



## Лекция 4.

# РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

*Теория – это некоторым образом  
квинтэссенция практики.*

**Людвиг Больцман**





**Людвиг Больцман**  
**1844-1906, Вена-Линц-Грац-Вена-**  
**Лейпциг-Мюнхен-Вена-Дуино**



Ludwig Boltzmann

geb. 1844 gest. 1906

Professor der Mathematik

1872 - 1873

Professor der Theoretischen Physik

1896 - 1897 - 1902 - 1906

## *На предыдущей лекции*

- Была доказана самая важная теорема статике, универсально решающая первую ее задачу
- Были установлены условия равновесия и выведены уравнения равновесия
- Введено понятие главного момента и главного вектора системы сил

- Было показано, что для плоской системы сил (все силы находятся в плоскости  $Oxy$ ) имеем три уравнения равновесия. Эти уравнения можно использовать в трех разных формах

## Основная форма уравнений равновесия ПСС

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0$$

## Вторая форма уравнений равновесия ПСС ( $AB \perp Ox$ )

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

## Третья форма уравнений равновесия ПСС (точки $A, B, C$ не должны лежать на одной прямой)

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_C(F_i) = 0$$

## *Цель лекции*

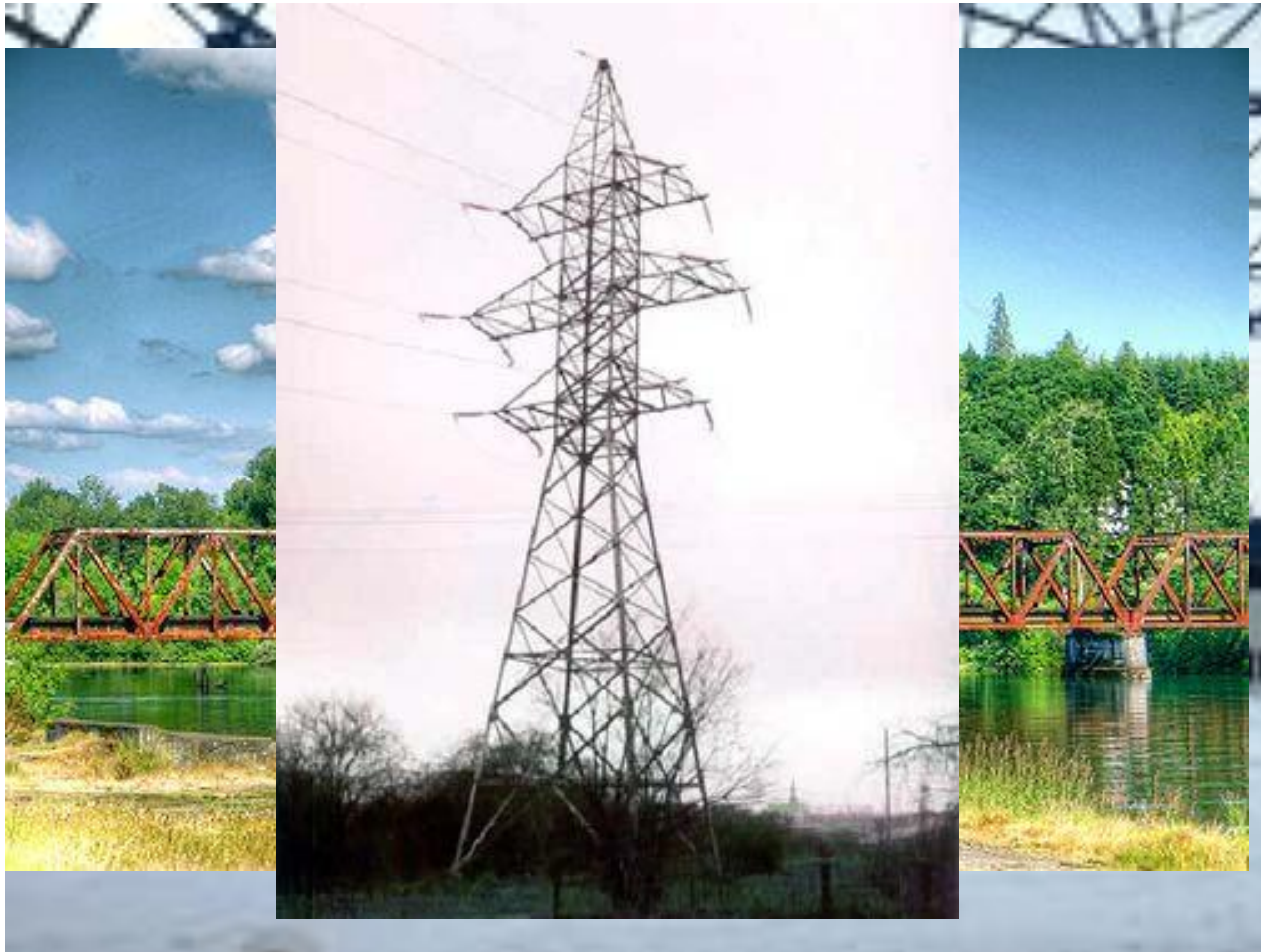
- *Расчет плоской фермы*
- *Расчет составной конструкции*

