Наработка

Пусть в момент $t=0$ элемент начинает работу, а в момент $t=T$ происходит отказ.

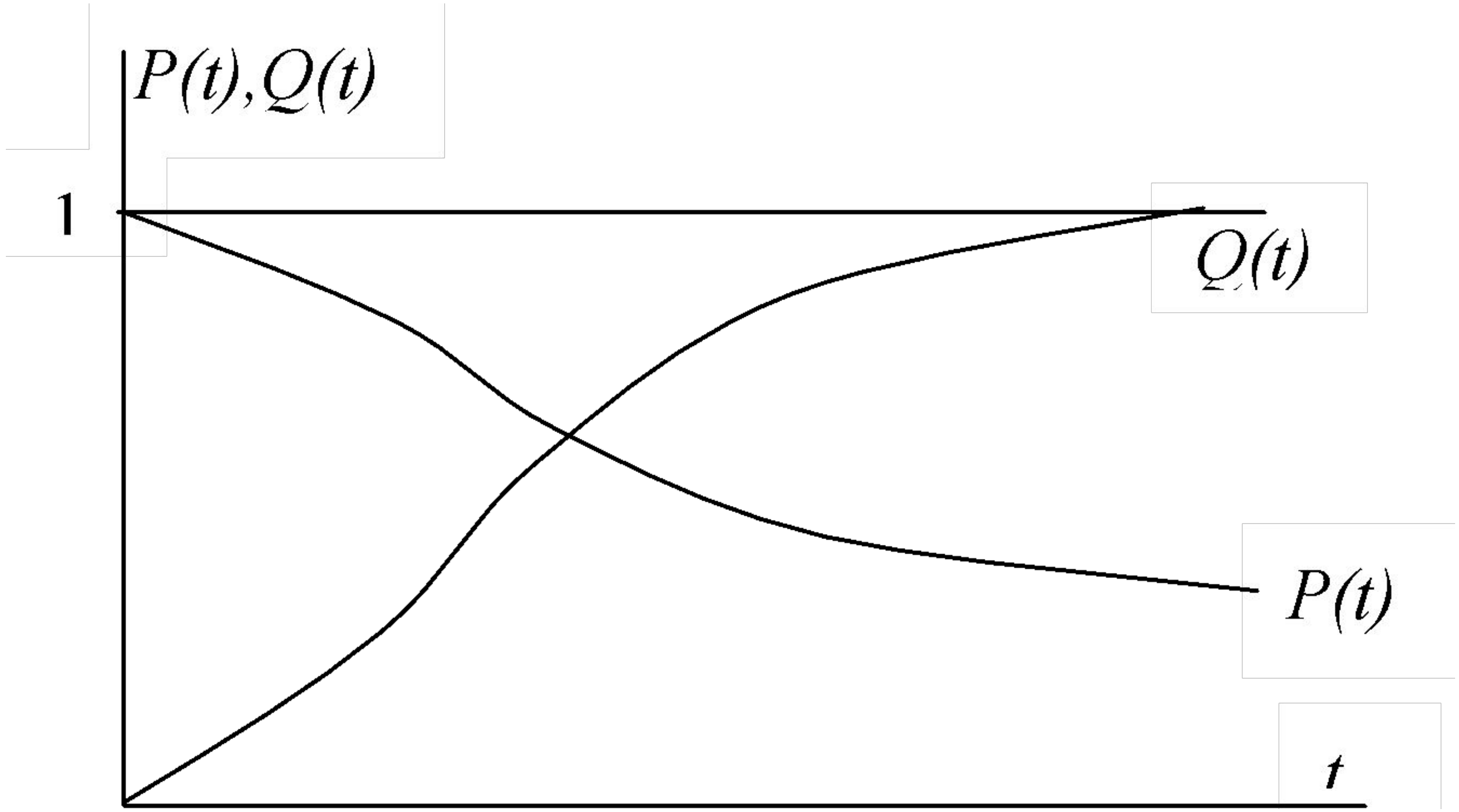
T – случайная величина

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = P(T > t)$$

Вероятность отказа

$$Q(t) = P(T \le t),$$
$$Q(t) = 1 - P(t)$$



Вероятность безотказной работы *P(t)* и вероятность отказа *Q(t).*

Свойства

1. $P(0) = 1$.
2. $P(t) \to 0$ при $t \to \infty$

Вероятность безотказной работы по статистическим данным об отказах оценивается выражением

$$\overline{P}(t) = (N_0 - n(t)) / N_0$$

n(t) – число отказавших изделий

Если хотим найти функцию $P(t)$ для всех значений $t \le t_0$, то в процессе испытаний необходимо отмечать моменты возникновения отказов.

Отношение

$$P_N(t) = \frac{N - n(t)}{N}$$

называется эмпирической функцией надежности.

