СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Лекция 3.

Спектральные характеристики стационарных случайных функций

1. Представление стационарных случайных функций в виде гармонических колебаний со случайной амплитудой и случайной фазой
2. Спектральное разложение стационарной случайной функции

1. Представление стационарных случайных функций в виде гармонических колебаний со случайной амплитудой и случайной фазой

1. Рассмотрим случайную функцию

$$Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t \quad (1)$$

где ω постоянное действительное число,

U и V - некоррелированные случайные величины,

$m_u = m_v = 0,\ D_u = D_v = D$.

Преобразуем правую часть соотношения (1):

$$Z(t) = V\left(\frac{U}{V}\cos\omega t + \sin\omega t\right)$$

Положим, $\frac{U}{V} = tg\varphi$

получим:

$$Z(t) = \sqrt{U^2 + V^2}\,\sin(\omega t + \varphi)$$

где $\varphi = arctg\frac{U}{V}$

Следовательно, случайную функцию (1) можно истолковать как гармоническое колебание со случайной амплитудой $\sqrt{U^2 + V^2}$, случайной фазой $\omega t + arctg\frac{U}{V}$ и частотой ω.

U и *V* - центрированные случайные величины: $\mathring{U} = U, \ \mathring{V} = V$

Так как $m_z(t) = 0$, то -*Z(t)* центрированная случайная функция:

$$\mathring{Z}(t) = Z(t)$$

$Z(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$ - стационарная случайная функция.

Действительно, $m_z(t) = 0$, то есть постоянно при всех значениях аргумента. Найдем корреляционную функцию, приняв, что :

$$\mathring{Z}(t) = Z(t)$$

$$K_z(t_1, t_2) = M[\mathring{Z}(t_1)\mathring{Z}(t_2)] = M[Z(t_1)Z(t_2)] = M[(U\cos\omega t_1 + V\sin\omega t_1)(U\cos\omega t_2 + V\sin\omega t_2)]$$

Учитывая, что по условию $M(\mathring{U}^2) = M(\mathring{V}^2) = D$, а так как $\mathring{U} = U, \ \mathring{V} = V$, то $M(U^2) = M(V^2) = D$. Следовательно, случайные величины *U* и *V* не коррелированы, поэтому их корреляционный момент

$$\mu_{uv} = M(\mathring{U}\mathring{V}) = M(UV) = 0$$

Получим:

$$K_z(t_1, t_2) = D\cos\omega(t_2 - t_1)$$

2. Рассмотрим случайную функцию *X(t)*, которая является суммой конечного числа слагаемых вида (1):

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} [U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t] \qquad (2)$$

где U_i и V_i не коррелированны, их математические ожидания равны нулю, дисперсии величин с одинаковыми индексами равными между собой:

$$D(U_i) = D(V_i) = D_i$$

X(t) - центрированная функция, то есть $X(t) = \mathring{X}(t)$.

Действительно, математическое ожидание каждого слагаемого (2) равно нулю, следовательно, математическое ожидание $m_x(t)$ этой суммы также равно 0, значит

$$\mathring{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t)$$

Докажем, что *X(t)* - стационарная функция. Действительно $m_x(t) = 0$, при всех значениях аргумента, то есть постоянно.

Кроме того, слагаемые суммы (2) попарно не коррелированы, поэтому корреляционная функция этой суммы равна сумме корреляционных функций слагаемых. Т.к. корреляционная функция каждого слагаемого (2) зависит только от разности аргументов t_2-t_1, следовательно, корреляционная функция суммы (2) также зависит только от разности аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} D_i \cos \omega_i (t_2 - t_1)$$

или

$$k_x(\tau) = \sum_{i=1}^{n} D_i \cos \omega_i \tau \qquad (3)$$

где τ=t_2-t_1.

Таким образом, случайная функция *X(t)* вида (2) есть стационарная функция.

