases}$$

По условию задачи, λ = 8, следовательно можно записать:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ 1 - e^{-8x}, & при\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ответ

Плотность распределения и закон распределения вероятности показательного распределения при λ = 8:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x<0\\ 8\cdot e^{-8x}, & при\ x\geq 0\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x<0\\ 1-e^{-8x}, & при\ x\geq 0\end{cases}$$

Пример

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ при } x \geq 0; \ f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,3; 1).

Решение

По определению понятия закона распределения вероятности:

$$P(a<X<b) = F(b) - F(a)$$

Решение

По определению понятия закона распределения вероятности:

$$P(a<X<b) = F(b) — F(a)$$

По условию задачи, известна функция плотности распределения вероятности:

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ при } x \geq 0; \; f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Решение

По определению понятия закона распределения вероятности:

$$P(a<X<b) = F(b) - F(a)$$

По условию задачи, известна функция плотности распределения вероятности:

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ при } x \geq 0; \ f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

По определению, $f(x) = F'(x)$, следовательно

Решение

По определению понятия закона распределения вероятности:

$$P(a<X<b) = F(b) — F(a)$$

По условию задачи, известна функция плотности распределения вероятности:

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ при } x \geq 0; \; f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

По определению, f(x) = F'(x), следовательно

$$F(X) = \int 2e^{-2x} dx$$

Решение

По определению понятия закона распределения вероятности:

$$P(a<X<b) = F(b) — F(a)$$

По условию задачи, известна функция плотности распределения вероятности:

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ при } x \geq 0; \; f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

По определению, f(x) = F'(x), следовательно

$$F(X) = \int 2e^{-2x} dx = -e^{-2x}$$

Решение

Вычислим:

$$P(a<X<b) = F(b) - F(a)$$

для поставленных условий на значения a и b

Решение

Вычислим:

$$P(a<X<b) = F(b) — F(a)$$

для поставленных условий на значения a и b

$P(0,3<X<1) = F(1) — F(0,3) = -e^{-2\cdot 1} + e^{-2\cdot 0,3}$

Решение

Вычислим:

$$P(a<X<b) = F(b) — F(a)$$

для поставленных условий на значения a и b

$P(0,3<X<1) = F(1) — F(0,3) = -e^{-2\cdot 1} + e^{-2\cdot 0,3} = 0,54881—0,13534$

Решение

Вычислим:

$$P(a<X<b) = F(b) — F(a)$$

для поставленных условий на значения a и b

$P(0,3<X<1) = F(1) — F(0,3) = -e^{-2\cdot 1} + e^{-2\cdot 0,3} = 0,54881—0,13534 \approx 0,41$

Ответ

Вероятность того, что в результате испытания *X* попадает в интервал (0,3; 1) составляет ≈0,41.

Равномерное распределение. Числовые характеристики

Определение

Непрерывная случайная величина X, принимающая все свои возможные значения только на отрезке [a, b], называется **равномерно распределенной**, если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & при\ a \le x \le b \\ 0, & при\ x > b \end{cases}$$

Функция распределения вероятностей вычисляется по формуле:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при\ a \le x \le b \\ 1, & при\ x > b \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного распределения

ХАРАКТЕРИСТИКА	НСВ
Математическое ожидание	$M(X)=\dfrac{a+b}{2}$
Дисперсия	$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Функция надежности. Показательный закон надежности

Определение

Функцией надежности $R\ (t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t) = P(T>t).$$

Если функция распределения

$$F\ (t) = P(T<t)$$

определяет ***вероятность отказа за время длительностью t***, то вероятность безотказной работы за это же время длительностью $T > t$, равна

$$R(t) = P(T>t) = 1 - F(t).$$

Определение

Часто длительность времени безотказной работы момента имеет показательное распределение, функция распределения которого определяется формулой:

$$F(t)=1- e^{-\lambda \cdot t}$$

Следовательно, ***функция надежности в случае показательного распределения*** времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\ (t) = 1 — F\ (t) = 1 — (1 - e^{-\lambda \cdot t}) = e^{-\lambda \cdot t}$$

Пример

Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t)=0{,}01\cdot e^{-0{,}01\cdot t}$ $(t>0)$, где t — время, ч. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\,(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\ (t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

По условию задачи, $f(t)=0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\ (t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

По условию задачи, $f(t)=0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$, т.е. $\lambda = 0{,}01$

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\,(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

По условию задачи, $f(t)=0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$, т.е. $\lambda = 0{,}01$

По условию задачи, $t = 100$

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\ (t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

По условию задачи, $f(t)=0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$, т.е. $\lambda = 0{,}01$

По условию задачи, $t = 100$

Следовательно,

$R\ (t) = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow$

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\,(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

По условию задачи, $f(t)=0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$, т.е. $\lambda = 0{,}001$

По условию задачи, $t = 100$

Следовательно,

$$R\,(t) = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow R(100) = e^{-0{,}01 \cdot 100} =$$

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\ (t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

По условию задачи, $f(t)=0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$, т.е. $\lambda = 0{,}001$

По условию задачи, $t = 100$

Следовательно,

$$R\ (t) = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow R(100) = e^{-0{,}01 \cdot 100} = e^{-1} =$$

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\,(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

По условию задачи, $f(t)=0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$, т.е. $\lambda = 0{,}001$

По условию задачи, $t = 100$

Следовательно,

$R\,(t) = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow R(100) = e^{-0{,}01 \cdot 100} = e^{-1} \approx 1/2{,}71828 =$

Решение

В соответствии с определением, функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид:

$$R\ (t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

По условию задачи, $f(t) = 0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$, т.е. $\lambda = 0{,}001$

По условию задачи, $t = 100$

Следовательно,

$$R\ (t) = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow R(100) = e^{-0{,}01 \cdot 100} = e^{-1} \approx 1/2{,}71828 \approx 0{,}37$$

Ответ

Вероятность того, что время безотказной работы элемента составит 100 часов приблизительно равно 0,37