С ростом N эта функция равномерно приближается к функции $P(t)$, и для больших N имеет место соотношение

$$P_N(t) = \frac{N - n(t)}{N} \approx P(t)$$

Вероятность отказа

Интегральный закон распределения случайной величины T в теории надежности называют вероятностью отказа и обозначают $Q(t)$.

$$Q(t) = P(T \le t)$$

$$Q(t) + P(t) = 1$$

Функция плотности вероятности времени безотказной работы характеризует плотность, с которой распределено значение случайной величины в окрестности данной точки

$$q(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d(1 - P(t))}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}.$$

Плотность распределения $q(t)$ является дифференциальной формой закона распределения времени безотказной работы (наработки до отказа) T. Плотность $q(t)$ является неотрицательной функцией, причем

$$\int_0^{\infty} q(t)dt = 1.$$

Вероятность безотказной работы и вероятность отказа связаны с частотой отказа $q(t)$ соотношениями

$$P(t) = 1 - \int_0^t q(x)dx = \int_t^{\infty} q(x)dx;$$

$$Q(t) = \int_0^t q(x)dx.$$

Интенсивность отказов

Одной из наиболее распространенных количественных характеристик надежности является *интенсивность отказов*, которую обозначают буквой λ.

Условную вероятность отказа объекта в течение наработки $(t, t+dt)$ в предположении его безотказной работы до момента t обычно выражают где величиной $\lambda(t)$ называется *интенсивностью отказов*.

Таким образом, при использовании $\lambda(t)$ рассматриваются лишь остающиеся работоспособными к моменту t объекты, а отказавшие исключаются из рассмотрения.

$$\lambda(t) = \frac{q(t)}{p(t)} = -\frac{\frac{dp(t)}{dt}}{p(t)}, \tag{6}$$

Решение уравнения (6) при начальном условии $p(0)=1$ дает для функции надежности формулу

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x)dx} = \exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]. \tag{7}$$

При $\lambda = const$ формула (7) существенно упрощается:

$$p(t) = \exp(-\lambda t). \tag{8}$$

Вероятность безотказной работы в течение наработки (t_1, t_2) объекта, который был работоспособным к началу этого интервала,

$$p(t_1, t_2) = \frac{p(t_2)}{p(t_1)} = \frac{\exp\left[-\int\limits_0^{t_2} \lambda(x)dx\right]}{\exp\left[-\int\limits_0^{t_1} \lambda(x)dx\right]} = \tag{9}$$

$$= \exp\left[-\int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda(x)dx\right].$$

При $\lambda = const$ вероятность безотказной работы в течение наработки (t_1, t_2) не зависит от возраста объекта:

$$p(t_1, t_2) = p(t') = \exp(-\lambda t'), \qquad (10)$$

где $t' = t_2 - t_1$.

При $\lambda t' << 1$ обычно полагают:

$$\exp(-\lambda t') \approx 1 - \lambda t'.$$

Статистически интенсивность отказов определяется как отношение числа отказавших элементов в единицу времени к среднему числу элементов, продолжающих исправно работать.

$$\lambda(t) = \frac{\Delta n}{N_{\text{ср}}(\Delta t)\Delta t}, \qquad (11)$$

где Δn - число элементов, отказавших за время Δt

$$N_{\text{ср}} = \frac{N_{i-1} + N_i}{2} \qquad (12)$$

N_{i-1} - число исправно работающих элементов в начале интервала,

N_i - число исправно работающих элементов в конце интервала времени Δt .

Интенсивность отказов λ показывает, какая часть элементов выходит из строя в единицу времени (обычно в час), другими словами, λ показывает, сколько отказов следует ожидать в единицу времени.

Согласно установившимся в теории надежности представлениям кривая имеет вид, показанный на рис.2.

