Решение задач физического содержания на ЕГЭ по математике

Презентацию разработали:
Юшманова О.М. – учитель математики
Бурлова О.Н. – учитель физики

Решение предложенных задач можно условно разделить на несколько шагов:

- Анализ условия и вычленение формулы, описывающей заданную ситуацию, а также значений параметров констант и начальных условий
- Математическая интерпретация задачи – сведение её к уравнению или неравенству и их решение
- Анализ полученного решения

С точки зрения физики все предложенные задачи можно условно разделить на 4 группы

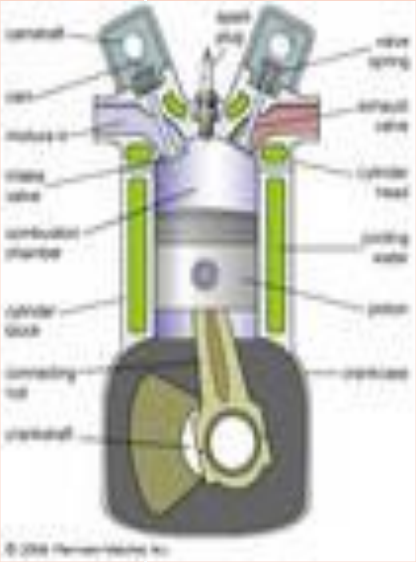
- задачи с известными в физике формулами
- задачи с формулами, которые в физике можно вывести
- задачи с использованием уравнения зависимости одной физической величины от другой
- задачи с применением физических формул, которые не изучаются в школе

Задачи с известными в физике формулами

Задача на расчет механической работы	формула
	

Задачи с известными в физике формулами

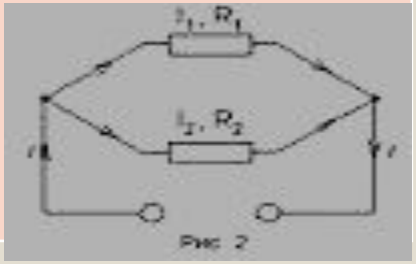
Задача на нахождение КПД	Формула в физике



Задачи, формулы которых в физике можно вывести

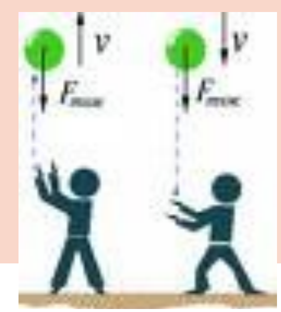
Задача на нахождение мощности	формула
Трактор тащит сани с силой F = 32 кН, направленной под острым углом В к горизонту. Мощность (*в киловаттах*) трактора при скорости v= 5м/с равна $N = Fv\cos\text{B}$ При каком максимальном угле В (*в градусах*) эта мощность будет не менее 80 кВт?	$\boldsymbol{A = FS\cos a}$ $\boldsymbol{S = vt}$ $A = Fvt\cos a$ $N = \frac{A}{t}$ $N = \frac{Fvt\cos\alpha}{t}$ $N = Fv\cos\alpha$

Задачи, формулы которых можно вывести

Предложенная задача	Вывод формулы
В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 60 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в Омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R1 и R2 их общее сопротивление даётся формулой $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ А для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 10 Ом.	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ $\frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ 

Задачи с использованием уравнения зависимости

Задача на движение под действием силы тяжести	Уравнение движения
Высота над Землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}2 + 10t + 5t^2$ Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более трёх метров?	$h = h_0 + v_0 t + \dfrac{g t^2}{2}$, где g = 10 м/c^2 v_0 = 10 м/с h_0 =1,2 м $h(t) = 1{,}2 + 10t + 5t^2$



Задачи, формулы которых в школе на изучаются

Предложенная задача

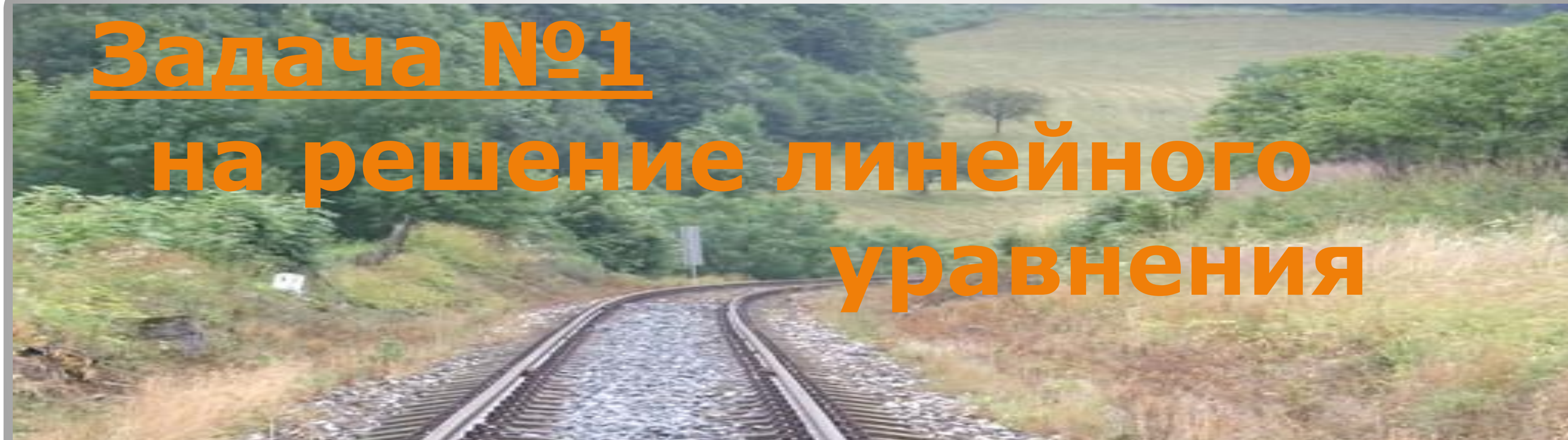
Задача астрономического содержания

Предложенная задача

С точки зрения математики все задачи сводятся к решению <u>уравнения или неравенства</u>

- Линейного
- Квадратного
- Степенного
- Рационального или иррационального
- Показательного
- Логарифмического
- Тригонометрического

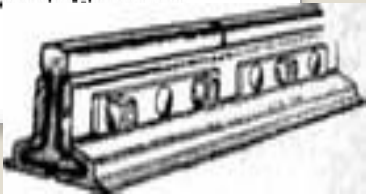
Задача №1
на решение линейного уравнения



1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ $(^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.



