

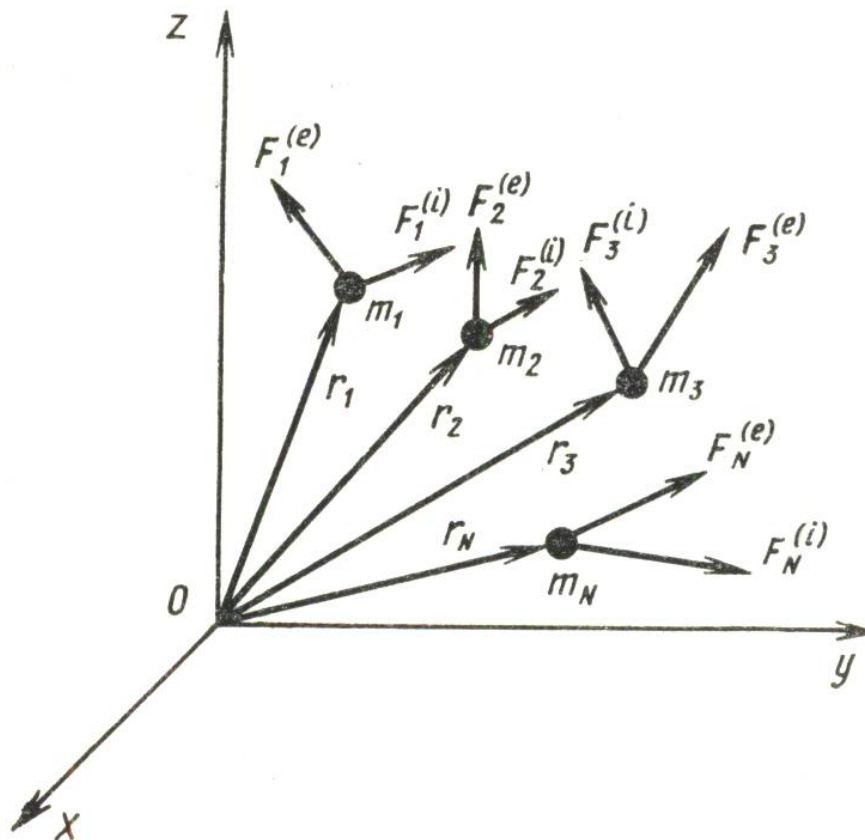
Тема 2. Уравнения колебаний системы со многими степенями свободы

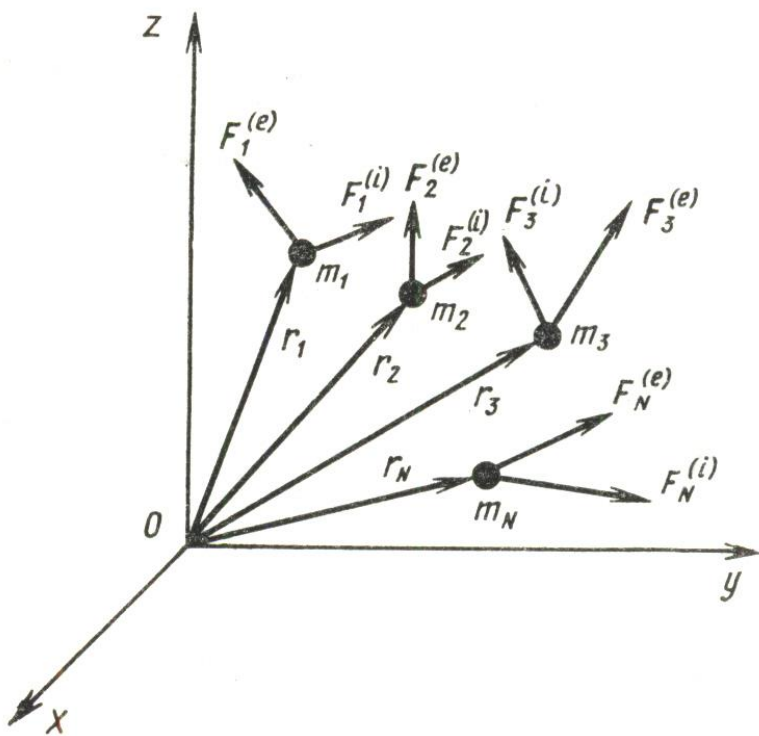
Лекция 3. Уравнения динамики системы материальных точек

Рассмотрим системы N материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_N$

Радиус-вектор массы m_i относительно некоторой инерциальной системы координат Охуз обозначим через r_i ($i=1, 2, \dots, N$).

