Двойные интегралы

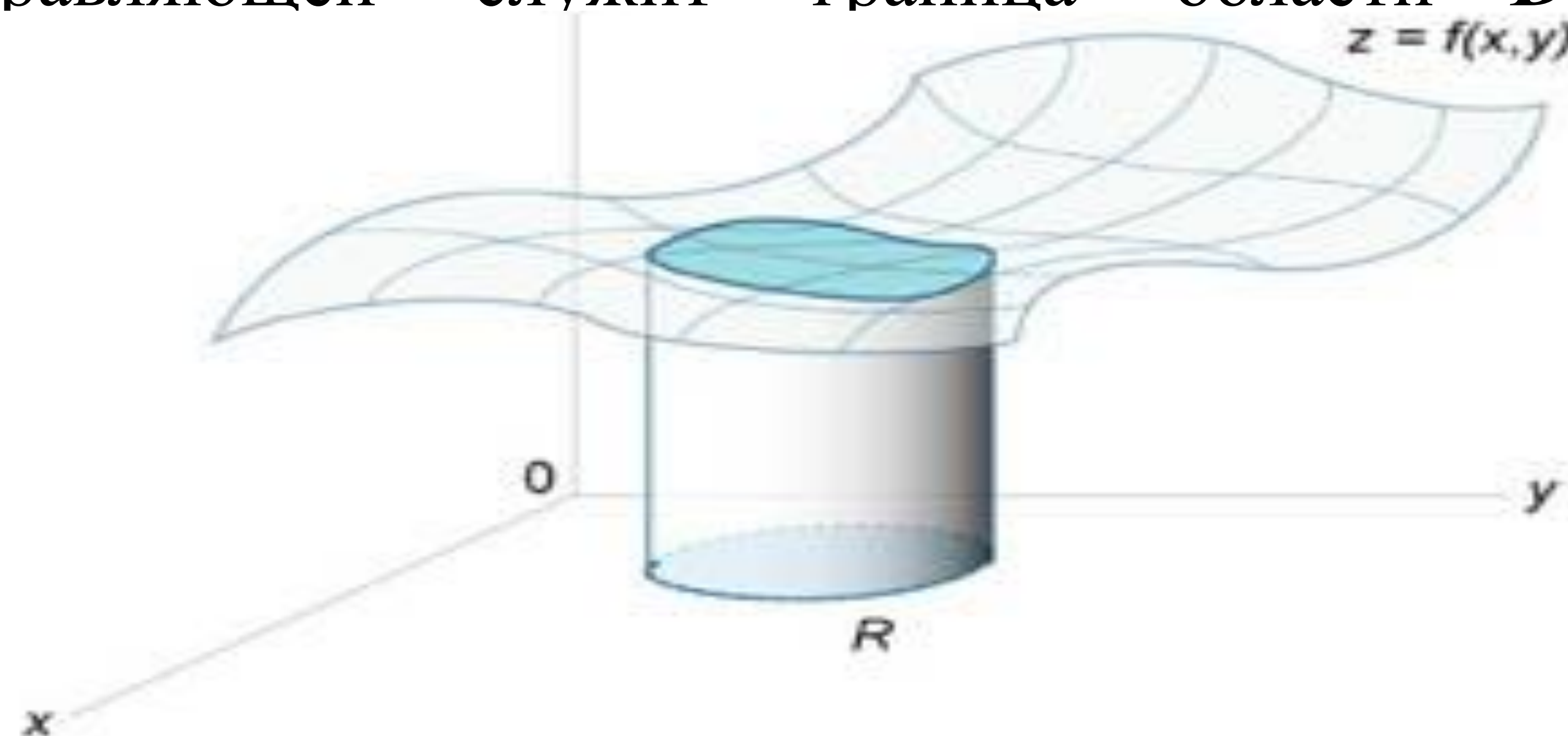
ЛЕКЦИЯ 1

Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление в ПДСК

Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

Рассмотрим понятие цилиндрического тела (цилиндроида)