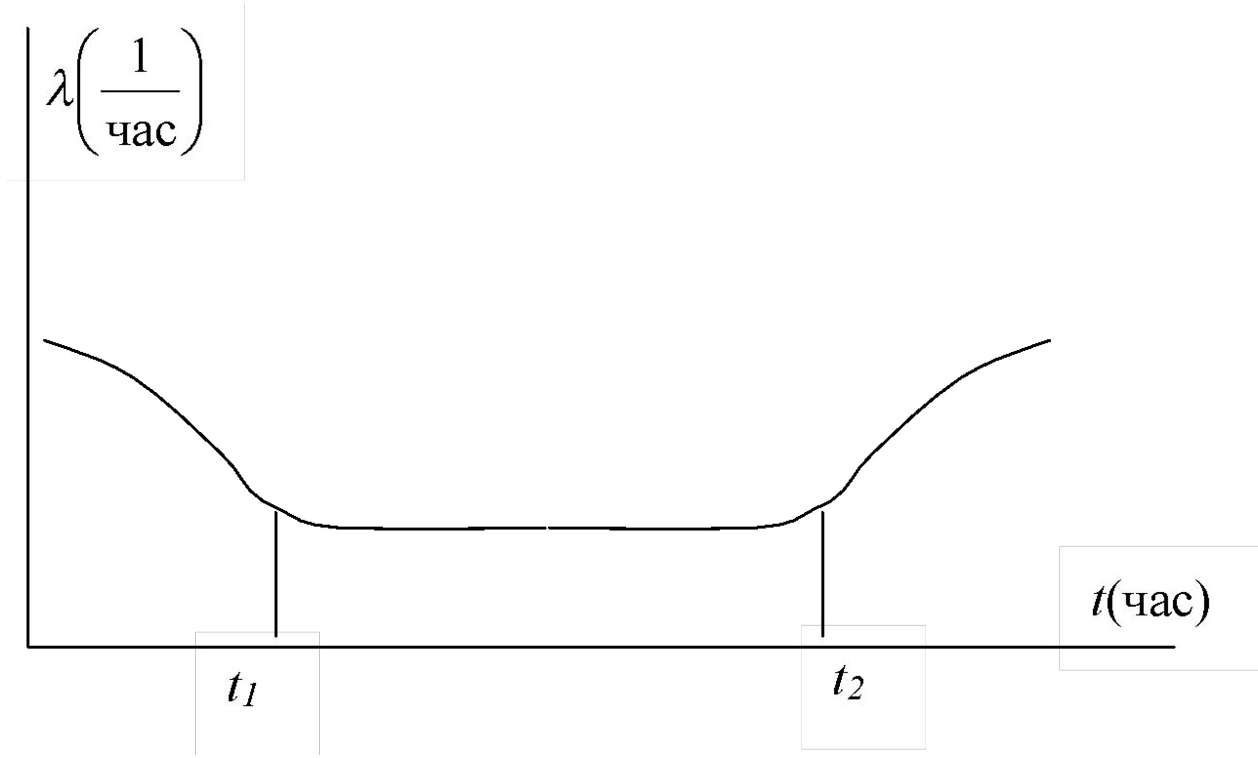
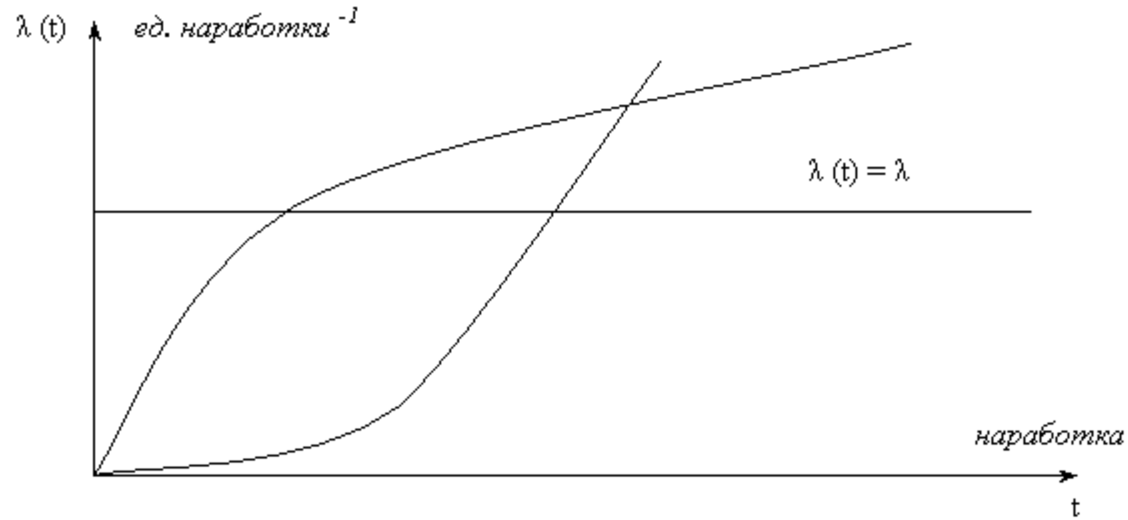


Рис.2. Типичная кривая интенсивности отказов.



λ (t)
ед. наработки -1
λ (t) = λ
наработка
t

Среднее время безотказной работы

Часто при расчетах пользуются характеристикой $T_{\text{ср}}$, которая представляет собой *математическое ожидание непрерывной неотрицательной случайной величины* T *– времени безотказной работы (наработки на отказ)* и называется *средним временем безотказной работы (средней наработкой на отказ).*

Согласно определению математического ожидания непрерывной случайной величины

$$T_{\text{ср}} = M[T] = \int_0^{\infty} t q(t) dt = \int_0^{\infty} t \frac{dQ(t)}{dt} dt =$$

$$= -\int_0^{\infty} t \frac{dP(t)}{dt} dt.$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$T_{\text{ср}} = -tP(t)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t)dt.$$

Первое слагаемое в этом равенстве

$$-tP(t)\Big|_0^{\infty} = -t[1-Q(t)]_0^{\infty} = \lim_{t\to\infty} t[1-Q(t)] = 0.$$

Это можно пояснить следующими рассуждениями. Вероятность отказа становится равной 1 уже при конечном (но достаточно большом) времени работы, следовательно, выражение $[1-Q(t)]=0$ уже при конечном t.