Векторы скоростей и ускорений обозначим соответственно через v_i и w_i





Внешние силы, характеризующие взаимодействие системы с окружающей средой, обозначим через $F_i^{(e)}$

Внутренние силы, т. е. силы взаимодействия между точками системы, обозначим через F_{ik} , где первый индекс указывает номер массы m_i , на которую действует сила, второй индекс — номер массы m_k , со стороны которой эта сила действует.

Главный вектор всех внутренних сил, действующих на i -ю массу, обозначим через $F_i^{(i)}$

Третью группу сил образуют реакции связей, т. е. силы, действие которых на систему эквивалентно действию рассматриваемых связей. Главный вектор всех реакций, действующих на массу m_i , обозначим через R_i .

Уравнения динамики системы материальных точек имеют вид

$$m_i w_i = F_i^{(e)} + F_i^{(i)} + R_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

Классификация связей.

Система уравнений (1) не является замкнутой, поскольку содержит неизвестные реакции связей.

Связи описываются при помощи равенств и неравенств относительно координат и скоростей точек, образующих систему.

Уравнение *удерживающей связи*, наложенной на движение системы, имеет вид

$$f(r_1, r_2, \dots, r_N; v_1, v_2, \dots, v_N; t) = 0 \quad (2)$$

Связь называют *стационарной*, если время t не входит явно в уравнение связи; в противном случае она *нестационарная*.

Связь называют *геометрической*, если она накладывает ограничения только на положение (на координаты) точек системы; в уравнение геометрической связи не входят векторы скоростей.

В противном случае ее называют *кинематической* или дифференциальной.

. Связь называют *голономной*, если она является геометрической или интегрируемой дифференциальной связью, т. е. уравнение связи может быть приведено к виду

$$f(r_1, r_2, \dots, r_N; t) = 0 \quad (3)$$

Малые перемещения точек системы, совместимые с уравнениями связей, называют виртуальными или возможными перемещениями системы

$$\delta r_1, \delta r_2, \dots, \delta r_N$$

Связь называют *идеальной*, если работа ее реакции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Если все связи, наложенные на систему, идеальны, то для любых виртуальных перемещений системы будет выполняться условие

$$\sum_{i=1}^N R_i \delta r_i = 0 \quad (4)$$

Замкнутая система уравнений динамики.

Пусть на систему наложено *S* связей, выражаемых равенствами типа (3).

Добавляя к уравнениям (1) уравнения связей, получим замкнутую систему

$$m_i w_i = F_i^{(e)} + F_i^{(i)} + R_i$$

$$f(r_1, r_2, \dots, r_N; t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, s) \quad (5)$$

Принцип Даламбера. .

Составление уравнений динамики для конкретных механических систем значительно облегчается, если использовать принцип Даламбера:

уравнения динамики механической системы формально совпадают с уравнениями равновесия этой системы, если к действующим внешним силам, внутренним силам и реакциям связей добавить фиктивные (даламберовы) силы инерции:

$$I_i = -m_i w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

С учетом (6) уравнения (1) принимают вид

$$F_i^{(e)} + F_i^{(i)} + R_i + I_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

Общее уравнение динамики Даламбера—Эйлера.

Уравнения динамики системы материальных точек и уравнения связей (5) эквивалентны следующему утверждению:

движение, системы происходит так, что в любой момент времени сумма работ всех внешних и внутренних сил, реакций связей и даламберовых сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Аналитическая запись этого утверждения имеет вид и называется *общим уравнением динамики*

$$\sum_{i=1}^N (F_i^{(e)} + F_i^{(i)} + R_i + I_i) * \delta r_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

Если все связи идеальные, то работа реакций связей в общее уравнение динамики не входит.

Принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа для механических систем

Пусть состояние системы описывается n переменными, называемые *обобщенными координатами* системы:

$$q = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)) \quad (9)$$

Обобщенные координаты однозначно определяют положение всех точек системы в каждый момент времени, т. е. конфигурацию системы. Пространство n измерений, элементами которого являются совокупности обобщенных координат называют *пространством конфигураций* (конфигурационным пространством).

Производные обобщенных координат по времени называют *обобщенными скоростями* $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$

а вторые производные - *обобщенными ускорениями* $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n$.

Пространство $2n$ измерений, элементами которого являются совокупности обобщенных координат и обобщенных скоростей называют *пространством состояний*.

$$u = (q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (10)$$

Простейшим примером пространства состояний для системы с одной степенью свободы может служить *фазовая плоскость* $(q_1, \dot{q}_1)$

Вариационный принцип Гамильтона

Важнейшим интегральным вариационным принципом аналитической механики является ***принцип Гамильтона***, который может быть выведен из общего уравнения динамики.

Пусть все связи - идеальные.