## *План лекции*

- 4.1. **Определение плоской фермы**
- 4.2. **Расчет плоской фермы**
- 4.3. **Расчет составных конструкций**
  - 4.3.1. **Двухсоставная рама**
  - 4.3.2. **Стержневая конструкция**
- 4.4. **Заключение**

# 4.1. Плоская ферма

## 4.1.1. Мотивация

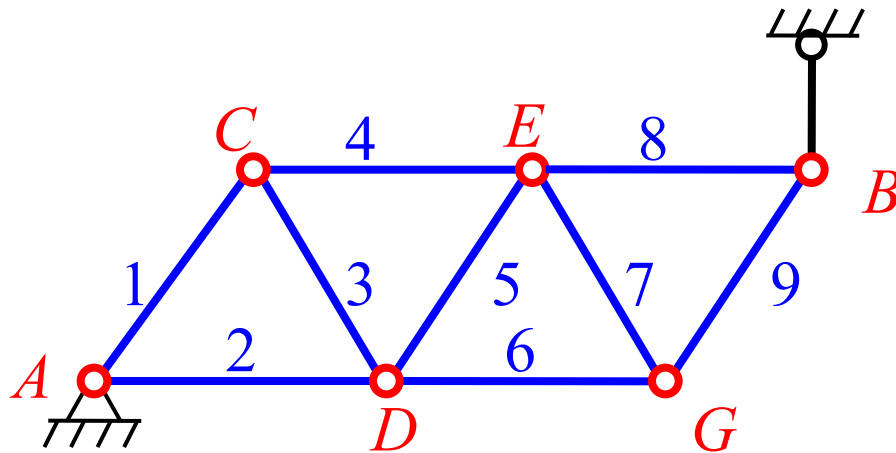


Металлические каркасы зданий  
Строительные конструкции



## 4.1.2. Определение

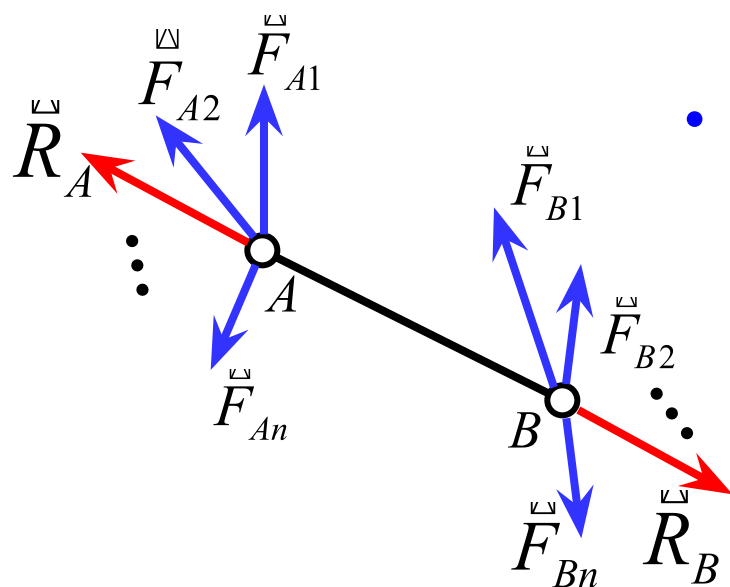
- **Ферма** – жесткая, геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из невесомых прямолинейных стержней, соединенных идеальными (без трения) шарнирами
- Шарнирные соединения называются **узлами** фермы
- **Плоской** называется **ферма**, все стержни и шарниры которой лежат в одной плоскости



- Узлы фермы будем обозначать большими латинскими буквами *A, B, ... G*
- Стержни пронумеруем

### 4.1.3. Усилия в стержнях фермы

- Предполагается, что все усилия приложены к узлам фермы.
- В этом случае все стержни будут испытывать только продольные нагрузки