Таким образом, среднее время безотказной работы

$$T_{\text{ср}} = \int_0^\infty P(t)dt.$$

При $\lambda = const$ имеем

$$T_{\text{ср}} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}. \qquad (15)$$

Статистически (на основании испытаний) среднее время безотказной работы можно оценить следующим образом

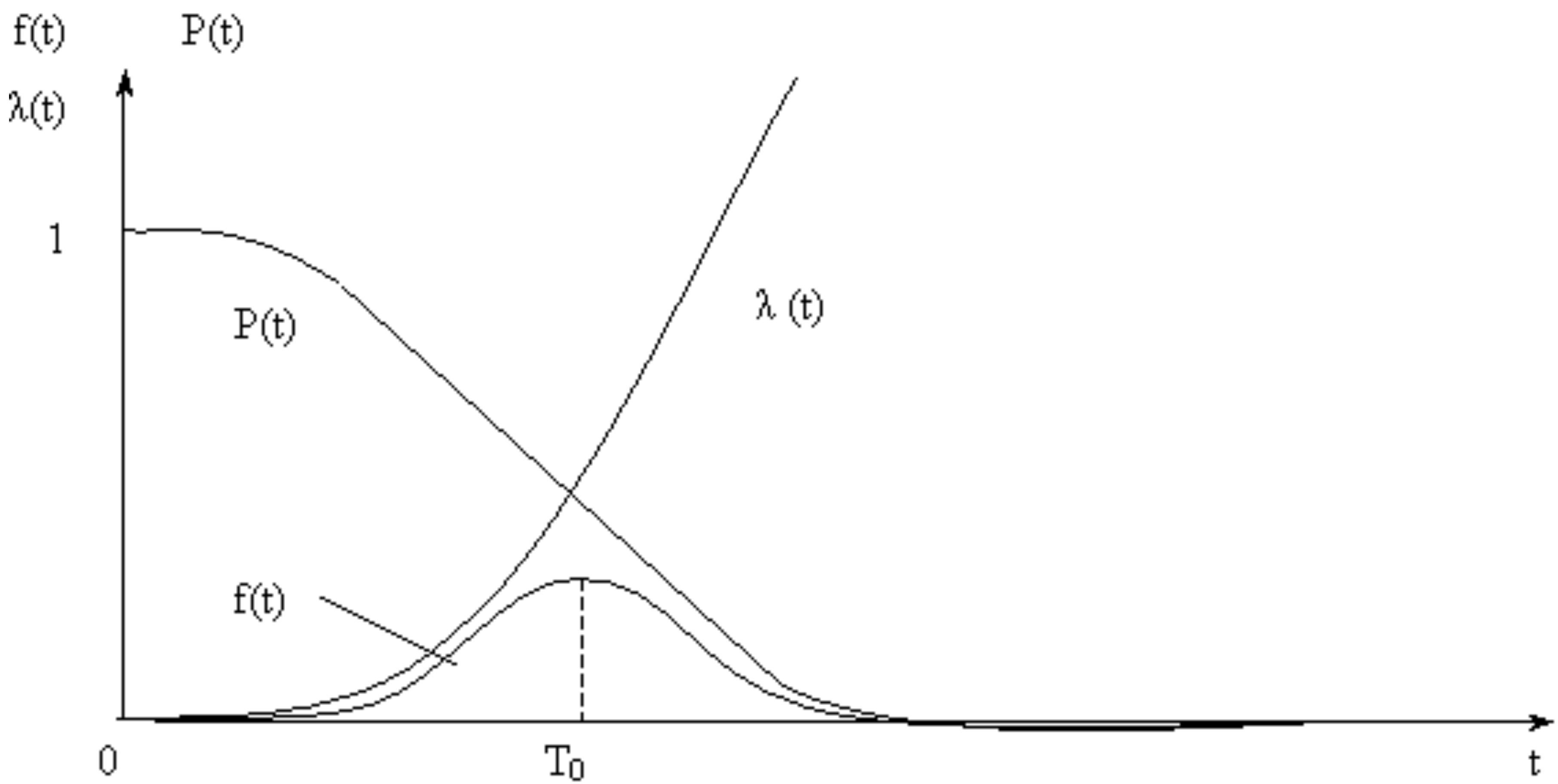
$$T_{\text{ср}} \approx \frac{1}{N}\sum_{\text{k}=1}^{N} t_{\text{k}}, \qquad (16)$$

где N – число однотипных элементов, над которыми проводятся испытания; t_{k} - время безотказной работы k-го элемента.