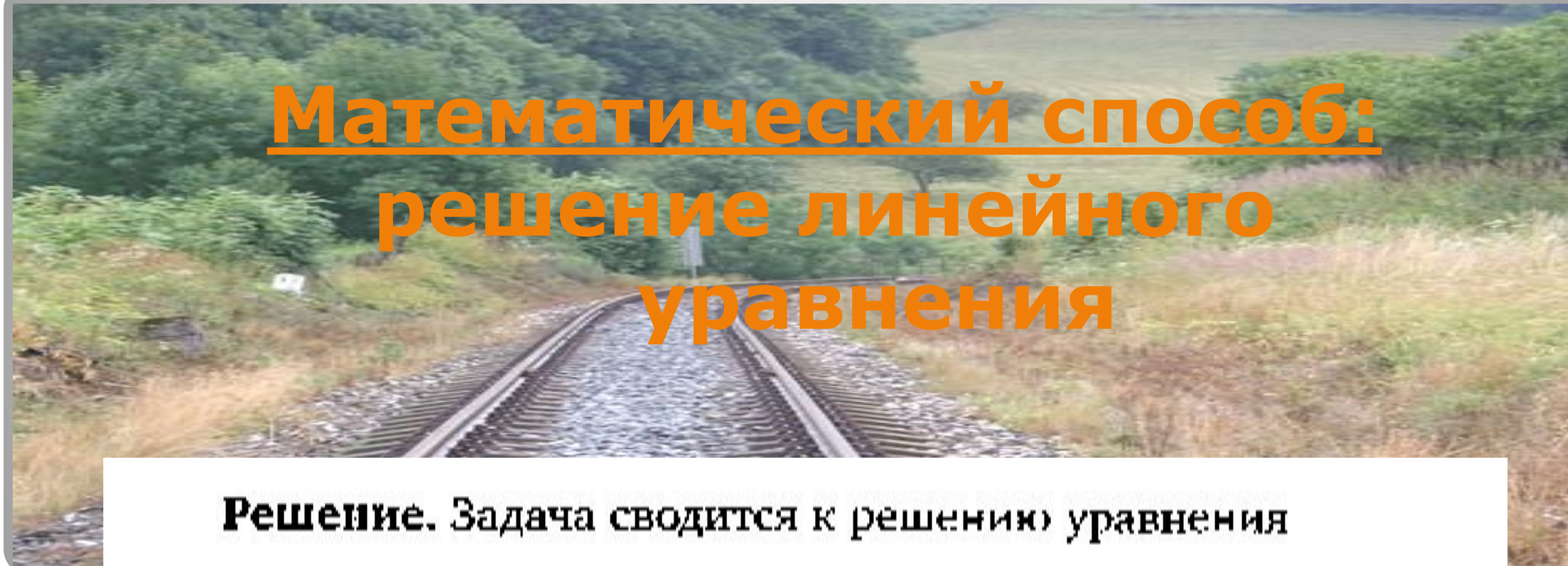
Физическое обоснование

<u>Зазор</u> - это то расстояние, которое оставляют между рельсами, для того, чтобы они могли расширяться при нагревании. А нагревание происходит вследствие трения, возникающего при прохождении поезда по рельсам

l_0 - начальная длина рельса

l - конечная длина рельса

$l - l_0$ - изменение длины



Математический способ: решение линейного уравнения

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$l(t^\circ) - l_0 = 3 \text{ (мм)}$$

при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}$ $(^\circ\text{C})^{-1}$:

$$l(t^\circ) - l_0 = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0(1+\alpha\cdot t^\circ) - l_0 = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l_0\alpha t^\circ = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow 10\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5} t^\circ = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^\circ = \frac{3\cdot 10^{-3}}{1{,}2\cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^\circ = 25\ ^\circ\text{C}.$$

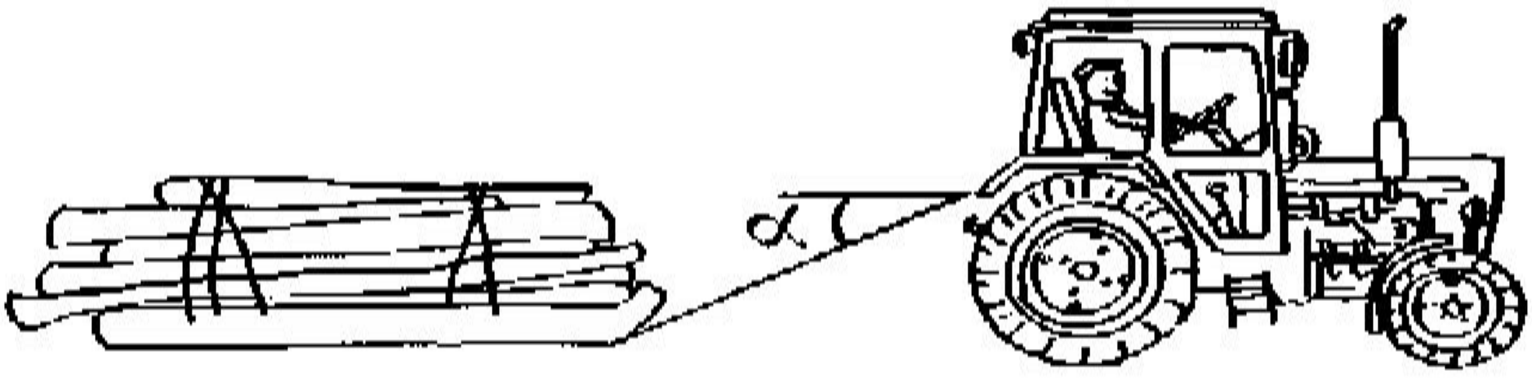
Ответ: 25.

Задача № 2 на решение тригонометрического неравенства

9а. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 50$ м равна

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 2000 кДж?



Физическое обоснование

- Тело совершает работу тогда, когда под действием силы оно движется.

Формула для расчёта работы: $\boldsymbol{A = FS\,cos\alpha}$

По условию задачи:

$$F = 80\ \text{кН} = 80000\text{Н}, \quad S = 50\text{м}, \quad A = 2000\ \text{кН} = 2000000\text{Дж}$$

$$2000000\text{Дж} = 80000\text{Н} \cdot 50\text{м} \cdot cos\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{2000000\text{Дж}}{80000\text{Н} \cdot 50\text{м}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60°$$

Анализ условия: $A \geq 2000\ \text{кДж}$, если $0 < \alpha \leq 60°$, значит максимальный угол будет $60°$

Математический способ: решение тригонометрического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$A \geqslant 2000$$

на интервале $(0°; 90°)$ при заданных значениях силы $F = 80$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$A \geqslant 2000 \iff 80 \cdot 50 \cdot \cos\alpha \geqslant 2000 \iff$$

$$\iff \cos\alpha \geqslant \frac{1}{2} \overset{0° < \alpha < 90°}{\iff} 0° < \alpha \leqslant 60°.$$

Ответ: 60.

