Многокритериальная оптимизация

Процесс проектирования

- С информационной точки зрения это процесс преобразования входной информации об объекте проектирования, о состоянии знаний в рассматриваемой области, об объектах проектирования объектов аналогичного назначения в выходную информацию в виде проектно-конструкторской документации, выполненную в определённой форме и содержащей описание объекта для его материальной реализации.
- Процесс проектирования рассматривается как реализация цикла управления, содержащую операции синтеза, анализа и выработку управляющего воздействия
- С точки зрения принятия решения проектирование представляется как процесс принятия конструкторских решений, удовлетворяющих ТЗ с заданной степенью детализации.

- Задача принятия проектных решений
- ЛПР – лицо принимающее решение (разработчик, проектировщик, инженер), который решает задачу в конкретной предметной области – принимает наилучшее решение из множества альтернативных

Оптимизация проектных задач

Сложность постановки оптимизационных проектных задач обусловлена наличием у проектируемых объектов нескольких выходных параметров, которые могут быть критериями оптимальности.

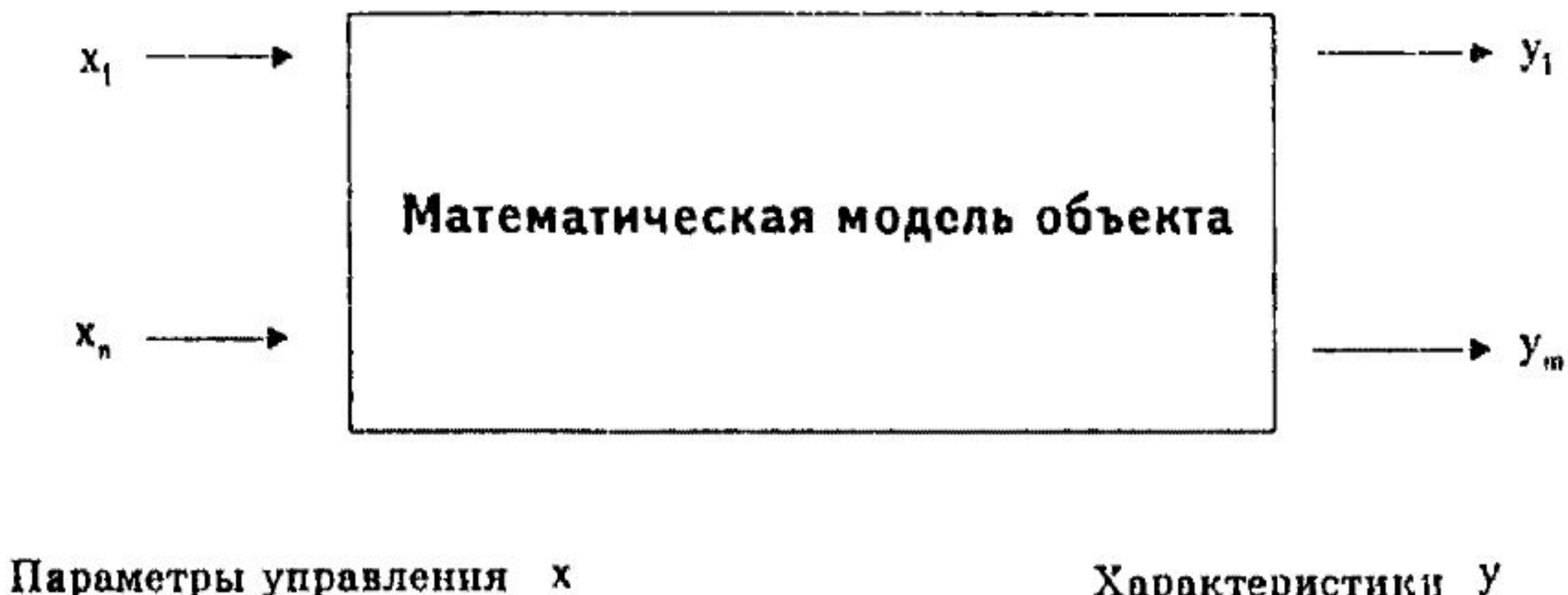
Но в задаче математического программирования целевая функция должна быть одна.