Нормальное распределение (Гаусса)

$$f(t) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\, exp\left\{ -\frac{(t-a)}{2b^2} \right\},$$

Параметр *b* характеризует форму кривой *f(t)*, т. е. рассеивание случайной величины *T*. Кривая ПРО *f(t)* тем выше и острее, чем меньше *b*



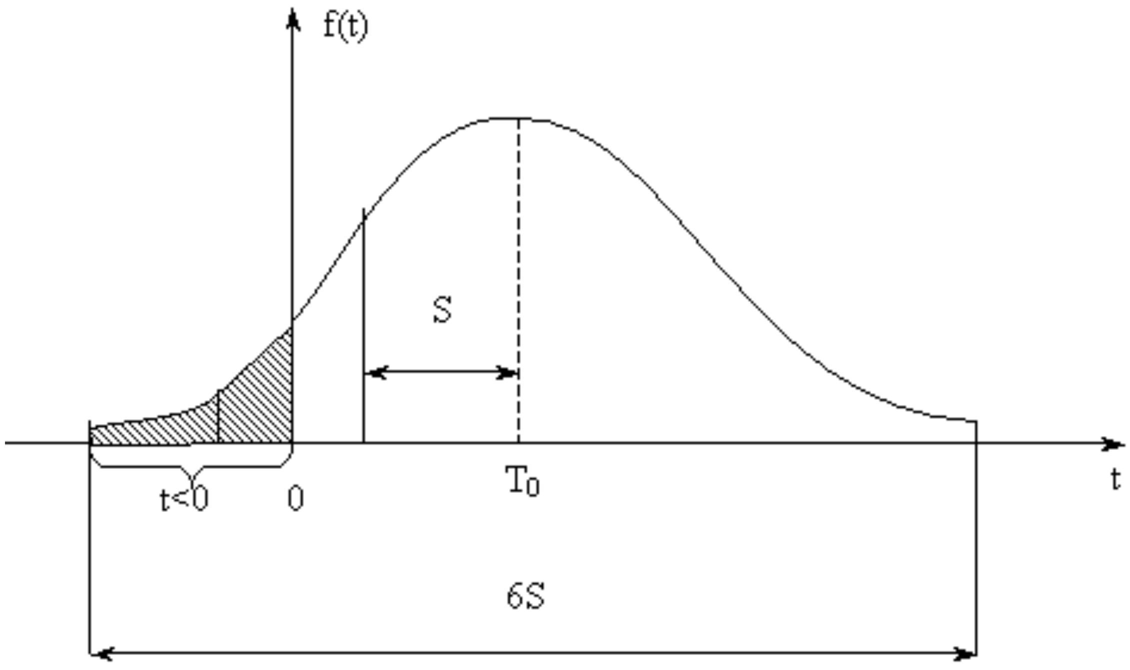
f(t)
P(t)
λ(t)
1
P(t)
λ (t)
f(t)
0
T_0
t