Задача № 3 на решение степенного неравенства

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выраженная в Ньютонах, будет определяться по формуле:

$$F_A = \rho g l^3$$

где $\rho = 1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – плотность воды,

l – длина ребра куба (в метрах), а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить эксплуатацию аппарата в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 78400Н? Ответ выразите в метрах.

Физическое обоснование задачи

- На погруженное в жидкость тело действует сила Архимеда, которая вычисляется по формуле:

$\boldsymbol{F_A = \rho_ж V_T g}$. Так как конструкция имеет кубическую форму с длиной ребра $\boldsymbol{l}$, то

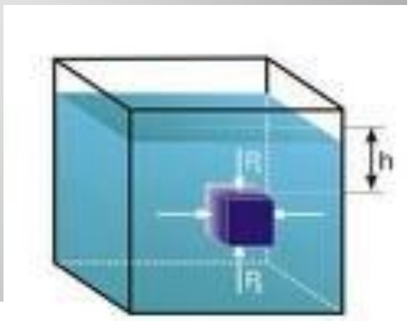
$\boldsymbol{V_T = l^3}$. По условию задачи: $\boldsymbol{F_A = 78400}$Н, $\boldsymbol{g = 9,8\ \frac{Н}{кг}}$

$\boldsymbol{\rho = 1000\ \frac{кг}{м^3}}$

$78400 = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3, \qquad l^3 = \frac{78400}{1000 \cdot 9{,}8} = 8, \qquad l = 2$

Анализ условия задачи:

$\boldsymbol{F_A \leq 78400}$Н при $\boldsymbol{l \leq 2}$м



Ответ: 2 м

Математический способ: решение степенного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$F_A \leqslant 78\,400$$

при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

$$F_A \leqslant 78\,400 \Leftrightarrow 1000 \cdot 9{,}8 \cdot l^3 \leqslant 78\,400 \Leftrightarrow l^3 \leqslant 8 \Leftrightarrow l \leqslant 2 \text{ (м)}.$$

Ответ: 2.

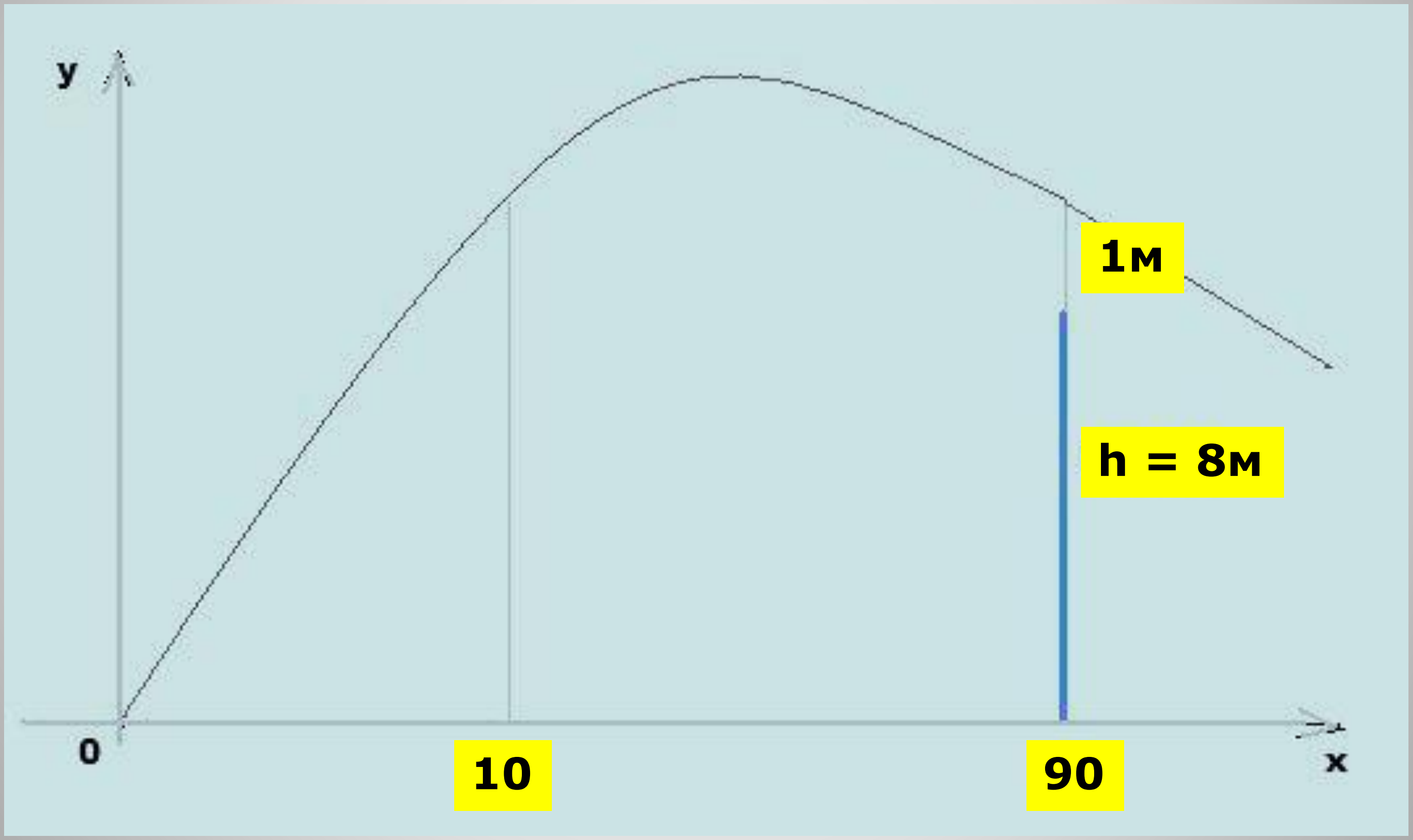
Задача № 4 на решение квадратного неравенства

2. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Физическое обоснование



Математический способ: решение квадратного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства $y \geqslant 9$: при заданных значениях параметров a и b

$$y \geqslant 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2 + x \geqslant 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 100x + 900 \leqslant 0 \Leftrightarrow 10 \leqslant x \leqslant 90 \text{ м.}$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние — 90 метров.