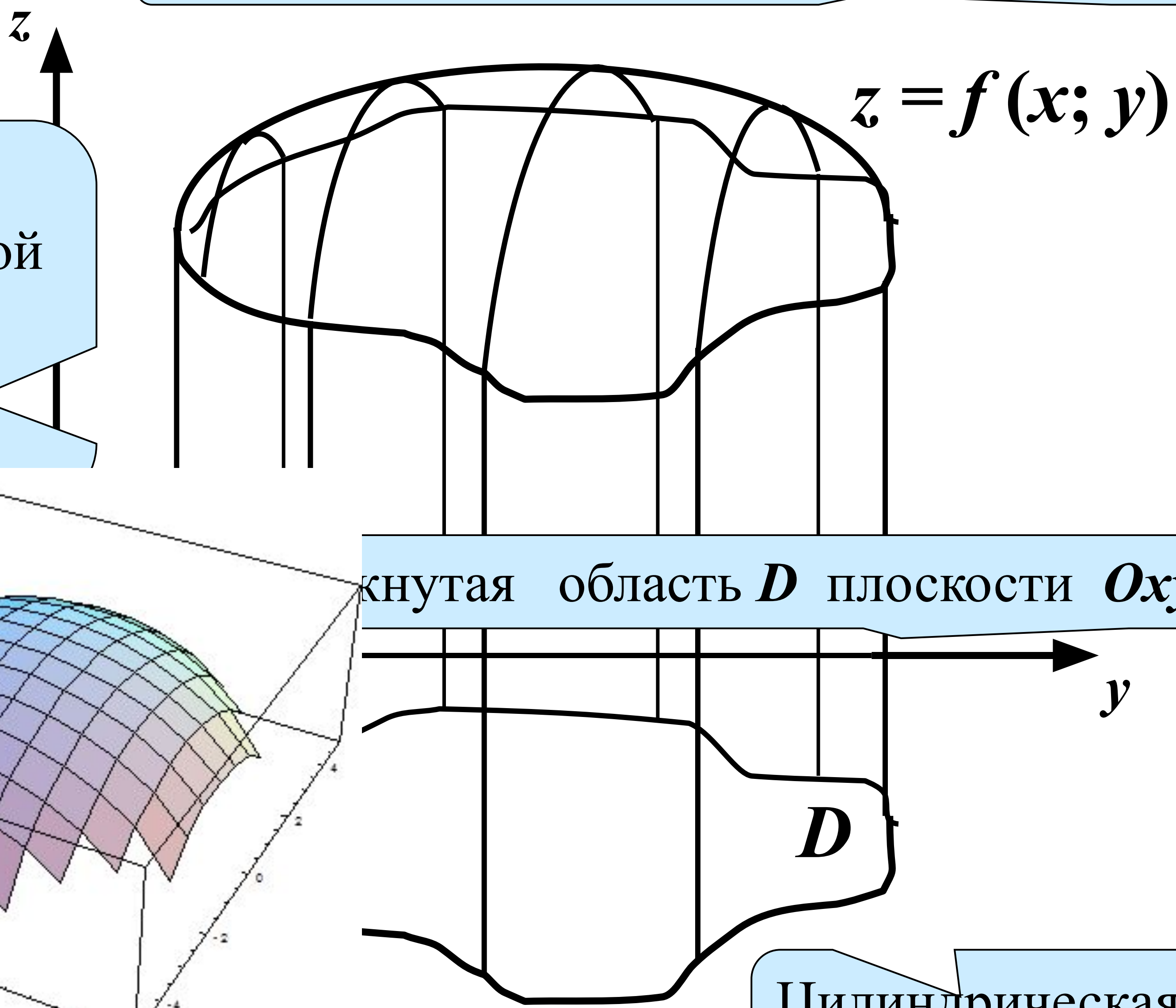
Тело, ограниченное снизу замкнутой областью ***D*** плоскости ***Oxy***, сверху – непрерывной над ***D*** поверхностью $z=f(x;y) \geq 0$, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси ***Oz***, направляющей служит граница области ***D***, наз