$\mathbf{extr}\ F(\mathbf{X})$,

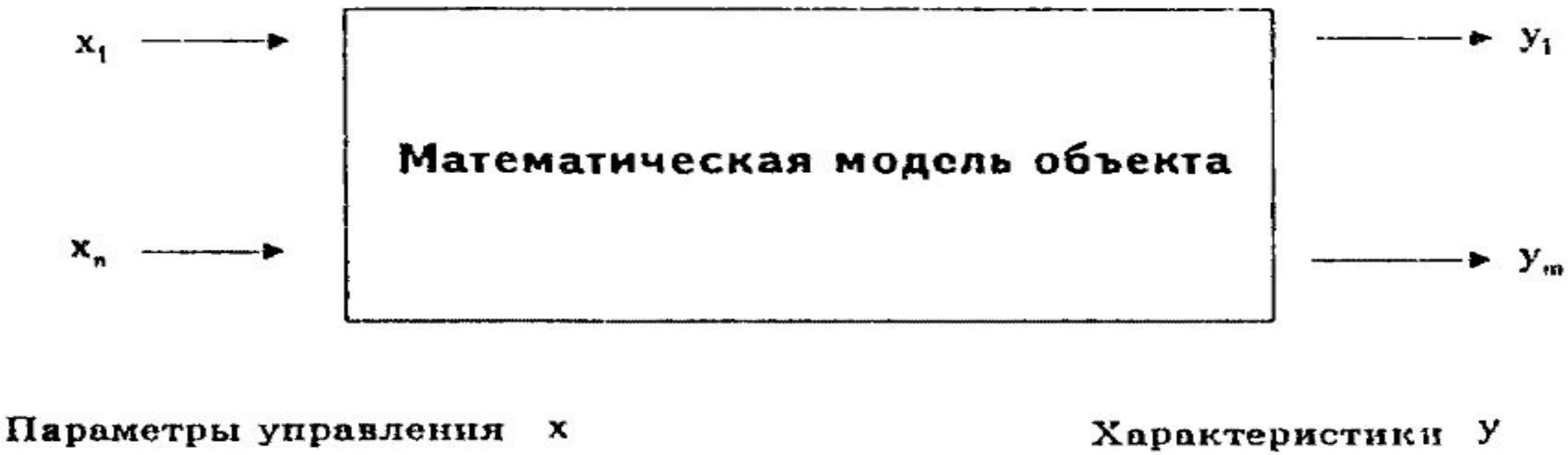
$\mathbf{X} \in \mathbf{D}x$

$\mathbf{D}x = \{\mathbf{X} \mid \phi(\mathbf{X}) > 0,\ \psi(\mathbf{X}) = 0\}$,

Проектные задачи являются многокритериальными, и возникает проблема сведения многокритериальной задачи к однокритериальной.



x1
xn
Математическая модель объекта
y1
ym
Параметры управления x
Характеристики y



$$a_j \le x_j \le b_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i^- \le y_i(x) \le y_i^+, \quad i = \overline{1, m},$$

где a_j, b_j – фиксированные значения j-го параметра, характеризующие область его допустимых значений и зависящие от эксплуатационных, технологических, физических требований и других условий; y_i^-, y_i^+ – ограничения на значения требований, налагаемых на i-ю характеристику в соответствии с техническим заданием.

Постановка задачи многокритериальной оптимизации

$$\min_{x \in D} Q_1(x), \quad \min_{x \in D} Q_2(x), \quad \ldots, \quad \min_{x \in D} Q_N(x).$$

D – область допустимых решений

$\mathbf{Q_i (x)}$ – критерий оптимальности, $\mathbf{i = 1,N}$

В частном случае область допустимых решений может быть дискретным множеством решений

$\mathbf{D = \{x^1, x^2, x^K\}}$

Считаем, что область не пуста.