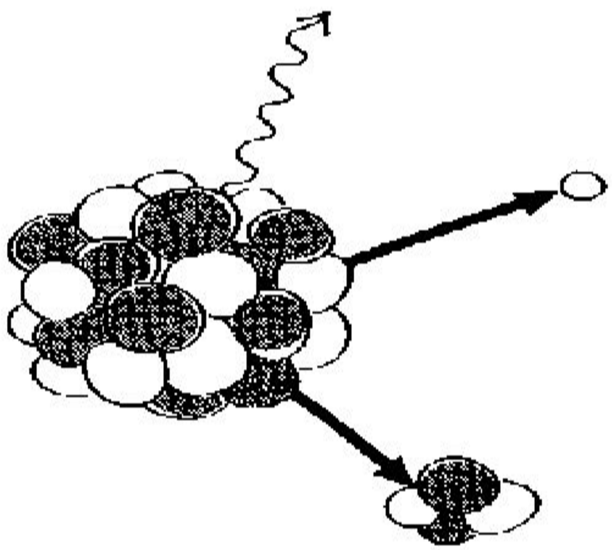
Ответ: 90.

Задача № 5 на решение показательного неравенства

6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?



Физическое обоснование задачи

<u>Период полураспада </u> – это время (Т), за которое распадается половина ядер радиоактивного вещества.

Если период Т = 10 мин, а m = 40 мг, то через 10 минут половина вещества распадётся (20 мг) и изотопа останется 20 мг.

Через 20 минут останется 10 мг.

Через 30 минут – 5 мг и т.д.

Решение задачи с помошью показательного уравнения

- $$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

где $m_0 = 40$мг, $T = 10$ мин, $m = 10$ мг

Составим уравнение: 10=40$\cdot 2^{-\frac{t}{10}}$

Решение : $\frac{10}{40} = 2^{-\frac{t}{10}}$ $\quad 4 = 2^{\frac{t}{10}}$ $\quad 2^2 = 2^{\frac{t}{10}}$

$2 = \frac{t}{10}$ $\quad$ <u>t = 20мин</u>

Анализ условия задачи: так как $m \geq 10$, то $t \leq 20$мин

Математический способ: решение показательного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$m(t) \geq 10$$

при заданных значениях параметров $m_0 = 40$ мг и $T = 10$ мин:

$$40 \cdot 2^{-t/10} \geq 10 \Leftrightarrow 2^{-t/10} \geq 2^{-2} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} \geq -2 \Leftrightarrow t \leq 20 \text{ мин.}$$

Ответ: 20.

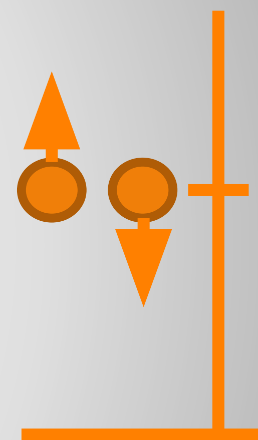
Задача № 6 на решение квадратного уравнения или неравенства

Высота над Землёй брошенного вверх мяча меняется по закону $\boldsymbol{h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2}$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько времени мяч будет находиться на высоте не менее 3-х метров?

1 способ: на решение квадратного уравнения

- Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте 3м.

Так как $h(t) = 3\text{м}$, то можно составить уравнение **3 = 1,6 + 8t - 5**t^2



Решая данное уравнение, получаем два корня: $\boldsymbol{t_1 = 0,2}$ и $\boldsymbol{t_2 = 1,4}$

<u>Анализ полученного результата</u>:

Так как мяч был брошен вверх, то на высоте 3м он побывал 2 раза: через 0,2с и через 1,4с, то есть на высоте более 3м мяч был 1,2с. **Ответ:** $\boldsymbol{t = 1,2}$с

2 способ: решение квадратного неравенства

По условию высота **h(t) ≥ 3**,

т.е. **$1{,}6 + 8t - 5t^2 \geq 3$**.

$-5t^2 + 8t + 1{,}6 - 3 \geq 0$; **$5t^2 - 8t + 1{,}4 \leq 0$**.

Неравенство можно решить методом интервалов:

так как $t_1 = 0{,}2$; $t_2 = 1{,}4$, то $0{,}2 \leq t \leq 1{,}4$

Решением будет промежуток между корнями: [0,2; 1,4].

Значит, начиная со времени **t_1** и до времени **t_2**, мяч будет находиться на высоте не менее трех метров. Величина этого временного промежутка будет: **1,4 - 0,2 = 1,2.**

Ответ: 1,2.

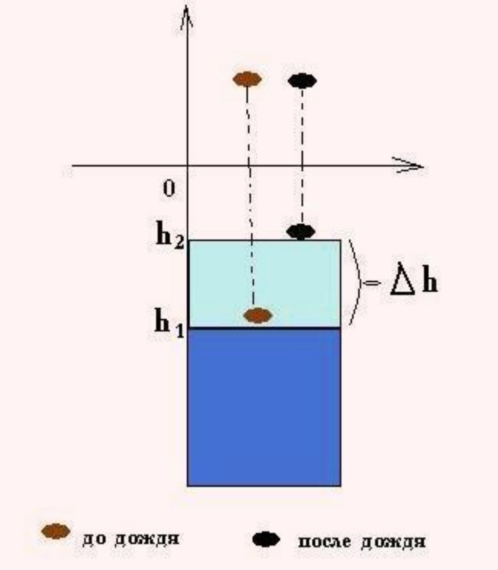
Задача № 7 на решение квадратного уравнения

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле

$$h = -5t^2$$

где h – расстояние (в метрах), t – время падения (в секундах), прошедшее с момента броска. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды в колодце после дождя, чтобы время падения камешков изменилось на 0,2с. Ответ выразите в метрах.

Физическое обоснование



Пусть $\mathbf{h_1}$ - уровень воды до дождя,
$\mathbf{h_2}$ - уровень воды после дождя,
$\mathbf{t_1}$ - время падения камешка до поверхности до дождя, $\mathbf{t_2}$ - время падения после дождя.

За нулевую отметку принимаем точку, лежащую на поверхности земли, тогда h_1 и h_2 – координаты уровней воды и они отрицательны, что можно видеть из формулы $\boldsymbol{h = -5t^2}$. После дождя уровень воды повысился на $h = h_1 - h_2$ метра.

Математический способ: решение уравнения

Задача сводится к решению уравнения

$$h = -5t^2$$

По условию задачи t_1=0,6с, а t_2 = 0,4 с.

$h = |h_1 - h_2|$ = | $-5 \cdot t_1^2 - (-5 \cdot t_2^2)$| =

=|$-5 \cdot 0{,}6^2 + 5 \cdot 0{,}4^2$| = 5|$0{,}6^2 - 0{,}4^2$| = $5 \cdot 0{,}2$ =

1(метр).