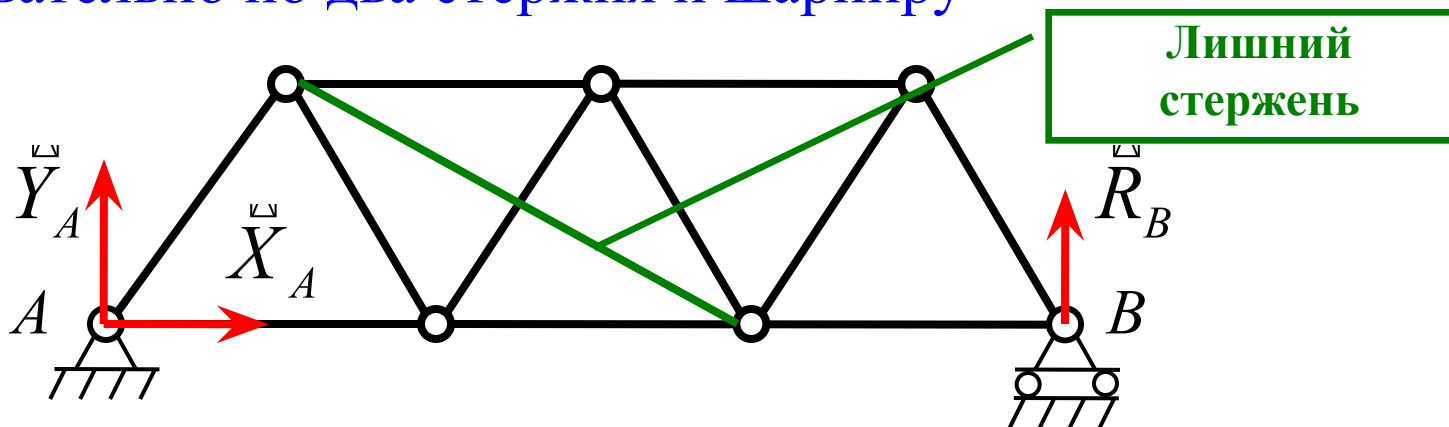


- Действительно, рассмотрим равновесие стержня  $AB$
- Системы сил, приложенные к узлам, – это ССС и их можно заменить равнодействующими
- Согласно аксиоме 1, для равновесия тела необходимо, чтобы силы и  $\vec{R}_B$  были равны  $\vec{R}_A$

**Т.о., эти равнодействующие силы образуют уравновешенную систему сил и, следовательно, направлены вдоль стержня**

## 4.1.4. Статически определимые фермы

- Мы будем рассчитывать ферму без лишних стержней. Ее можно построить присоединяя к треугольной конструкции последовательно по два стержня и шарниру



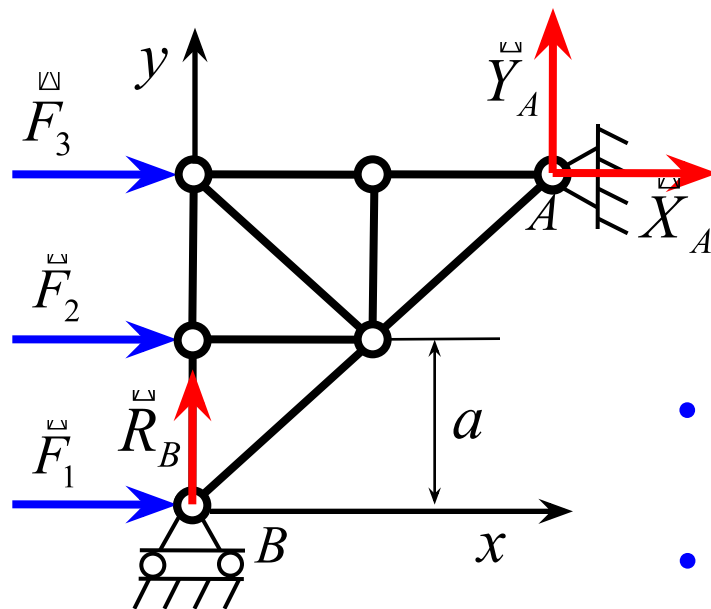
- У плоских статически определимых ферм число неизвестных опорных реакций должно равняться трем
- Число стержней плоской статически определимой фермы определяется формулой
$$k = 2n - 3,$$
где  $k$  – число стержней,  $n$  – число узлов

## **4.2. Расчет плоской фермы**

### Расчет плоской фермы сводится к

- нахождению сил реакции опор
- определению усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов и/или методом сечений ( Риттера)

## 4.2.2. Определение опорных реакций



Дана плоская ферма, образованная одинаковыми равнобедренными треугольниками, к узлам которой параллельно оси  $x$  приложены силы  $F_1 = F_2 = F_3 = 2$  кН

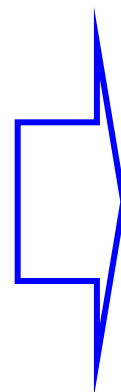
- Освободимся от связи в точке  $A$  и заменим ее реакциями
- Освободимся от связи в точке  $B$  и заменим ее реакцией

- Запишем уравнения равновесия для плоской системы сил

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad F_1 + F_2 + F_3 + X_A = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad R_B + Y_A = 0,$$

$$\sum_i m_A = 0, \quad F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot a - R_B \cdot 2a = 0.$$