Тогда для оценки относительной важности одного допустимого решения $\mathbf{x}^k$ из $\mathbf{D}$ по сравнению с другим допустимым решением $\mathbf{x}^l$ из $\mathbf{D}$ введем частный критерий оптимальности $\mathbf{Q_i(x)}$, **i = 1, N**, который позволяет считать, что решение x не менее предпочтительно, чем решение x

$\mathbf{x^k \} x^l}$

если выполняется соотношение

$\mathbf{Q_i(x^k) <= Q_i(x^l)}$

где $\mathbf{Q_i(x)}$— численная оценка решения $\mathbf{x}$ в соответствии с частным критерием оптимальности $\mathbf{Q_i}$, измеренным в некоторой шкале $\mathbf{A(Q_i)}$ - множестве числовых значений.

Пример: выбор проекта

В частном случае задача принятия решений может представлять собой выбор рационального проекта, характеризуемого набором параметров $\mathbf{x}$ из множества нескольких технических проектов с параметрами $\mathbf{x^k}$, k =1,M, определенными в виде таблицы "альтернативы — критерии", где $\mathbf{Q_i(x^k)}$ — значение i-го частного критерия оптимальности для k-го вектора варьируемых параметров.

Постановка задачи

$$\min_{x \in D} Q_1(x), \ldots, \min_{x \in D} Q_N(x),$$

где

$$D = \{ x \mid g_i(x) \geq 0, \; i = \overline{1, K} \}.$$

В частном случае область D может быть дискретным множеством решений x:

$$D = \{ x^1, \ldots, x^K \}.$$

Пример: выбор проекта

Альтернативы	Параметры x^k	Критерии			
		Q_1	Q_2	...	Q_N
Проект 1	x^1	$Q_1(x^1)$	$Q_2(x^1)$	...	$Q_N(x^1)$
				...	...
Проект M	x^M	$Q_1(x^M)$	$Q_2(x^M)$	...	$Q_N(x^M)$

$$\min_{x \in \{x^1, \ldots, x^M\}} Q_1(x), \quad \ldots, \quad \min_{x \in \{x^1, \ldots, x^M\}} Q_N(x).$$

Областью критериев D_Q назовем отображение области допустимых решений $D \subset R^n$ в пространстве R^N:

$$D_Q = \{ \mathbf{Q} \mid Q_i = Q_i(\mathbf{x}),\ i = \overline{1, N};\ \mathbf{x} \in D \}.$$

Шкалы измерения

Частные критерии оптимальности должны иметь одинаковую шкалу измерения [α,β], 0 <= α < β , и приведены к безразмерному типу при помощи, например, положительного линейного преобразования, сохраняющего отношения предпочтения на множестве численных оценок **A (Q_i)** :

$$\psi_i(Q_i(x)) = \overline{Q}_i(x) = \frac{Q_i(x) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-}(\beta - \alpha) + \alpha,$$

$$Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x); \quad Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x); \quad Q_i^+ \neq Q_i^-, \; i = \overline{1, N}.$$

Преобразование позволяет привести частные критерии оптимальности к общему началу отсчета и к одинаковому интервалу измерения.

Противоречивые критерии

Любые два векторных критерия $\boldsymbol{Q}^k = (Q_1^k, \ldots, Q_N^k) = (Q_1(\boldsymbol{x}^k), \ldots, Q_N(\boldsymbol{x}^k))$ и $\boldsymbol{Q}^l = (Q_1^l, \ldots, Q_N^l) = (Q_1(\boldsymbol{x}^l), \ldots, Q_N(\boldsymbol{x}^l))$ являются противоречивыми, если $Q_i^k \leq Q_i^l$, $i \in I_1$, $Q_j^k \geq Q_j^l$, $j \in I_2$, $I_1 U I_2 = \{1, \ldots, N\}$ и по крайней мере одно из этих соотношений является строгим. В случае доминирования $\boldsymbol{Q}^k$ над $\boldsymbol{Q}^l$: $Q_i^k \leq Q_i^l$, $i = \overline{1, N}$, и хотя бы для одного из i это неравенство строгое, альтернатива $\boldsymbol{x}^l$ может быть исключена из рассмотрения, так как альтернатива $\boldsymbol{Q}^k$ лучше альтернативы $\boldsymbol{Q}^l$ по всем частным критериям.