Принимая во внимание, приведенное выше, что

$$X_i(t) = \sqrt{U_i^2 + V_i^2}\,\sin(\omega_i t + \varphi_i)\text{ ,}$$

где $\varphi_i = arctg\dfrac{U_i}{V_i}$, заключаем, что сумму (2) можно Представить в виде

$$X_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{U_i^2 + V_i^2}\,\sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Таким образом, если случайная функция *X(t)* может быть представлена в виде суммы гармонических различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами, то *X(t)* - стационарная функция.

2. Спектральное разложение стационарной случайной функции

Определение 1. Спектральным разложением стационарной случайной функции называют представление этой функции в виде суммы гармонических колебаний различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами.

Покажем, что слагаемые суммы (2) попарно не коррелированы, то есть $R_{x_1 x_2}(t_1, t_2) = 0$.

Для простоты ограничимся двумя слагаемыми:

$$X_1(t) = U_1 \cos \omega_1 t + V_1 \sin \omega_1 t$$

$$X_2(t) = U_2 \cos \omega_2 t + V_2 \sin \omega_2 t$$

Убедимся, что их взаимная корреляционная функция равна нулю и, следовательно, они не коррелированы:

$$R_{x_1 x_2}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}_1(t_1)\overset{\circ}{X}_2(t_2)] = M[X_1(t_1) X_2(t_2)] =$$

$$= M[(U_1 \cos \omega_1 t_1 + V_1 \sin \omega_1 t_1)(U_2 \cos \omega_2 t_2 + V_2 \sin \omega_2 t_2)]$$

Выполнив умножение и вынеся неслучайные множители за знак математического ожидания, найдем

$$R_{x_1x_2}(t_1,t_2)=\cos\omega_1t_1\cos\omega_2t_2M[U_1U_2]+\cos\omega_1t_1\cos\omega_2t_2M[U_2V_1]+\sin\omega_2t_2\cos\omega_1t_1M[U_1V_2]+$$

$$+\sin\omega_1t_1\sin\omega_2t_2M[V_1V_2]$$

2.1. Дискретный спектр стационарной случайной функции.

А) Частоты - произвольные числа, количество их конечно.

Пусть стационарная случайная функция *X(t)* может быть представлена в виде спектрального разложения

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t)=\sum_{i=1}^{n}[U_i\cos\omega_it+V_i\sin\omega_it] \qquad (4)$$

причем, сохраняются допущения $m_x=0,\ D=const$.

Найдем дисперсию одной гармоники $X_i(t)$, учитывая, что следующие величины U_i и V_i не коррелированы и дисперсии величин с одинаковыми индексами равны между собой:

$$D(U_i)=D(V_i)=D_i$$

$$D[X_i(t)] = D[U_i \cos\omega_i t + V \sin\omega_i t] = D[U_i \cos\omega_i t] + D[V_i \sin\omega_i t] = \cos^2\omega_i t D[U_i] + \sin^2\omega_i t D[V_i] =$$
$$= (\cos^2\omega_i t + \sin^2\omega_i t) D_i = D_i.$$

Итак, $$D[X_i(t)] = D_i \quad (5)$$

Таким образом, дисперсия *i*-й гармоники спектрального разложения (4) равна дисперсии случайной величины U_i, или, что то же, дисперсии случайной величины V_i.

Найдем теперь дисперсию стационарной случайной функции *X(t)*, принимая во внимание, что слагаемые $X_i(t)$ не коррелированы и поэтому дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D[X(t)] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i(t)]$$

Используя (5), получим $D[X(t)] = \sum_{i=1}^{n} D_i$.

Итак, дисперсия стационарной случайной функции, которая может быть представлена в виде суммы конечного числа гармоник с произвольными частотами, равна сумме дисперсий составляющих ее гармоник.

Определение 2. Дискретным спектром стационарной случайной функции *X(t)* вида (4) называется совокупность дисперсий всех составляющих ее гармоник.

Б) Равностоящие частоты, множество их бесконечное (счетное).