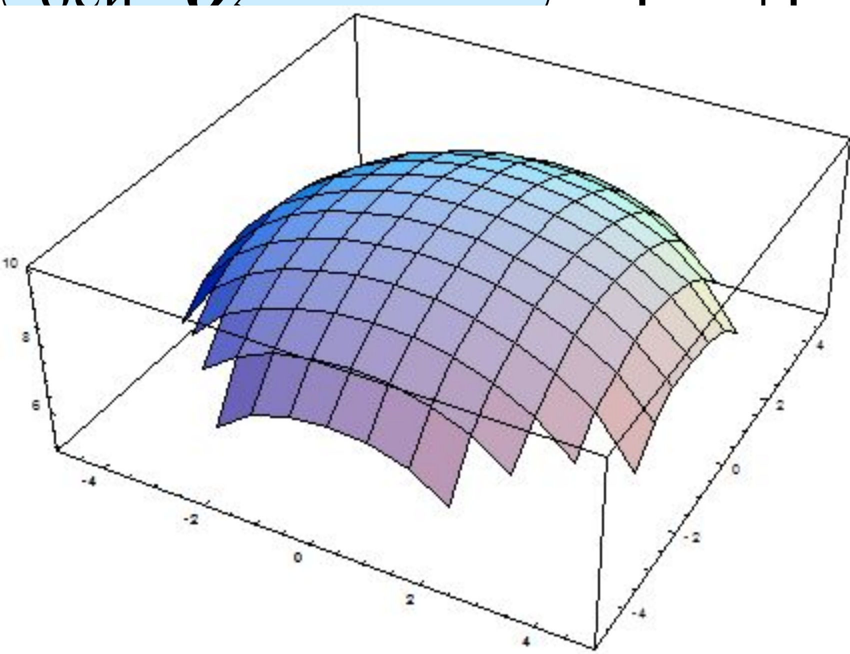
Изобразим

Непрерывная над D поверхность $z=f(x;y)\geq 0$

Образующая цилиндрической поверхности, параллельная оси Oz



кнутая область D плоскости Oxy



Цилиндрическая поверхность

Как найти объём цилиндрическ

Понятно, что цилиндрическое тело

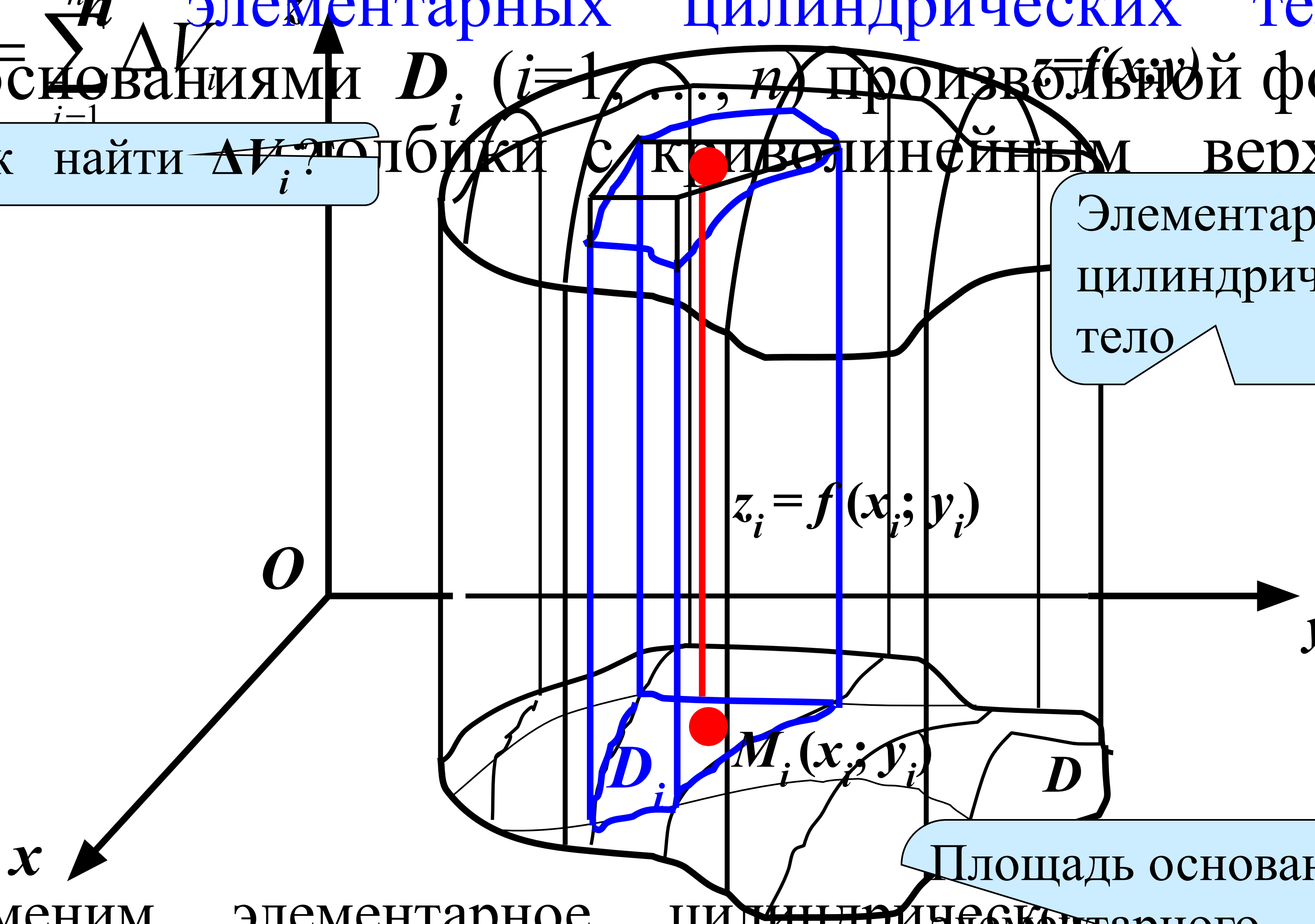
на n элементарных цилиндрических тел

$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$

с основаниями D_i (i=1, …, n) произвольной формы

столбики с криволинейным верхом).

Как найти ΔV_i?



Элементарное цилиндрическое тело