Область компромиссов и область Парето

Совокупность векторов $\boldsymbol{Q} \in D_Q$, для которых нет ни одного доминирующего их вектора из области критериев D_Q, образует *область компромиссов* $D_k \subset D_Q$, а соответствующие им значения параметров $\boldsymbol{x}$ образуют *область решений, оптимальных по Парето* $D_p \subset D$:

$$D_k = \{\boldsymbol{Q} \in D_Q \mid \neg\exists\, \boldsymbol{Q}^* (\boldsymbol{Q}^* \in D_Q, \boldsymbol{Q}^* \neq \boldsymbol{Q}) \colon Q_i^* \leq Q_i,\ i = \overline{1, N}\},$$

$$D_p = \{\boldsymbol{x} \in D \mid \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \in D_k\}.$$

Метод выделения главного критерия

Основная идея этого метода — минимизация наиболее важного (главного) критерия $\mathbf{Q_1(x)}$, при условии, что значения других критериев $\mathbf{Q_i(x)}$, $\mathbf{i = 2,N}$, не превышают пороговых значений

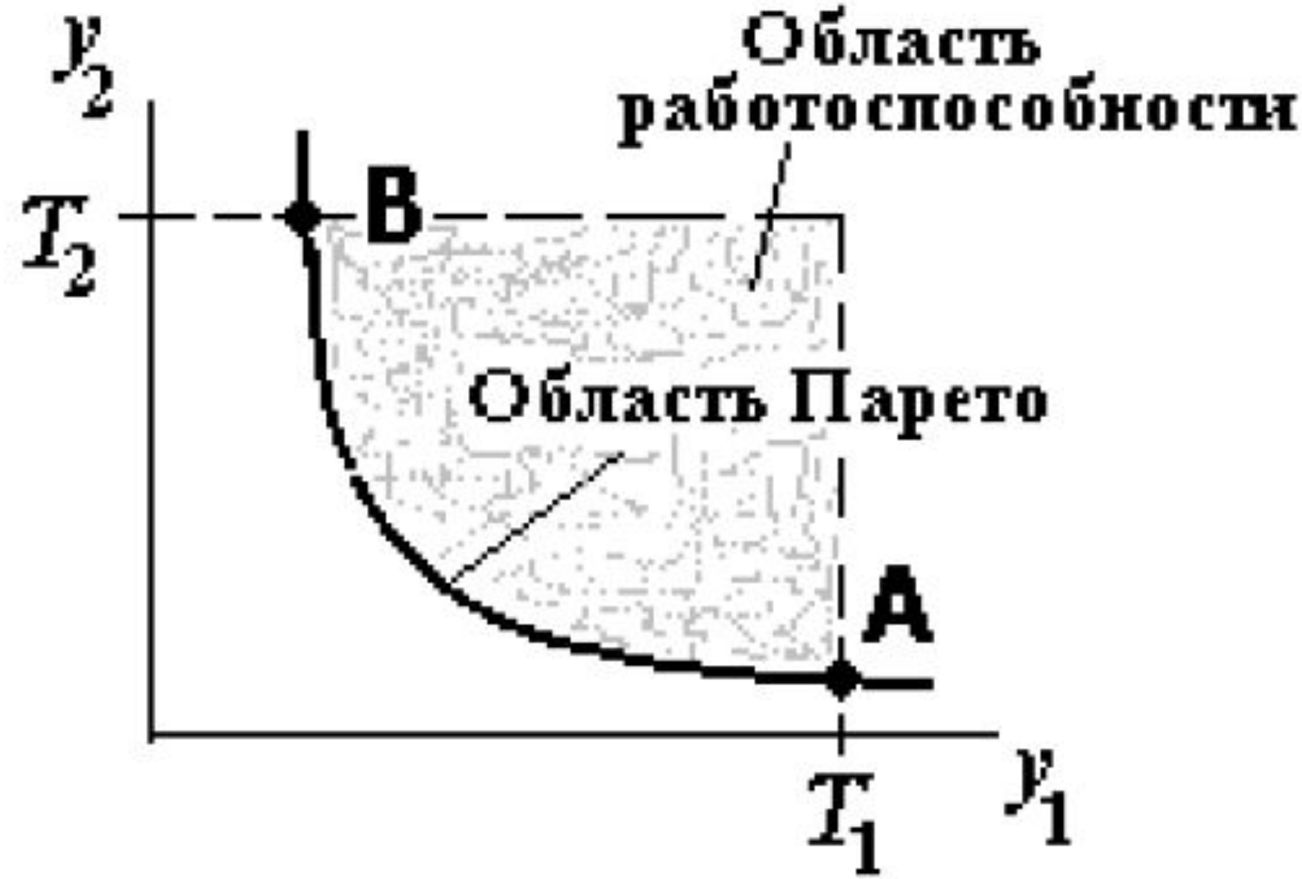
$$\min_{x \in D'} Q_1(x),$$

$$D' = D \cap \{ x \mid Q_i(x) \le Q_i^0,\ i = \overline{2, N} \}.$$

Эта постановка вполне приемлема, если действительно можно выделить один наиболее критичный выходной параметр.

Основная трудность этого метода состоит в определении пороговых значений, для вычисления которых, в свою очередь, применяются специальные методы.

Недостатки выбора одного частного критерия в качестве главного



Метод лексикографического упорядочения критериев

В данном методе оптимизация k-го частного критерия начинается только тогда, когда получены минимальные значения всех предыдущих (k-1) частных критериев.

Метод позволяет получить сколь угодно малое приращение более важного критерия за счет сколь угодно больших потерь по остальным, менее важным критериям.

Однако на практике очень часто уже после первого шага оптимизации (решения задачи оптимизации по первому критерию) решение вырождается в точку и остальные критерии не учитываются.

Метод последовательных уступок

Представляет собой модификацию метода лексикографического упорядочения, заключающуюся в том, что на каждом k-м шаге последовательной оптимизации вводится уступка ΔQ_{k-1} характеризующая допустимое отклонение (k-1)-го частного критерия от его минимального значения.