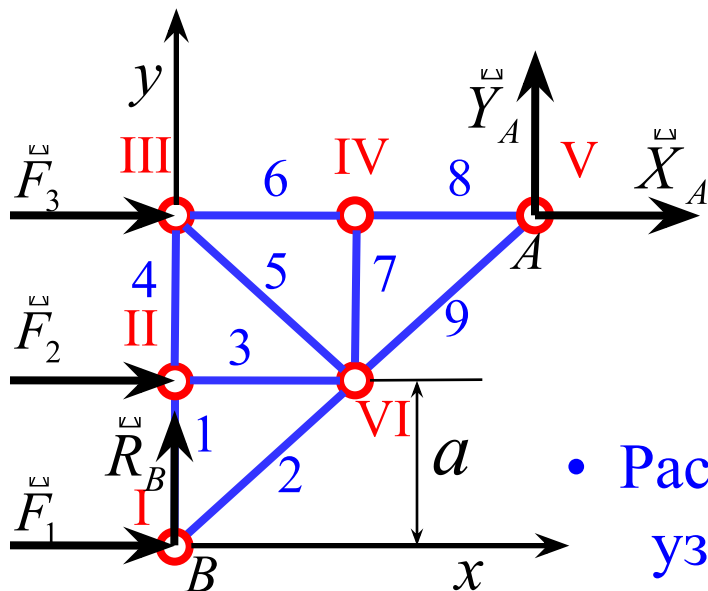


$$R_B = 3 \text{ кН}$$

$$Y_A = -3 \text{ кН}$$

$$X_A = -6 \text{ кН}$$

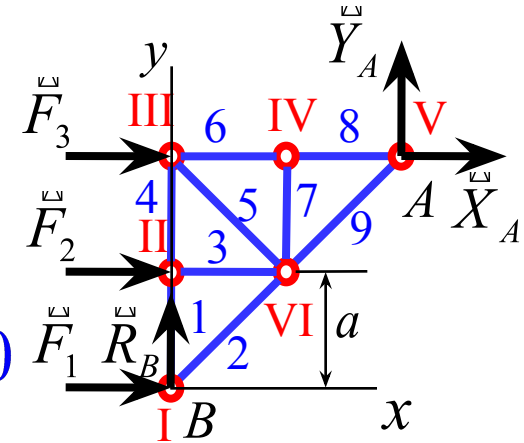
## 4.2.3. Метод вырезания узлов



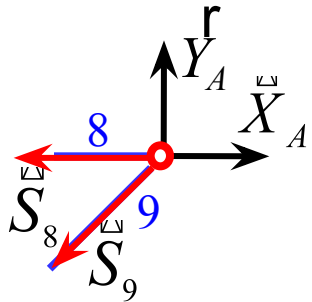
- Пронумеруем все стержни фермы арабскими цифрами: 1, 2, 3, ... 9
- Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами: I, II, ..., IV
- Рассмотрим равновесие каждого узла и составим для него уравнения равновесия, считая условно все стержни растянутыми и направляя реакции шарниров от узлов
- Следует учесть, что стержни находятся в равновесии, поэтому реакции соединительных шарниров должны быть равны по величине и противоположно направлены

## 4.2.4. Определение усилий в стержнях фермы

Расчет следует начинать с узла, в котором сходятся два стержня с неизвестными усилиями (узел V)



**Узел V**



$$\sum_i F_{ix} = 0: X_A - S_8 - S_9 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: Y_A - S_9 \sin 45^\circ = 0$$

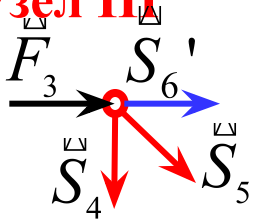
**Узел IV**



$$\sum_i F_{ix} = 0: S_8 - S_6 = 0, \quad S_8 = S_6$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: S_7 = 0$$

**Узел III**



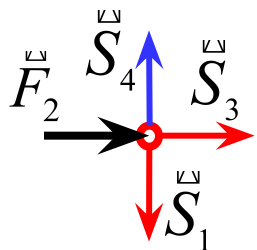
$$\sum_i F_{ix} = 0: S_6 + F_3 + S_5 \cos 45^\circ = 0, \quad S_6 = S_5$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: -S_4 - S_5 \sin 45^\circ = 0$$



## 4.2.4. Определение усилий в стержнях фермы

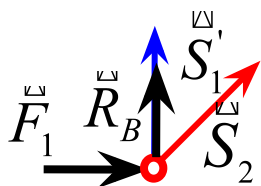
### Узел II



$$\sum_i F_{ix} = 0: \bar{F}_2 + S_3 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: S_4 - S_1 = 0$$