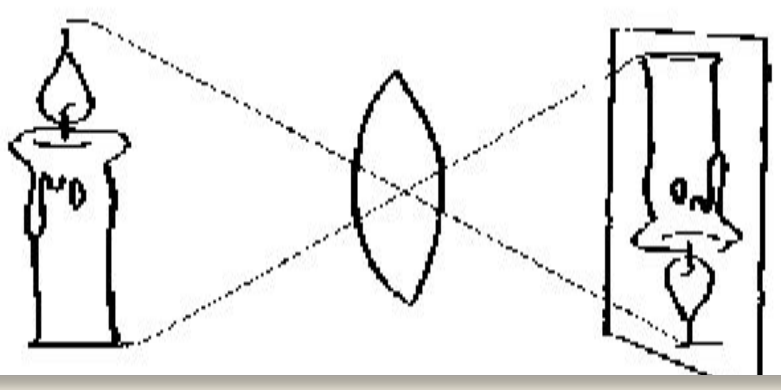
То есть после дождя уровень повысится на 1 метр.

Задача № 8 на решение квадратного уравнения или неравенства

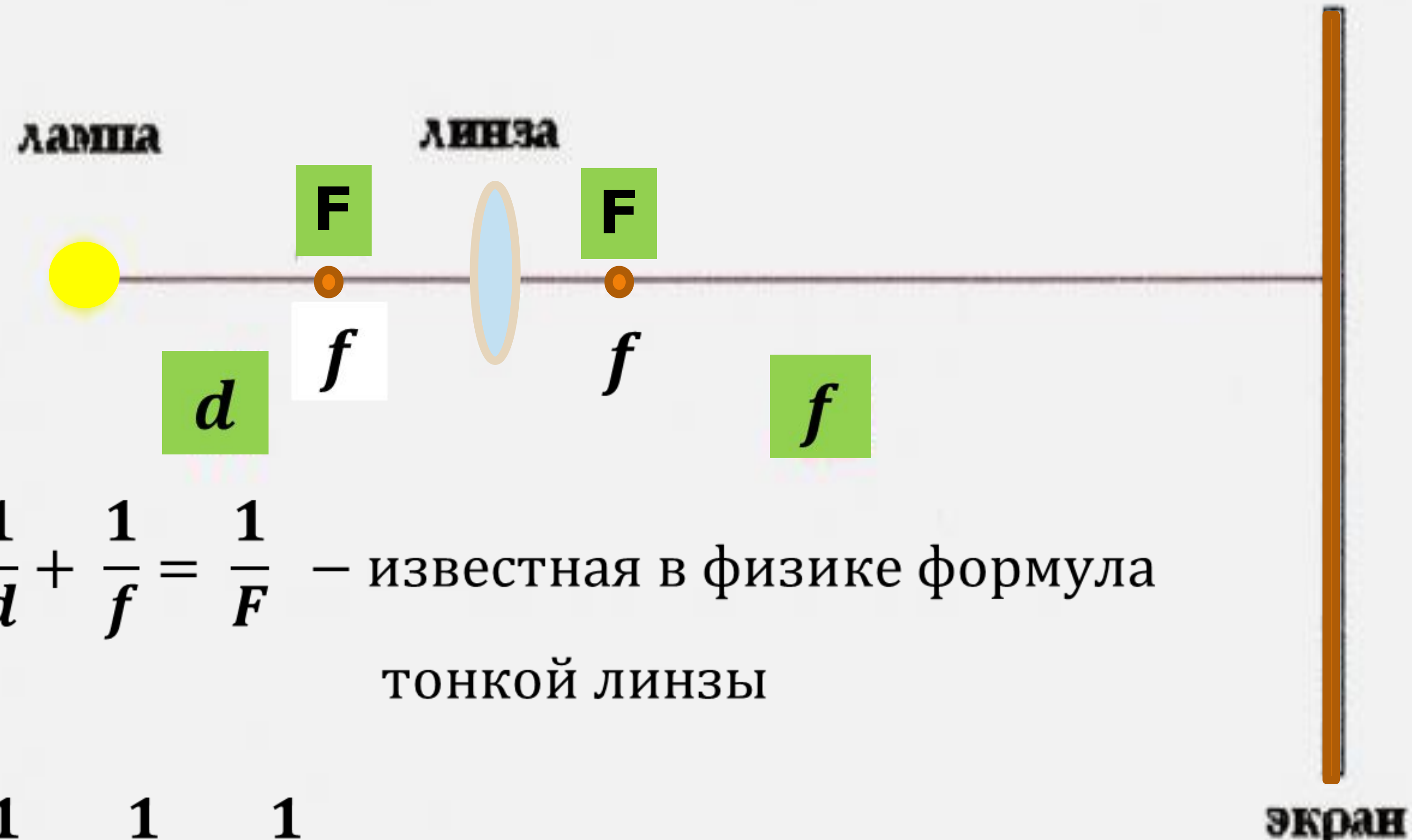
4а. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.