Рассмотрим спектральное разложение вида

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty}[U_i \cos\omega_i t + V_i \sin\omega_i t]$$

в котором число частот бесконечно (счетно), они равноотстоящие, причем разность любых двух «соседних» частот

$$\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i = \pi/T, (i = 1,\ 2,...)$$

где T - действительное положительное число.

Таким образом,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T};\quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T};\ ...,\ \omega_i = \frac{\pi i}{T},\ ...$$

Корреляционная функция рассматриваемой стационарной случайной функции *X(t),* при $\omega_i = \frac{\pi_i}{T}$, $n = \infty$, имеет вид:

$$k_x(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos\frac{\pi_i}{T}\tau \qquad (6)$$

При $\tau = 0$, учитывая, что $k_x(0) = D_x$, получим

$$D_x = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \qquad (7)$$

Из (6) видно, что $k_x(\tau)$ - периодическая функция с периодом 2T, поэтому коэффициенты Фурье

$$D_i = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)\cos\frac{\pi i}{T}\tau d\tau$$

или, учитывая, что и подынтегральная функция - четная,

$$D_i = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} k_x(\tau)\cos\omega_i\tau d\tau$$

Если каждой частоте $\omega_i = \frac{\pi i}{T} (i = 1, 2,...)$ ставить в соответствие дисперсию D_i, то получим, как и в случае конечного числа произвольных частот, дискретный линейчатый спектр, причем число спектральных линий (ординат D_i) бесконечно (счетно) и они равноотстоящие.

Теорема 1. Если ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ скалярного стационарного случайного процесса $\xi(t,\omega), t \in T = [0, l]$, с нулевым математическим ожиданием является непрерывной на отрезке [-*l*, *l*], удовлетворяет на нем условиям Дирихле и представима в виде

$$\begin{cases} K_\xi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 \cos\frac{2\pi k\tau}{l}, \\ \sigma_k^2 = \frac{2}{l}\int_0^l K_\xi(\tau)\cos\frac{2\pi k\tau}{l}d\tau, \ k = \overline{0,\infty} \end{cases}$$

то случайный процесс $S_n^\xi(t,\omega), t \in T$, определяемый

$$S_n^\xi(t,\omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\omega)\cos\frac{2\pi kt}{l} + \beta_k(\omega)\sin\frac{2\pi kt}{l}, t \in T$$

является стационарным (где σ_k^2 - дисперсия случайных амплитуд $\alpha k(\omega)$ и $\beta k(\omega)$, соответствующих частоте $\frac{2\pi k}{l}$).

2.2. Непрерывный спектр стационарной случайной функции

Определение 3. Спектральной плотностью стационарной случайной функции X(t) называют функцию $s_x(\omega)$, которая связана с корреляционной функцией $k_x(\tau)$ взаимно обратными преобразованиями Фурье:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (8) \qquad k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \quad (9)$$

Эти формулы называются формулами Винера - Хинчина. В действительной форме они представляют собой взаимно обратные косинус преобразования Фурье:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau \quad (10) \qquad k_x(\tau) = 2\int_{0}^{\infty} s_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega \quad (11)$$

Важное значение спектральной плотности состоит в том, что, зная ее, можно найти корреляционную функцию, и обратно.

Из (10) следует, что спектральная плотность - четная функция:

$$s_x(-\omega) = s_x(\omega)$$

Вероятностный смысл функции $s_x(\omega)$. Положив *τ = 0* в соотношении (11) и учитывая, что $k_x(\tau)$, $s_x(\omega)$ - четная функция, получим:

$$D_x = 2\int_0^\infty s_x(\omega)d\omega = \int_0^\infty s_x(\omega)d\omega$$

Дисперсия стационарной случайной функции *X(t)* представляет собой «сумму» элементарных дисперсий $s_x(\omega)d\omega = s_x(\omega)\Delta\omega$, каждая элементарная дисперсия соответствует частичному интервалу частот $\Delta\omega$. В частности, частичному интервалу $\Delta\omega = \omega_в - \omega_a$ соответствует дисперсия