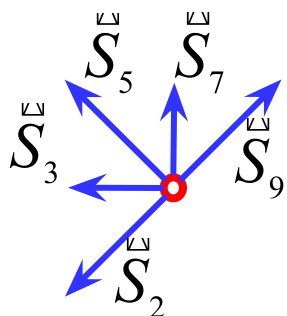
### Узел I



$$\sum_i F_{ix} = 0: F_1 + S_2 \cos 45^\circ = 0$$

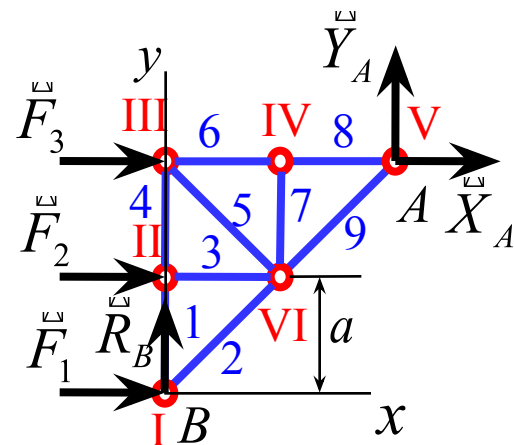
$$\sum_i F_{iy} = 0: S_1' + R_B + S_2 \sin 45^\circ = 0, \quad S_1' = S_1$$

### Узел VI



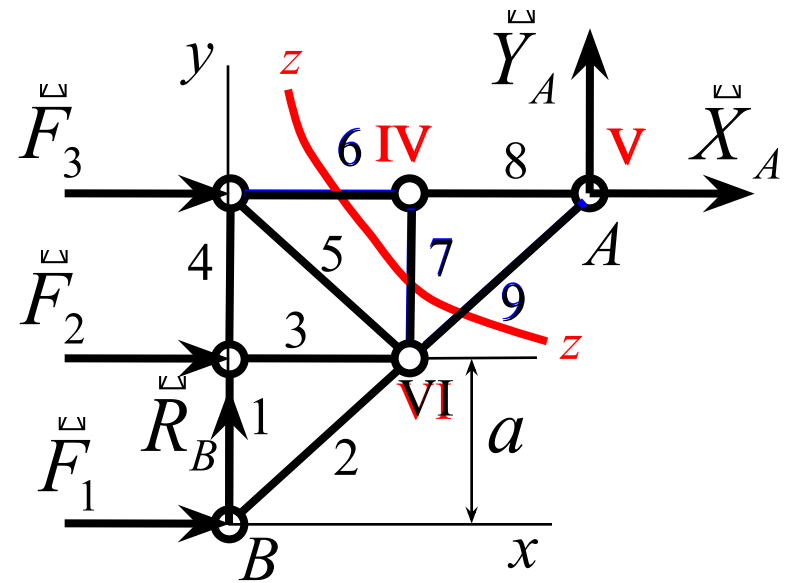
$$\sum_i F_{ix} = 0: -S_3 - S_2 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ + S_9 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: S_7 - S_2 \sin 45^\circ + S_5 \sin 45^\circ + S_9 \sin 45^\circ = 0$$



## 4.2.5. Метод сечений (Риттера)

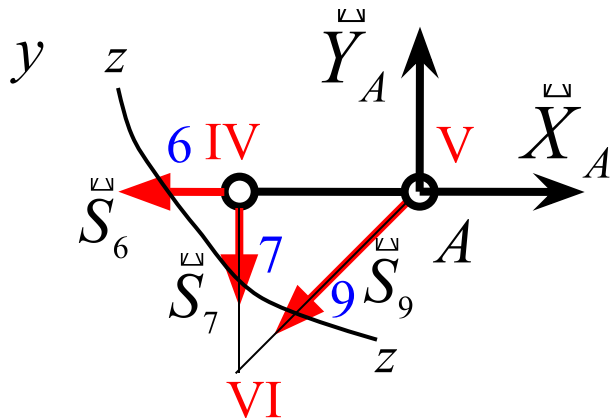
- Метод Риттера удобен, если необходимо определить усилия в каких-то отдельных стержнях фермы, например, 6, 7, 9
- Число стержней в сечении должно быть не более трех



### Последовательность действий

- Проведем сквозное сечение  $z-z$  через стержни 6, 7, 9
- Пользуясь принципом отвердевания, рассмотрим равновесие одной из частей фермы, например, правой
- Составляем 3 уравнения равновесия для этой части фермы

## 4.2.5. Метод сечений (Риттера)



$$\sum_i m_A = 0: \quad S_7 = 0$$

$$\sum_i m_{IV} = 0: \quad aY_A - aS_9 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum_i m_{VI} = 0: \quad aY_A + aS_6 - aX_A = 0$$

- Решив систему уравнений, находим усилия в стержнях 6,7,9
- Полученные результаты можно использовать для проверки усилий, определенных методом вырезания узлов
- Если усилия в стержне получилось со знаком «-», то стержень не растянут, а сжат