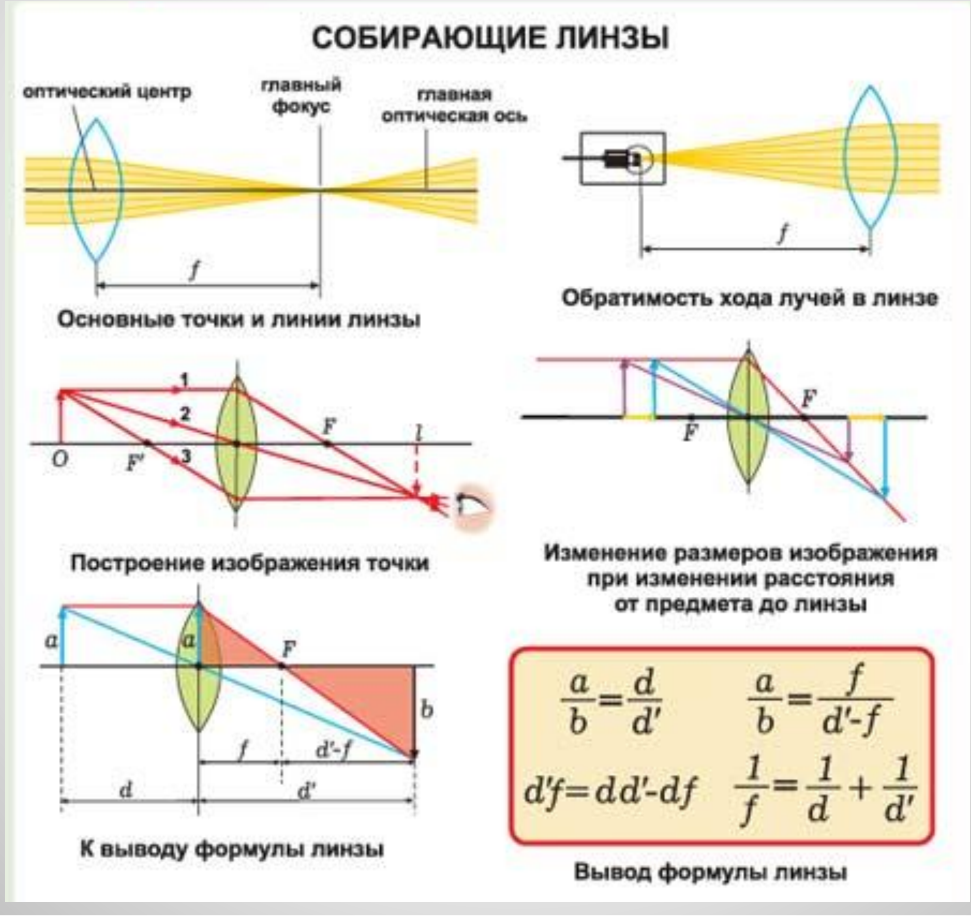
Физическое обоснование задачи



$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$ – известная в физике формула тонкой линзы

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$ – данная в задаче формула

Физическое обоснование задачи



Задача № 8 на решение уравнения

Решение. Поскольку $f = 30$, имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному значению d_1 соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36 \text{ см}.$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение $d_1 = 36$ см удовлетворяет условию.

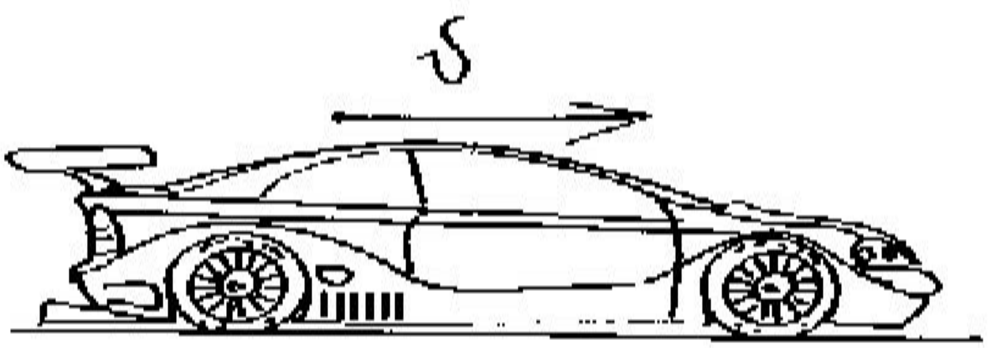
Ответ: 36.

Задача № 9 на решение иррационального неравенства

5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.



Физическое обоснование задачи

- По условию задачи автомобиль движется равноускоренно без начальной скорости, поэтому можно воспользоваться известной в физике формулой $s = \frac{v^2}{2a}$

Выразим скорость $v^2 = 2aS$

$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2al},$ где $l = S$

а $= \frac{v^2}{2l} = \frac{100^2}{2} = 5000$ – это и есть наименьшее ускорение

Решение иррационального неравенства

Решение. Найдём, при каком ускорении автомобиль достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2la}=100$ при известном значении длины пути $l=1$ км:

$$\sqrt{2la}=100 \Leftrightarrow \sqrt{2a}=100 \Leftrightarrow 2a=10000 \Leftrightarrow a \geqslant 5000 \text{ км/ч}^2.$$

Если его ускорение будет превосходить найденное, то, проехав один километр, автомобиль наберёт большую скорость, поэтому наименьшее необходимое ускорение равно 5000 км/ч^2.

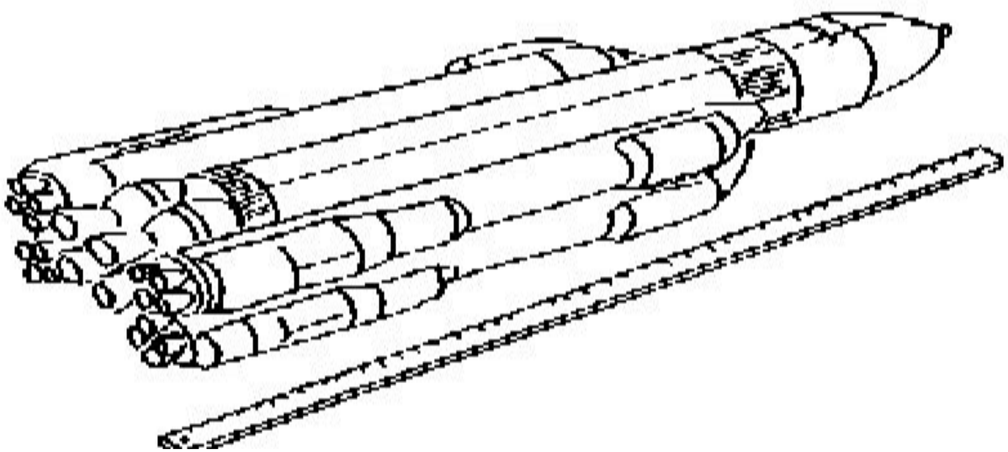
Ответ: 5000.

Задача № 10 на решение иррационального уравнения

5а. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 10$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 8 м? Ответ выразите в км/с.



Физическое обоснование задачи

- При движении со скоростями $\boldsymbol{v}$, близкими к скорости света $\boldsymbol{c}$, происходит сокращение размеров тел. В задаче дана формула из физики, которая изучается в теме: «Основы теории относительности» $\boldsymbol{l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Физические величины: с, $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{l_0}$ известны.

Решение иррационального уравнения

Решение. Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 8 м. Задача сводится к решению уравнения

$$l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=8$$

при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0=10$ м и известной величине скорости света $c=3\cdot10^5$ км/с:

$$10\sqrt{1-\frac{v^2}{9\cdot10^{10}}}=8 \Leftrightarrow \frac{v^2}{9\cdot10^{10}}=\frac{36}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v=\frac{6}{10}\cdot3\cdot10\cdot10^5 \Leftrightarrow v=180\,000 \text{ км/с}.$$

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 8 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

Ответ: 180 000.