Все перечисленные выше методы предполагают наличие "подавляющего" превосходства одного критерия над другим.

Метод свертывания векторного критерия

Этот метод является наиболее распространенным методом, учитывающим относительную важность частных критериев оптимальности с помощью построения скалярной функции F, являющейся обобщенным критерием относительно векторного критерия **Q (x)**,и решения однокритериальной задачи оптимизации:

$$\min_{x \in D} F(w, Q(x)),$$

$$w = \{ w_1, \ldots, w_N \}$$

где

весовые коэффициенты относительной важности частных критериев .

В зависимости от вида функции F рассматривают следующие обобщенные критерии:

Аддитивный критерий оптимальности

$$F_{\Sigma}(w, Q(x)) = \sum_{i=1}^{N} w_i Q_i(x);$$

- Недостатки аддитивного критерия — субъективный подход к выбору весовых коэффициентов

Мультипликативный критерий оптимальности

$$F_{\Sigma}(w, Q(x)) = \prod_{i=1}^{N} w_i Q_i(x);$$

обобщенные логические критерии оптимальности:

$$F_{\max}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})) = \max_{1 \leq i \leq N} \{ w_i Q_i(x) \};$$

$$F_{\min}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})) = \min_{1 \leq i \leq N} \{ w_i Q_i(x) \};$$

среднестепенной обобщенный критерий оптимальности:

$$F_p(w,\ Q(x)) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i Q_i^p(x)\right)^{1/p},\quad p > 0.$$

Метод идеальной точки

При использовании этого метода ЛПР должно задать дополнительную информацию ввиде "и, $Q^* = (Q_1^*, \dots, Q_N^*)$,
решения

учитывая следующее соотношение:

$$-\infty < Q_i^* \le \min_{x \in D} Q_i(x), \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда исходная задача может быть решена путем построения обобщенного критерия в виде

$$F^{*}(w, Q(x), Q^{*}) = F(w, (Q(x) - Q^{*})),$$

и решения однокритериальной задачи оптимизации в виде

$$\min_{x \in D} F^{*}(w, Q(x), Q^{*}),$$

Здесь в качестве обобщенного критерия оптимальности F может использоваться одно из ранее расмотренных выражений например:

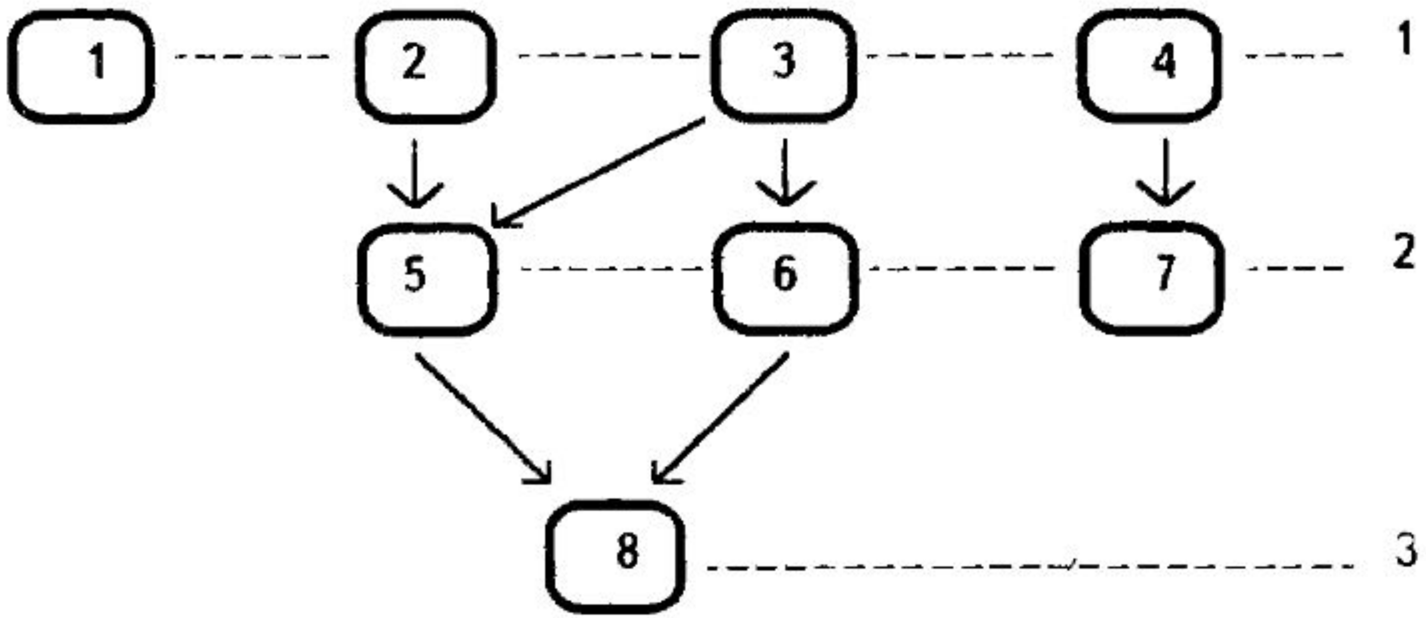
$$F = \sum_{i=1}^{N} w_i (Q_i(x) - Q_i^*)$$

$$F = \max_{1 \le i \le N} \{ w_i (Q_i(x) - Q_i^*) \}.$$

Способы назначения весовых коэффициентов

- упорядочение критериев по важности;
- определение отношений весовых коэффициентов, при этом ЛПР задает отношение $\boldsymbol{w}_j/\boldsymbol{w}_i$ в числовом виде;
- построение таблиц на основе попарного сравнения критериев по важности;
- метод определения весов при помощи совокупности последовательных сравнений (метод Черчмена-Акоффа);
- методы, использующие информацию о качестве оптимальных значений частных критериев;
- теоретико-игровые методы назначения весовых коэффициентов

Учет предпочтений частных критериев



Представление дополнительной качественной информации в виде графа G, вершины – частные критерии