## **4.3. Расчет составных конструкций**

## 4.3.1. Примеры составных конструкций

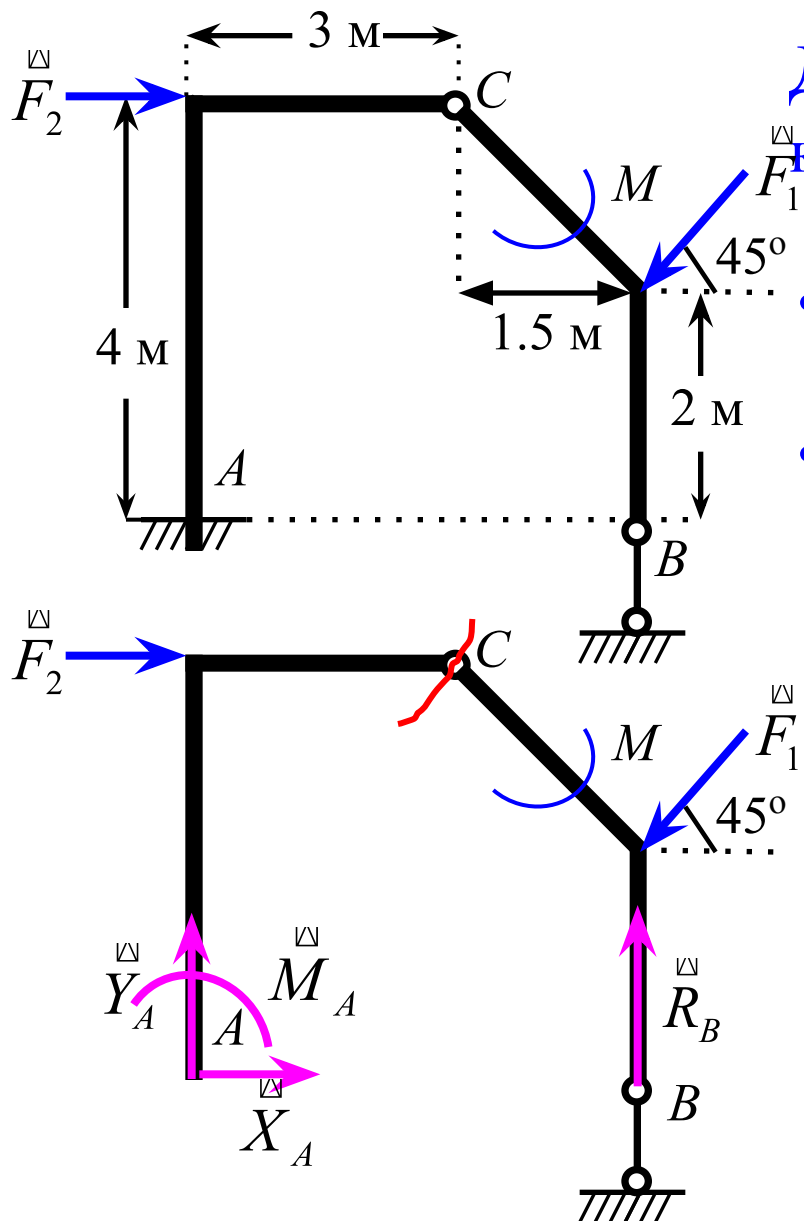


Сбо

ь

1-ый панельный дом Новосибирск, 1960 г.  
Деревянные строения Новосибирск, 1970-1980-е гг.