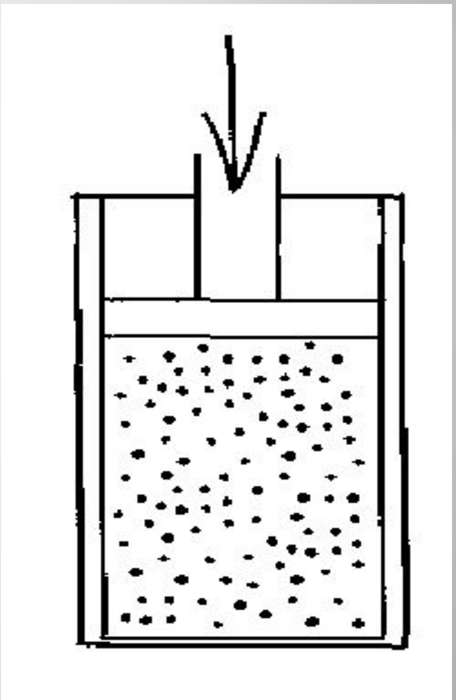
Задача № 10 на решение показательного неравенства

6а. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5$ Па $\cdot$ м^5, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $3{,}2 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Физическое обоснование задачи



Решение показательного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$p(V) \geqslant 3{,}2 \cdot 10^6$$

при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\mathrm{const} = 10^5$ Па $\cdot$ м^5:

$$10^5 \cdot V^{-5/3} \geqslant 3{,}2 \cdot 10^6 \Leftrightarrow V^{5/3} \leqslant \frac{1}{32} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^{3/5} \Leftrightarrow V \leqslant \frac{1}{8}\ \text{м}^3.$$

Ответ: 0,125.

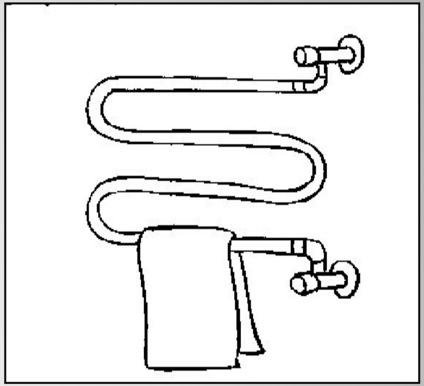
Задача № 11 на решение логарифмического уравнения

7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_п = 20°C$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в = 60°C$. Через радиатор проходит $m = 0{,}3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры $T\,(°C)$, причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п},$$

где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{°\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Физическое обоснование задачи



На первый взгляд формула $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$ очень сложная и учащимся незнакома, так как в школьном курсе физики она не изучается, но если внимательно прочитать условие задачи, то видно, что в этой задаче все физические величины заданы, кроме температуры ***T***

$$T_п = 20°C, \quad T_в = 60°C, \quad m = 0{,}3кг, \quad x = 84м$$

$$c = 4200 \frac{Дж}{кг°C}, \quad \gamma = 21 \frac{Вт}{°C}, \quad \alpha = 0{,}7$$

решение логарифмического уравнения

Решение. Задача сводится к решению уравнения $x = 84$ при заданных значениях теплоёмкости, коэффициента теплообмена и постоянной α:

$$x = 84 \Leftrightarrow \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}7 \cdot \frac{4200 \cdot 0{,}3}{21} \cdot \log_2 \frac{60 - 20}{T - 20} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{40}{T - 20} = 2 \Leftrightarrow \frac{40}{T - 20} = 4 \Leftrightarrow T - 20 = 10 \Leftrightarrow T = 30^\circ C.$$

Ответ: 30.

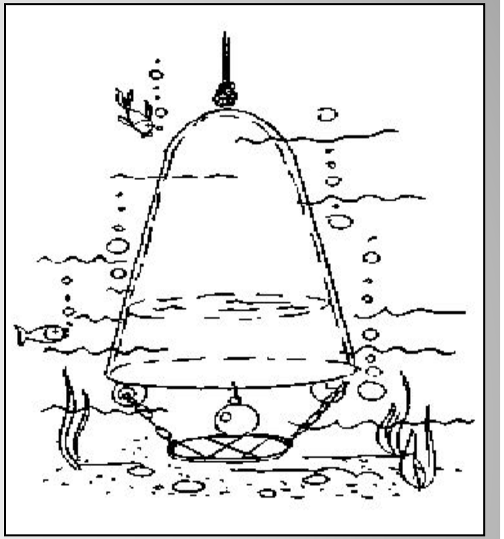
Задача № 12 на решение логарифмического неравенства

7а. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 20 700 Дж?

Физическое обоснование задачи



- Данная формула

$$A = \alpha\gamma T \log_2 \frac{P_2}{P_1}$$ также в школьном курсе физики не изучается, но как и в предыдущей задаче, в ней одна неизвестная величина P_2, а остальные физические величины известны:

$$A \leq 20700 \text{ Дж}, \quad \gamma = 4 \text{ моль}, \quad P_1 = 1{,}2 \text{ атм},$$
$$T = 300\text{К}, \quad \alpha = 5{,}75$$

Решение задачи сводится к решению логарифмического неравенства.

Решение логарифмического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства $A \leqslant$ $\leqslant 20700$ при заданных значениях количества воздуха, его начального давления и температуры, а также постоянной α:

$$A \leqslant 20\,700 \iff \alpha v T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \leqslant 20\,700 \iff$$

$$\iff 5{,}75 \cdot 4 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 20\,700 \iff$$

$$\iff \log_2 \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 3 \iff 0 < \frac{p_2}{1{,}2} \leqslant 8 \iff 0 < p_2 \leqslant 9{,}6.$$

Ответ: 9,6.

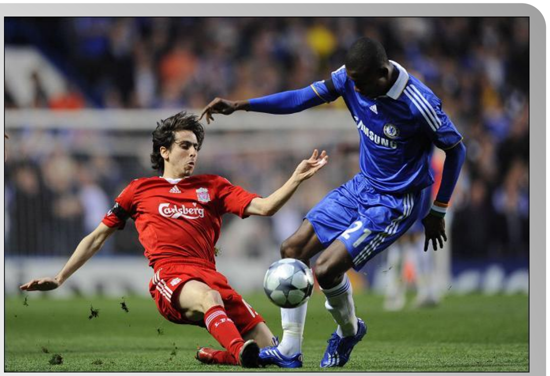
Задача № 13 на решение тригонометрического неравентсва

8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Физическое обоснование задачи



Решение тригонометрического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$t(\alpha) \geqslant 3$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 30$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin\alpha}{10} \geqslant 3 \iff \sin\alpha \geqslant \frac{1}{2} \overset{0^\circ < \alpha < 90^\circ}{\iff} 30^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 30.

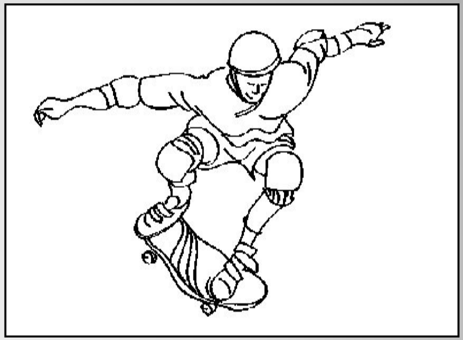
Задача № 14 на решение тригонометрического неравенства

9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,25 м/с?