$$D_x = \int_{\omega_a}^{\omega_b} s_x(\omega)d\omega$$

По теореме о среднем,

где

$$D_x = (\omega_b - \omega_a)s_x(\omega_c) = \Delta\omega s_x(\omega_c)$$

$$\omega_a < \omega_c < \omega_b$$

Отсюда

$$s_x(\omega_c) = D_x / \Delta\omega$$

Из чего заключаем:

а) величину $s_x(\omega_c)$ можно истолковывать как среднюю плотность дисперсии на частном интервале $\Delta\omega$, содержащим частоту ω_c;

б) при $\Delta\omega \to 0$ естественно считать, что $s_x(\omega_c)$ - плотность дисперсии в точке ω_c. Поскольку никаких ограничений на ω_c не наложено, полученный результат справедлив для любой частоты.

Итак, спектральная плотность описывает распределение дисперсий стационарной случайной функции по непрерывно изменяющейся частоте. Спектральная плотность – неотрицательная функция $s_x(\omega) \geq 0$.

Определение 4. *Нормированной спектральной плотностью стационарной случайной функции X (t)* называют отношение спектральной плотности к дисперсии случайной функции:

$$s_{x\,норм}(\omega) = s_x(\omega)/D_x = \frac{s_x(\omega)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)d\omega}$$

Пусть *X(t)* и *У(t)* - стационарные и стационарно связанные случайные функции со взаимной корреляционной функцией $r_{xy}(\tau)$.

Определение 5. *Взаимной спектральной плотностью* двух стационарных и стационарно связанных случайных функций *X(t)* и *Y(t)* называют функцию $s_{xy}(\omega)$, определяемую преобразованием Фурье:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

Взаимная корреляционная функция выражается через взаимную спектральную плотность с помощью обратного преобразования Фурье:

$$r_{xy}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

2.3. Дельта – функция

Дельта-функцию определяют тем условием, что она ставит в соответствие всякой непрерывной функции *f(t)* ее значение при *t=0*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

Правую часть равенства можно представить в виде:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt \qquad (\varepsilon>0),$$

где

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 \ \ при \ |t| \geq \varepsilon, \\ 1/(2\varepsilon) \ \ при \ |t| < \varepsilon. \end{cases}$$

Дельта - функцию можно рассматривать как предел последовательности функции $\delta_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$.

Учитывая, что, при $\delta_\varepsilon(t) \to 0$, при $t \neq 0, \delta_\varepsilon(t) \to \infty$ при $t \to 0$ и $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$, условно пишут

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \ \ при \ t \neq 0, \\ \infty \ \ при \ t = 0. \end{cases}$$

Физически дельта-функцию можно истолковать как плотность единичной массы, сосредоточенной в нуле. Можно доказать, что дельта - функция представима преобразованием Фурье:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \qquad (12)$$

2.4. Стационарный белый шум

Определение 6. Стационарным белым шумом называют стационарную случайную функцию *X(t)*, спектральная плотность которой постоянна:

$$s_x(\omega) = s = const$$

Найдем корреляционную функцию белого шума.

Используя (9), получим

$$k_x(\tau) = s\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega$$

Приняв во внимание (12), окончательно имеем

$$k_x(\tau) = 2\pi s\delta(\tau) \quad (13).$$

Таким образом, корреляционная функция стационарного белого шума пропорциональна дельта-функции; коэффициент пропорциональности $2\pi s$ называют интенсивностью стационарного белого шума.

Дельта - функция равна нулю при всех $\tau \neq 0$ и поэтому корреляционная функция $k_x(\tau)$ также равна нулю при этих же значениях τ. Это означает некоррелированность любых двух его сечений стационарного белого шума - случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ $(t_1 \neq t_2)$.