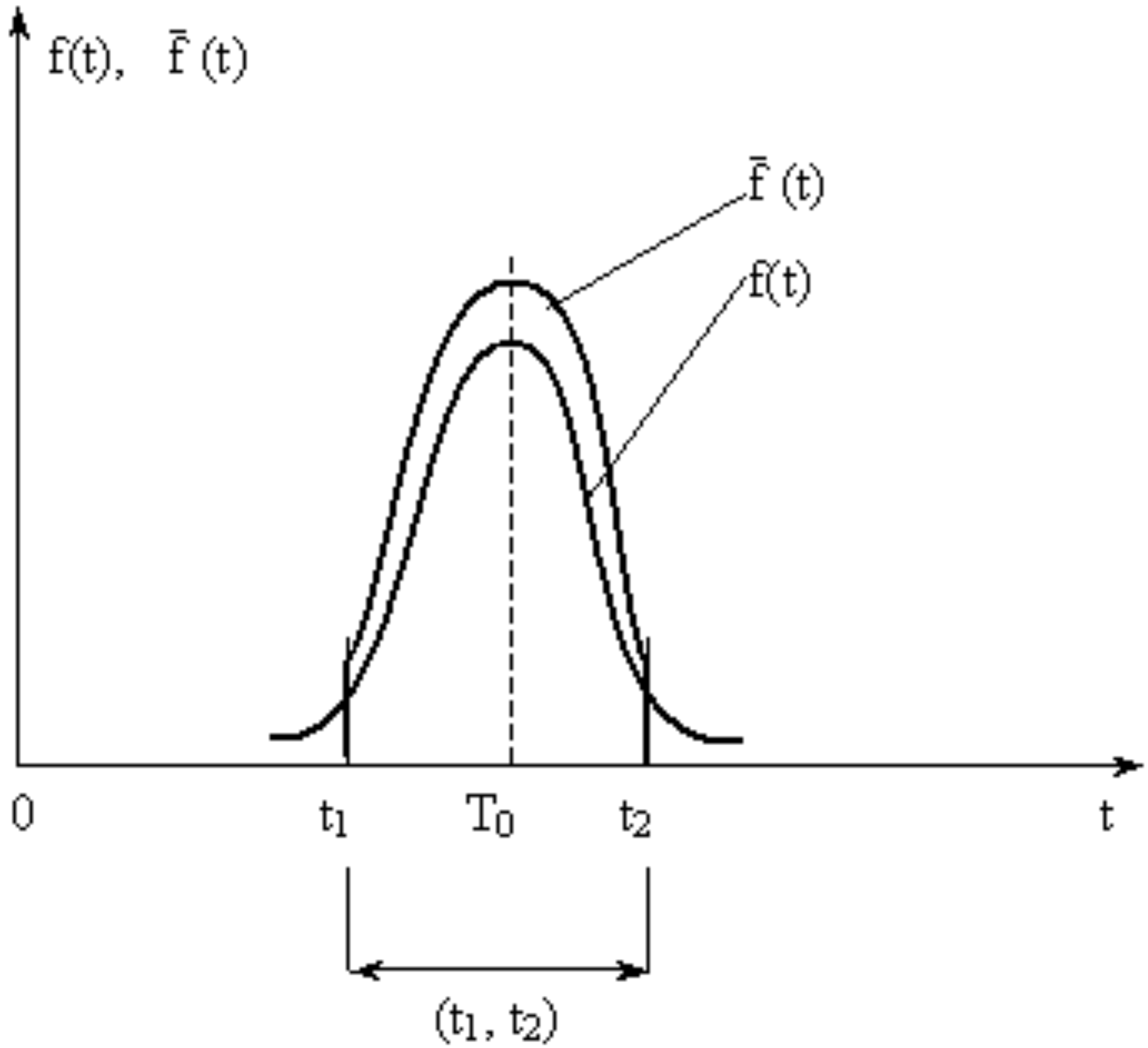
Усеченное нормальное распределение

$$\bar{f} = c\, f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(t - T_0)^2}{2S^2} \right\};$$

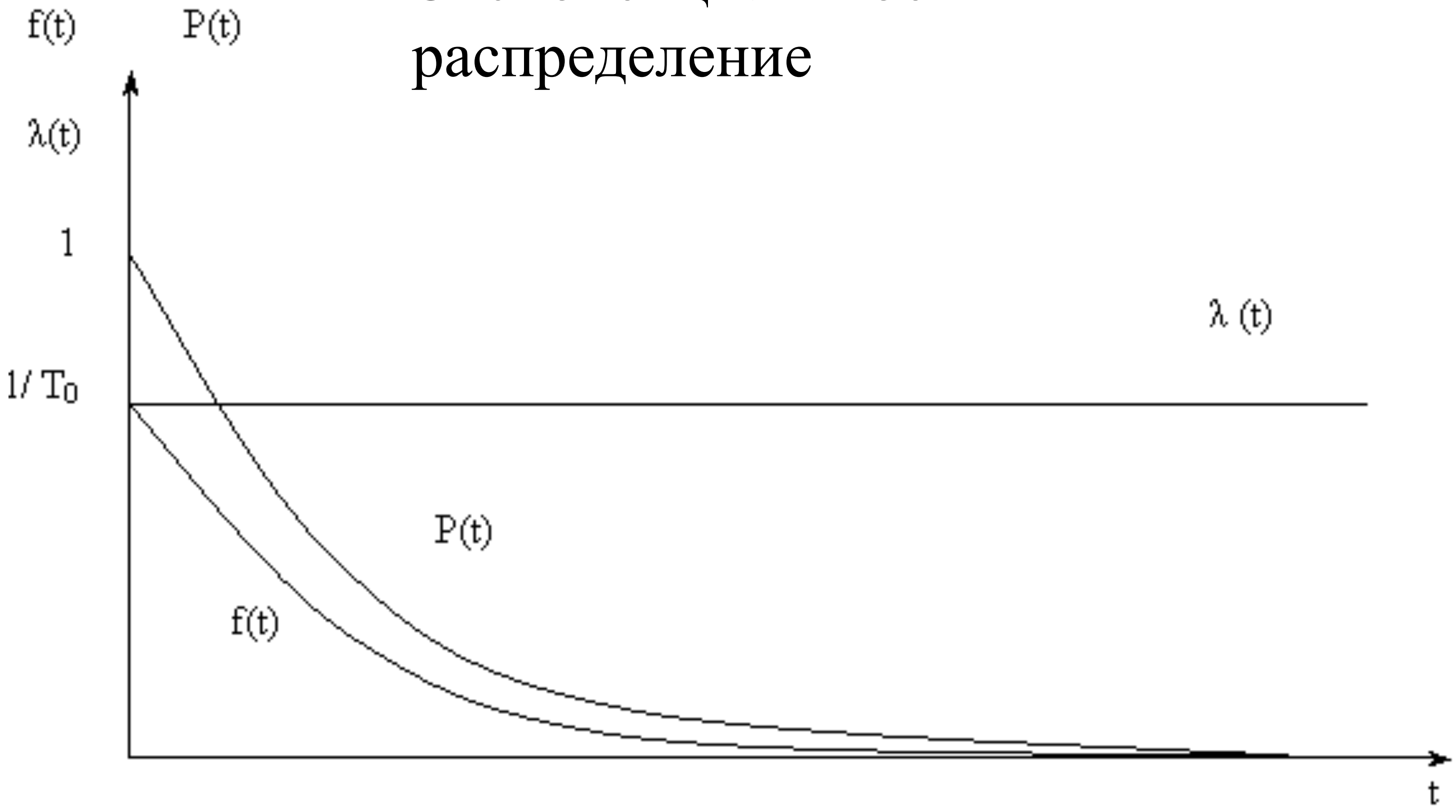
$$c = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt},$$