Уравнение Даламбера-Эйлера запишется в виде

$$\sum_{i=1}^n (F_i^{(e)} + F_i^{(i)} + I_i) * \delta r_i = 0 \quad (11)$$

Рассмотрим движение системы на некотором отрезке времени (t_0, t_1) .

При этом истинном движении в каждый момент времени удовлетворяются как уравнения движения, так и уравнения связей.

Наряду с истинным движением рассмотрим совокупность бесконечно близких движений, для которых уравнения связей удовлетворены (в силу выбора обобщенных координат), а уравнения движения не удовлетворяются.

Эти движения будем называть смежными

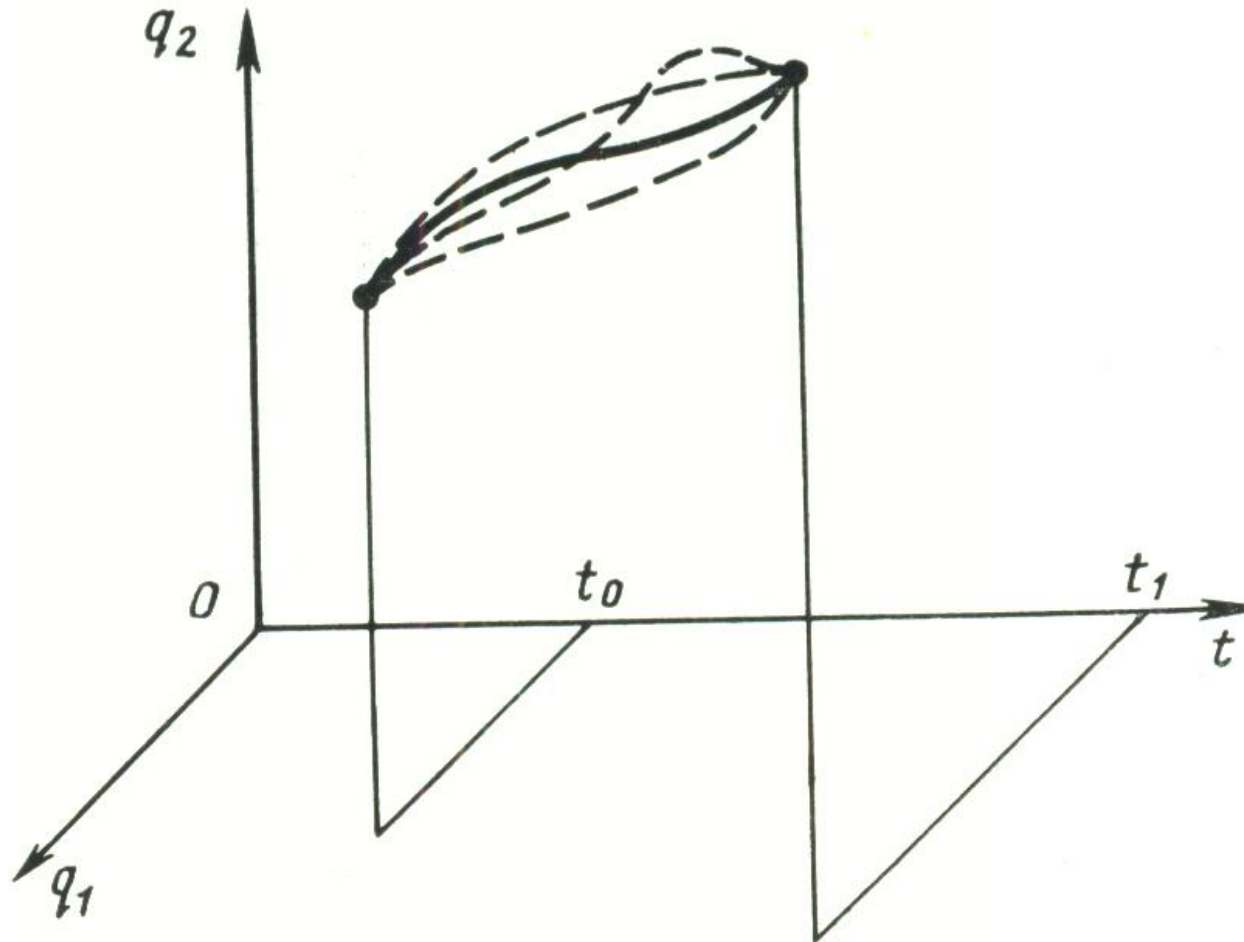
Соответствующие приращения обобщенных координат будем называть

вариациями обобщенных координат и обозначать $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$.

Вариации, удовлетворяющие поставленному условию, называют *изохронными*.

На концах временного отрезка (t_0, t_1) движение варьировать не будем, т. е. в моменты времени t_0 и t_1 все $\delta q_j = 0$.