Физическое обоснование задачи



Решение тригонометрического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$u \geqslant 0{,}25$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$u \geqslant 0{,}25 \iff \frac{m}{m+M} v \cos\alpha \geqslant 0{,}25 \iff$$

$$\iff \frac{80}{80+400} \cdot 3 \cdot \cos\alpha \geqslant 0{,}25 \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}\cos\alpha \geqslant \frac{1}{4} \overset{0^\circ < \alpha < 90^\circ}{\iff} 0^\circ < \alpha \leqslant 60^\circ.$$

Ответ: 60.

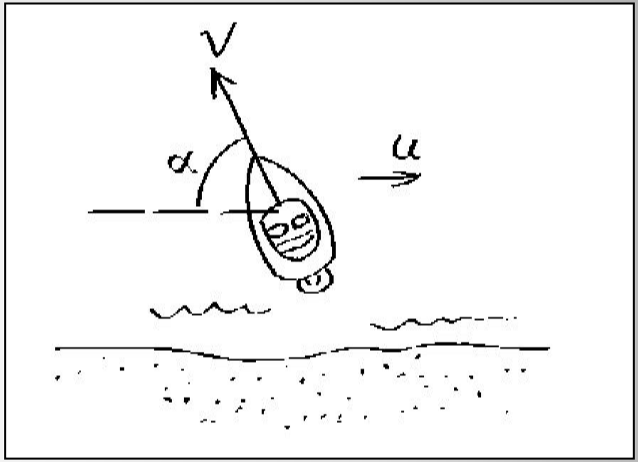
Задача № 15 на решение тригонометрического неравенства

10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0{,}5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега. Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

Физическое обоснование задачи



Решение тригонометрического неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$\frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 200$$

на интервале $(0°; 90°)$ при заданных значениях ширины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0{,}5$ м/с:

$$\frac{100}{0{,}5}\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 200 \iff \operatorname{ctg}\alpha \leqslant 1 \overset{0° < \alpha < 90°}{\iff} 45° \leqslant \alpha < 90°.$$

Ответ: 45.

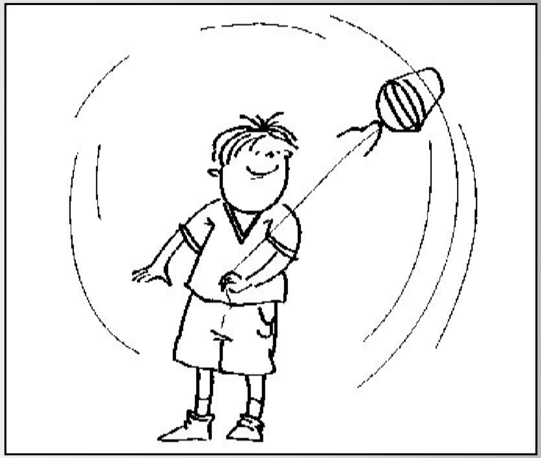
Задача № 16 на решение квадратного неравенства

26. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,441 м? Ответ выразите в м/с.

Физическое обоснование задачи



Решение квадратного неравенства

Решение. Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geqslant 0$ при заданной длине верёвки $L = 0{,}441$ м

$$P \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geqslant 0 \;\overset{m>0}{\Leftrightarrow}\; \frac{v^2}{0{,}441} - 10 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; v^2 \geqslant 4{,}41 \;\overset{v>0}{\Leftrightarrow}\; v \geqslant 2{,}1 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2,1.

Задача 1. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по за

$$h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броск

секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Решение. Формулой, описывающей изменение высоты мяча с течением
является

$$h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2,$$

в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констан

Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к неравенству предпоч сведения к уравнению.

Способ 1. Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте метра. Для этого решим уравнение $h(t) = 3$:

$$h(t) = 3 \iff 1{,}6 + 8t - 5t^2 - 3 \iff 5t^2 - 8t + 1{,}4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = 0{,}2; \\ t = 1{,}4. \end{array}\right.$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи м снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0{,}2$ (с) мяч находился 3 метра, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 1{,}4$ (с) мяч находил высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее тр 1,2 секунды.

Способ 2. Условие «мяч находится на высоте не менее трёх метров» экв неравенству $h(t) \geqslant 3$. Решим его:

$$h(t) \geqslant 3 \iff 1{,}6 + 8t - 5t^2 \geqslant 3 \iff 5t^2 - 8t + 1{,}4 \leqslant 0 \iff 0{,}2 \leqslant t \leqslant 1,$$

Проанализируем полученный результат: мяч будет находиться на указан в период времени от 0,2 до 1,4 секунды, т. е. в течение 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

Задача 2. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4,$$

где t — время (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение задачи 2-мя способами

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является $H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4$, в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант. Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к решению неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к уравнению предпочтительнее сведения к неравенству.

Способ 1. Вода будет вытекать из бака, пока её уровень не понизится до нуля. Определим требуемое на это время, решая уравнение $H(t) = 0$:

$$H(t) = 0 \iff 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4 = 0 \iff t^2 - 40t + 400 = 0 \iff t = 20.$$

Это означает, что по прошествии 20 минут вся вода вытечет из бака.

Способ 2. Условие «вода будет вытекать из бака» эквивалентно неравенству $H(t) \geqslant 0$: пока высота столба воды больше нуля, вода будет вытекать из бака. Решим неравенство $H(t) \geqslant 0$:

$$H(t) \geqslant 0 \iff 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4 \geqslant 0 \iff t^2 - 40t + 400 \geqslant 0 \iff (t - 20)^2 \geqslant 0.$$

Проанализируем полученный результат: неравенству удовлетворяют все значения переменной t. Это означает, что высота столба не может стать отрицательной ни в какой момент времени. Нулевого значения высота столба воды достигает при $t = 20$. Таким образом, столб воды опустится до нуля за 20 минут.

Ответ: 20.

Задача 4. В боковой стенке высокого высокого цилиндрического бака у с[…] закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при это[…] столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м -[…] ная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечен[…] и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через ск[…] кунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объё[…] (*Ответ*: 50.)

В дальнейшем большинство задач приводится в неупрощённом виде. В на[…] ги дана вводная диагностическая работа, позволяющая определить степень[…] сти учащихся к решению задач с прикладным содержанием. Далее разобраны[…] чи вводной диагностической работы; на каждый тип заданий приведены уп[…]