f(t), f̄ (t)
f̄ (t)
f(t)
0
t1
T0
t2
t
(t1, t2)

Экспоненциальное распределение



$$T_0 = \int_0^\infty P(t)dt = 1/\lambda\ , \qquad D = D\{t\} = \int_0^\infty (t - T_0)^2 f(t)dt = 1/\lambda^2.$$

Экспоненциальное распределение

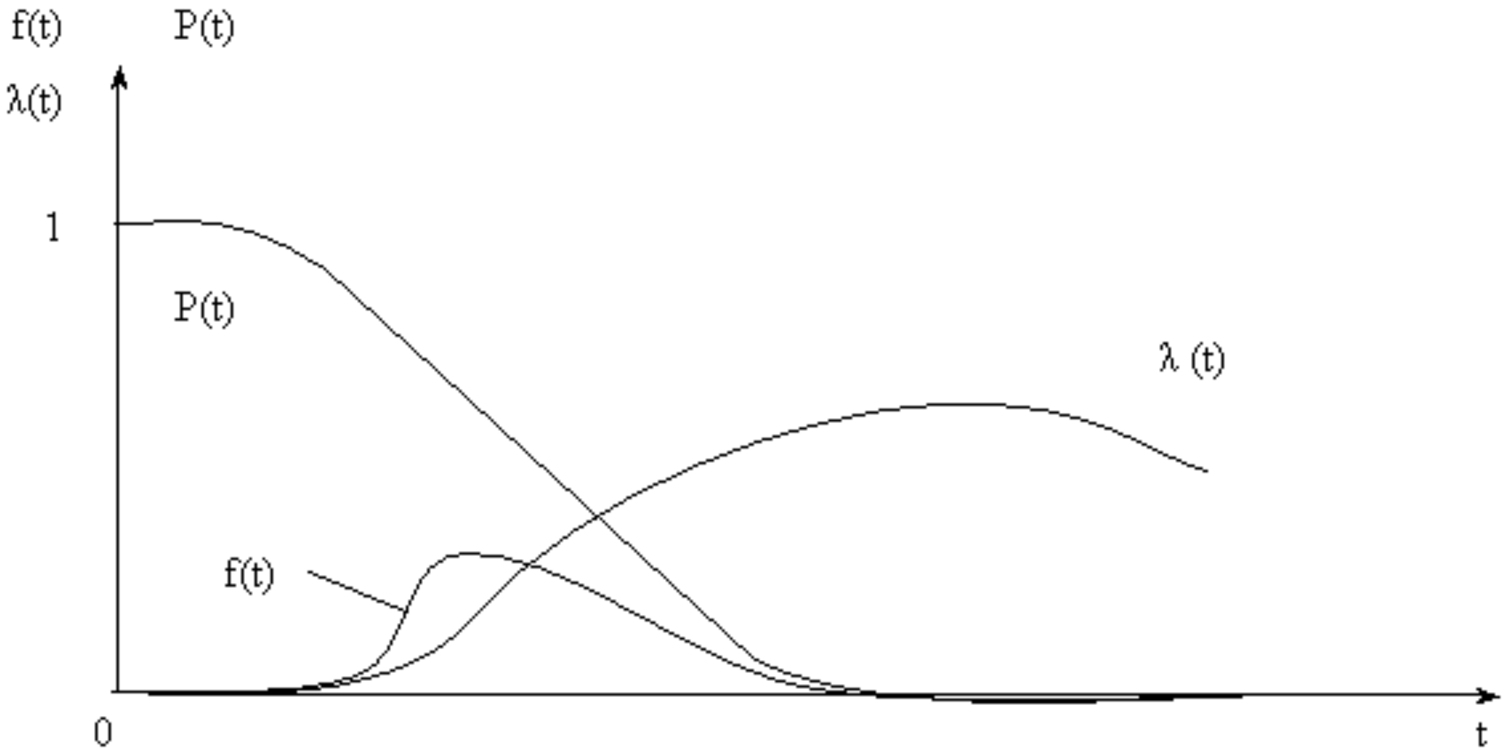
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Экспоненциальное распределение описывает наработку до отказа объектов, у которых отсутствует период приработки, а назначенный ресурс установлен до окончания периода нормальной эксплуатации.
Эти объекты можно отнести к «не стареющим.
Круг таких объектов широк: сложные технические системы с множеством компонентов, средства вычислительной техники и системы автоматического регулирования и т. п.
Экспоненциальное распределение широко применяется для оценки надежности энергетических объектов.