Площадь основания D_i элементарного цилиндрического тела равна ΔS_i (i=1, …, n)

Заменим элементарное цилиндрическ

цилиндром с площадью основания Δ

где $M(x_i;y_i)$ - произвольная точ

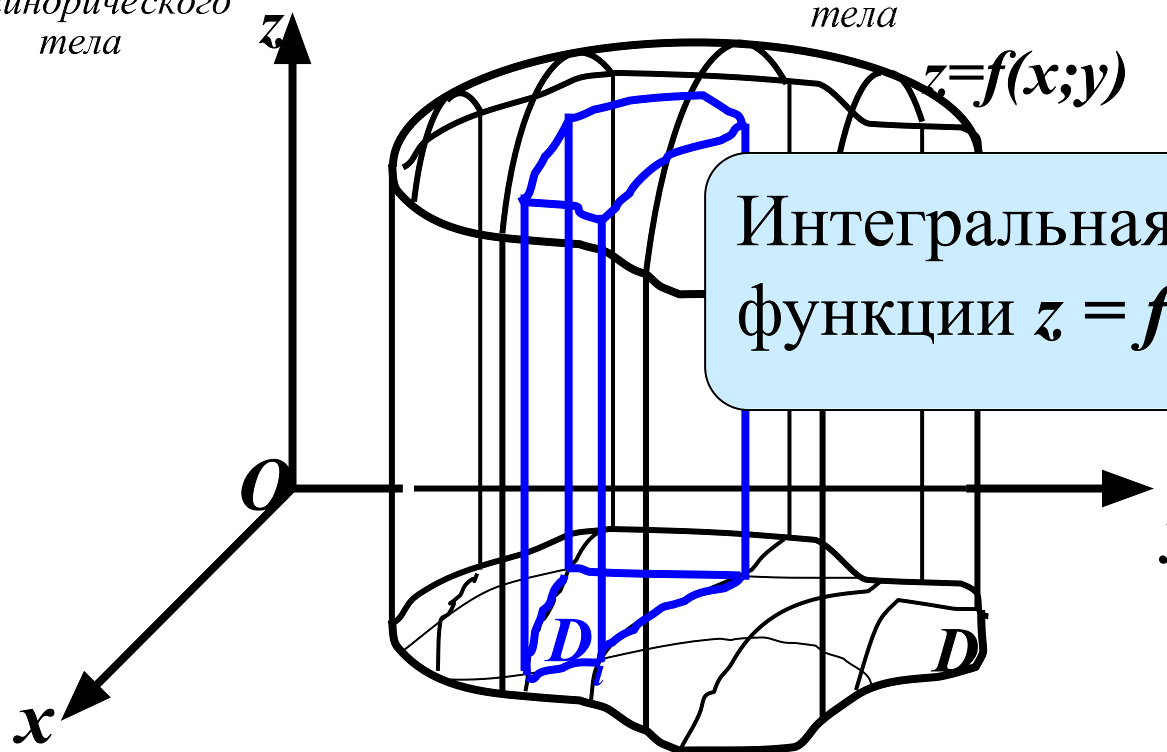
Объём ΔV_i элементарного цилиндрического тела приближённо равен объёму цилиндра:

$$\Delta V_i \approx f(x_i;y_i)\Delta s_i$$

объём элементарного цилиндрического тела — *объём цилиндра*

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx f(x_1;y_1)\Delta s_1+\ldots+f(x_n;y_n)\Delta s_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta s_i$$