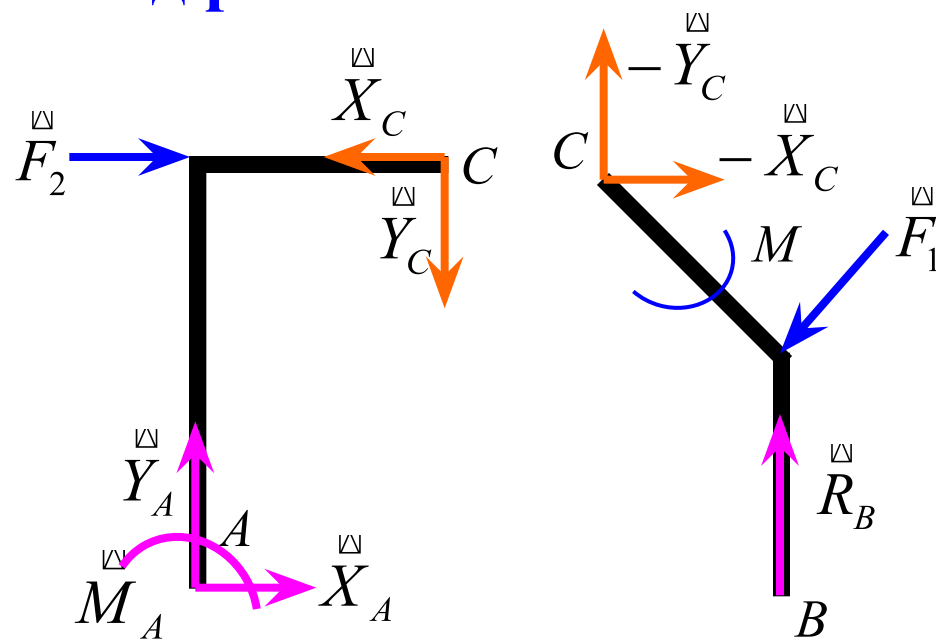
## 4.3.2. Расчет составных рам



**Дано:**  $F_1 = \sqrt{2}$  кН,  $F_2 = 3$  кН,  $M = 3$  кНм  
**Определить реакции внешних и внутренних связей**

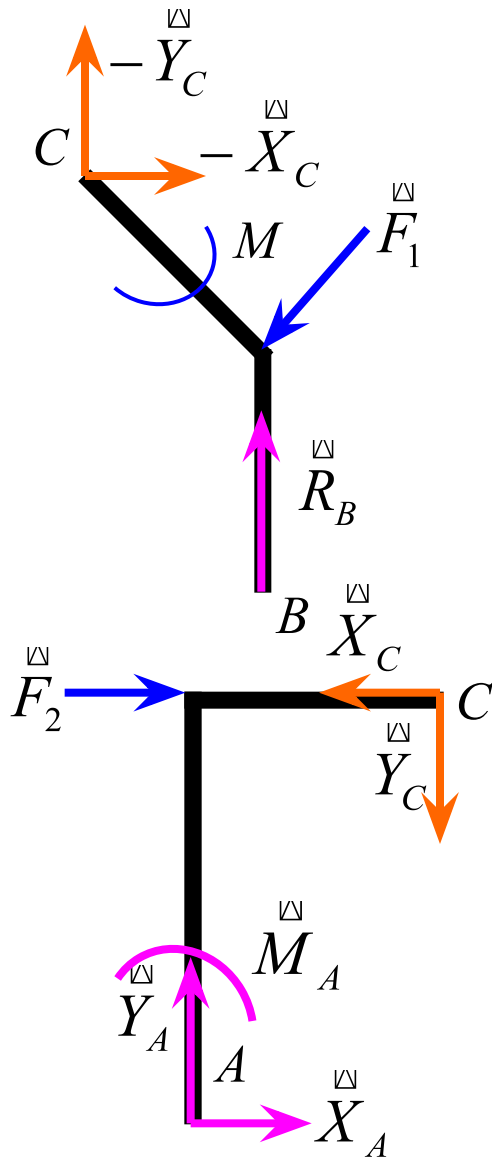
- освобождаемся от внешних связей и заменяем их реакциями
- Система статически неопределимая

**Метод расчленения**



### 4.3.3. Расчет составных рам

#### Метод расчленения



$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad -X_C - F_1 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad -Y_C - F_1 \cos 45^\circ + R_B = 0$$

$$\sum_i m_C = 0: \quad M + 1.5R_B - 2F_1 \cos 45^\circ - 1.5F_1 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad F_2 - X_C + X_A = 0$$

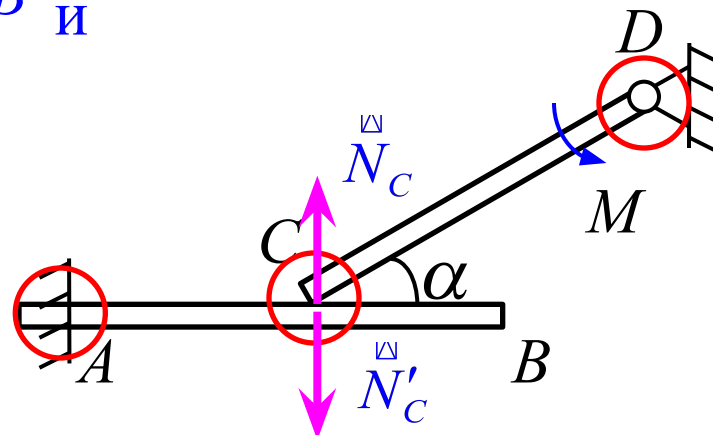
$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad -Y_A - Y_C = 0$$

$$\sum_i m_A = 0: \quad -4F_2 + 4X_C - 3Y_C + M_A = 0$$

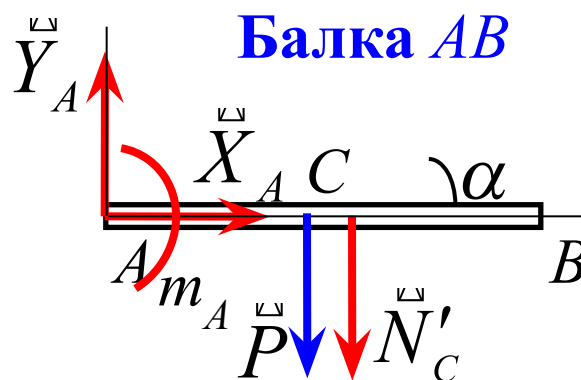
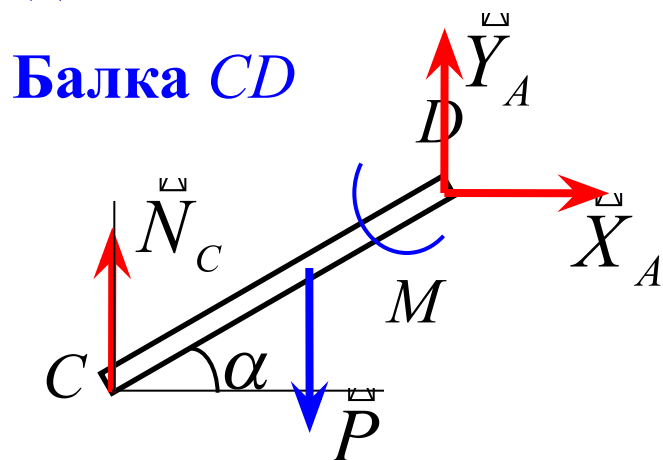
## 4.3.4. Расчет составной конструкции из балок