Логарифмически нормальное распределение

При логарифмически нормальном распределении нормально распределенным является логарифм (*lg t*) случайной величины *T*, а не сама эта величина.
Логарифмически нормальное распределение во многом более точно, чем нормальное описывает наработку до отказа тех объектов, у которых отказ возникает вследствие усталости, например, подшипников качения, электронных ламп и пр.

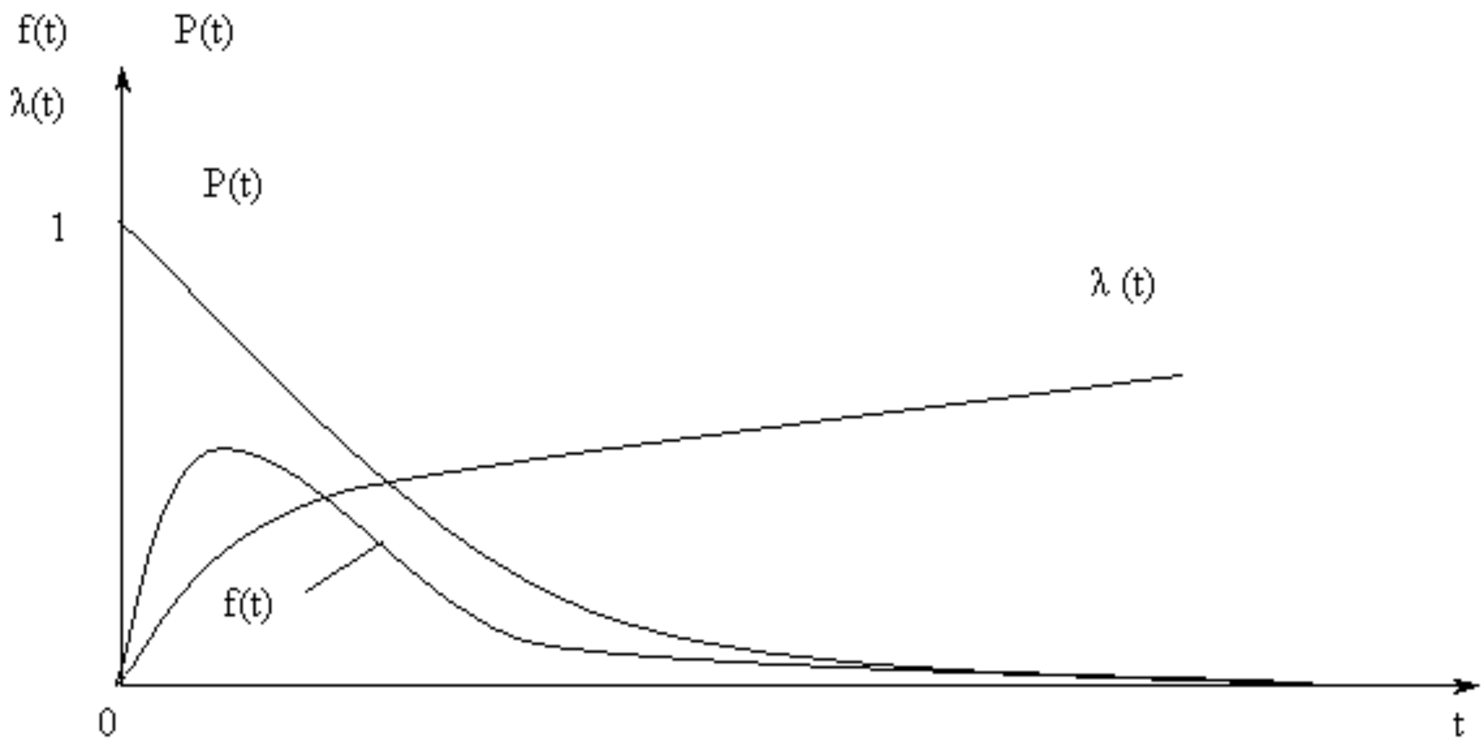
$$f(t) = \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln t - \mu)^2/(2\sigma^2)}$$


f(t)
P(t)
λ(t)
1
P(t)
λ (t)
f(t)
0
t

Гамма-распределение

$$f(t) = \frac{a^{\beta} \cdot t^{\beta - 1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-at),$$

Гамма-распределение наиболее хорошо описывает распределение суммы независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону



f(t)
P(t)
λ(t)
P(t)
1
λ (t)
f(t)
0
t

Распределение Вейбулла

Зависимость интенсивности отказов от времени

$$f(t) = \lambda_0 k t^{k-1} e^{-\lambda_0 t^k}$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 k t^{k-1}$$