На рис. 3 показаны истинная и смежные траектории в расширенном пространстве конфигураций для случая для $n = 2$.



Из уравнения (11) следует утверждение: *истинное движение системы происходит так, что при любых изохронных вариациях, обращающихся на концах отрезка (t_0, t_1) в нуль, выполняется условие*

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' A) dt = 0 \quad (12)$$

δT - вариация кинетической энергии системы, т. е. приращение кинетической энергии при отклонениях от истинного движения;

$\delta' A$ - сумма работ всех внешних и внутренних сил системы на вариациях $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$.

(Штрих поставлен для того, чтобы подчеркнуть, что $\delta' A$ не является, вообще говоря, вариацией некоторой функции A).

Знак вариации в первом члене подынтегрального выражения (4) может быть вынесен за знак интеграла.

В результате получаем соотношение, которое выражает *вариационный принцип Гамильтона*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' A dt = 0 \quad (13)$$

Кинетическая энергия T и виртуальная работа , входящие в соотношения типа (5), должны быть выражены через обобщенные координаты и скорости.

Выражение для виртуальной работы имеет вид

$$\delta' A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (14)$$

коэффициенты при вариациях обобщенных координат называют обобщенными силами $Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$

Принцип Гамильтона для консервативных систем

Пусть все действующие на систему внешние и внутренние силы консервативны, так что выполняется условие

$$\delta' A = -\delta U \quad (15)$$

δU - некоторая функция обобщенных координат $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ называемой ***потенциальной энергией системы***

Тогда вместо соотношения (13) получаем

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0 \quad (16)$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, называют *функцией Лагранжа* или *лагранжианом*;

$$L = T - U \quad (17)$$

Соотношение (8) можно записать в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (18)$$

Интеграл от лагранжиана по времени, входящий в соотношение (18), называют *интегралом действия*.

Принцип Гамильтона для консервативных систем может быть сформулирован таким образом:

истинное движение системы, под действием консервативных сил происходит так, что на любых изохронных вариациях, обращающихся в нуль на концах отрезка (t_0, t_1) , вариация от интеграла действия обращается в нуль.

Или, иначе, интеграл действия принимает для истинного движения стационарное значение.

Уравнения Лагранжа

Дифференциальные уравнения, соответствующие вариационному принципу Гамильтона, называют *уравнениями Лагранжа* (второго рода).

Совокупность уравнений Лагранжа для рассматриваемой механической системы описывает движение этой системы наиболее экономным образом и является основным рабочим аппаратом аналитической механики.

В зависимости от характера ограничений, наложенных на силы и связи, уравнения Лагранжа могут иметь различный вид.

Пусть действующие на систему силы неконсервативны.

Исходя из принципа Гамильтона в форме (13) и учитывая выражения (14), приходим к уравнениям

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

Если все силы консервативны, то, применяя принцип Гамильтона в форме (16), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

В тех случаях, когда некоторые силы, действующие на систему, консервативны, целесообразно учесть влияние этих сил через их потенциальную энергию U .

Остальные силы войдут в уравнения Лагранжа через обобщенные силы Q_i .

Такая трактовка целесообразна, если внутренние силы консервативны, а внешние неконсервативны.

Тогда в уравнениях Лагранжа вклад внутренних и внешних сил естественным образом разделяется:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

Учет диссипативных сил. Диссипативная функция Релея.

Процесс рассеяния (диссипации) механической энергии проще всего учитывается введением сил, пропорциональных обобщенным скоростям.

В общем случае системы с ***n*** степенями свободы диссипативные силы

$$Q_i = - \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

Чтобы эти силы действительно описывали рассеяние механической энергии, необходимо, чтобы их виртуальная работа почти на всех совместимых со связями перемещениях была отрицательная.

Удобнее говорить о ***мощности диссипации***

$$W = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (23)$$

Матрицу ***C*** называют ***матрицей коэффициентов диссипации***

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Если соответствующая ей квадратичная форма мощности диссипации (23) является положительно определенной, то диссипация называется полной (в том смысле, что любое допустимое перемещение будет сопровождаться рассеянием энергии)

Все главные миноры, включая определитель матрицы $\mathbf{C}$, положительны.

Если же квадратичная форма, соответствующая матрице $\mathbf{C}$, является неотрицательной, то возможны движения, не сопровождаемые рассеянием механической энергии.

Знакопеременность квадратичной формы указывает на возможность автоколебаний в системе.

Диссипативные силы могут быть введены в уравнения Лагранжа либо непосредственно (т. е. через обобщенные силы), либо через квадратичную форму, которую называют *диссипативной функцией Релея*

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (26)$$

Уравнения (26) содержат диссипативные силы в левых частях.