Дана конструкция, состоящая из двух однородных балок  $AB$  и  $CD$  весом  $P$  и длиной  $l$ ,  $AC = 0.7l$

Определить реакции жесткой заделки  $A$ , шарнирной опоры  $D$  и давление в точке  $C$  на балку  $AB$



- Освобождаемся от связей и расчленяем конструкцию на две части

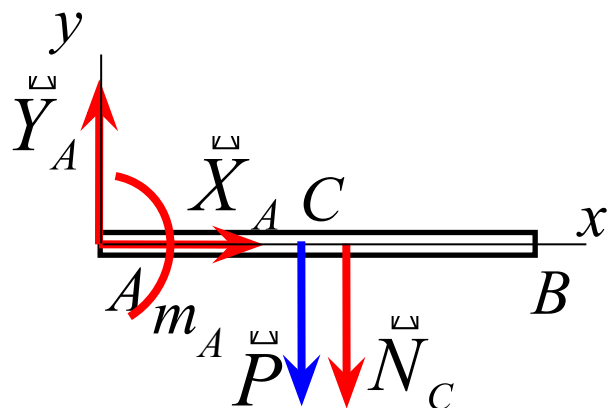


$$\vec{N}'_C = \vec{N}_C$$



## 4.3.4. Расчет составной конструкции из балок

Балка  $AB$

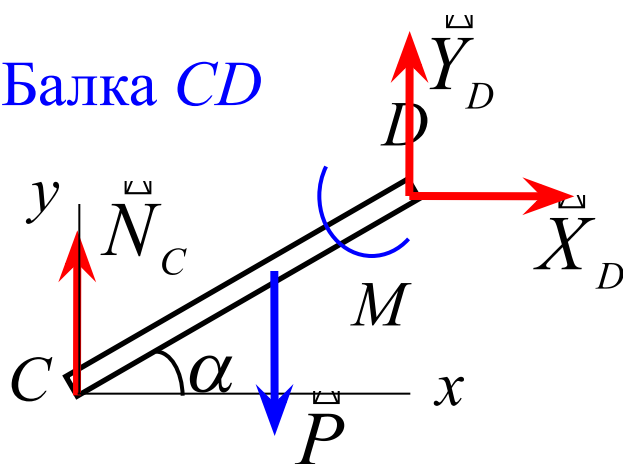


$$\sum F_{ix} = 0: X_A = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: Y_A - N_C - P = 0$$

$$\sum m_A = 0: m_A - P \cdot 0.5l - N_C \cdot 0.7l = 0$$

Балка  $CD$



$$\sum F_{ix} = 0: X_D = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: Y_D + N_C - P = 0$$

$$\sum m_D = 0: M + P \cdot 0.5l \cos \alpha - N_C \cdot l \cos \alpha = 0 \longrightarrow$$

Находим реакции связей:  $X_A, Y_A, m_A, N_C, X_D, Y_D$

## **4.4. Заключение**

## ***5.4.1. Основные выводы***

**На данной лекции Вы овладели основными методами расчета**

- плоских ферм**
- двухсоставных конструкций**
- пользуясь этими методами легко рассчитывать и конструкции, состоящие из произвольного числа элементов**

**Центр тяжести  
Равновесие при наличии  
трения**



**Иосиф Бродский  
1940-1996**

Ни страны, ни погоста не хочу  
выбирать.  
На Васильевский остров  
я приду умирать.  
Твой фасад темно-синий  
я впотьмах не найду,  
между выцветших линий  
на асфальт упаду.

И душа, неустанно  
поспешая во тьму,  
промелькнет над мостами в  
петроградском дыму,  
и апрельская морось,  
под затылком снежок, и  
услышу я голос:  
-- До свиданья, дружок.

**«Я думаю, что не человек  
пишет стихи, а предыдущее  
стихотворение пишет  
следующее»**

И увижу две жизни  
далеко за рекой,  
к равнодушной отчизне  
прижимаясь щекой,  
-- словно девочки-сестры  
из непрожитых лет,  
выбегая на остров,  
машут мальчику вслед.