объём цилиндрического тела — *объём ступенчатого цилиндрического тела* — *объём ступенчатого цилиндрического тела*



Интегральная сумма Римана функции $z = f(x;y)$ в области D

Определение двойного интеграла

Конечный предел последовательности интегральных сумм $I_{n_1}, \; I_{n_2}, \; \ldots, \; I_{n_k}, \; \ldots,$ составленных для различных разбиений области $\boldsymbol{D}$ и различного выбора точки $\boldsymbol{M_i(x_i;y_i)}$ в основании $\boldsymbol{D_i}$, при $n \to \infty$ и $d \to 0$ ($\boldsymbol{d}$ – наибольшая из хорд оснований $\boldsymbol{D_i}$), называется **двойным интегралом функции $z = f(x; y)$ по области D**:

$$\iint\limits_D f(x;y)ds$$

Рассмотрим зн… …мвола в обозначении …:

Переменные интегрирования

Область интегрирования

$$\iint\limits_D f(x;y)\,ds$$

Элемент площади

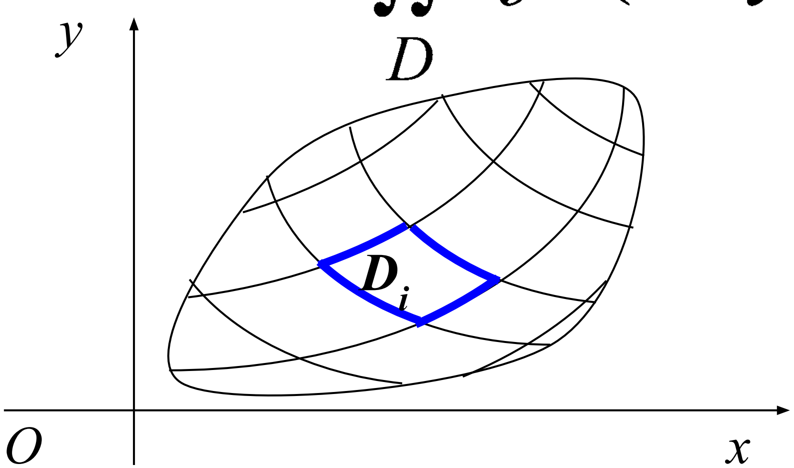
Подынтегральная функция

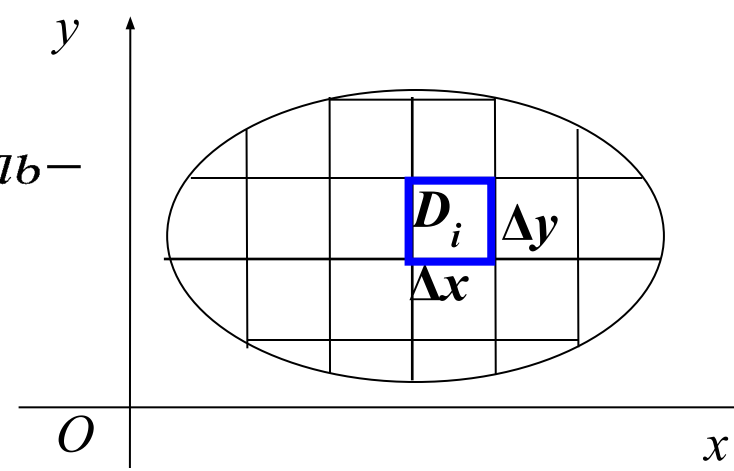
Читается: двойной интеграл по области дэ эф от икс игрэк дэ эс.

Другое обозначение двойного интеграла связано с возможностью разбиения области D произвольным образом, в том числе и прямыми, параллельными осям координат:

$$\iint\limits_D f(x;y)\;dxdy$$

площадь прямоуголь–ника





Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл функции $z = f(x; y) \geq 0$ по области D равен объёму цилиндрического тела с основанием D, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y)$.

Свойства двойного интеграла

1. $$\iint_D (c_1 f_1(x;y) \pm c_2 f_2(x;y))ds = c_1 \iint_D f_1(x;y)ds \pm c_2 \iint_D f_2(x;y)ds$$

где $\boldsymbol{c_1}$ и $\boldsymbol{c_2}$ - константы

2. Если область интегрирования ***D*** разбита на две непересекающиеся области ***D₁*** и ***D₂*** такие что $D_1 \cup D_2 = D$, то

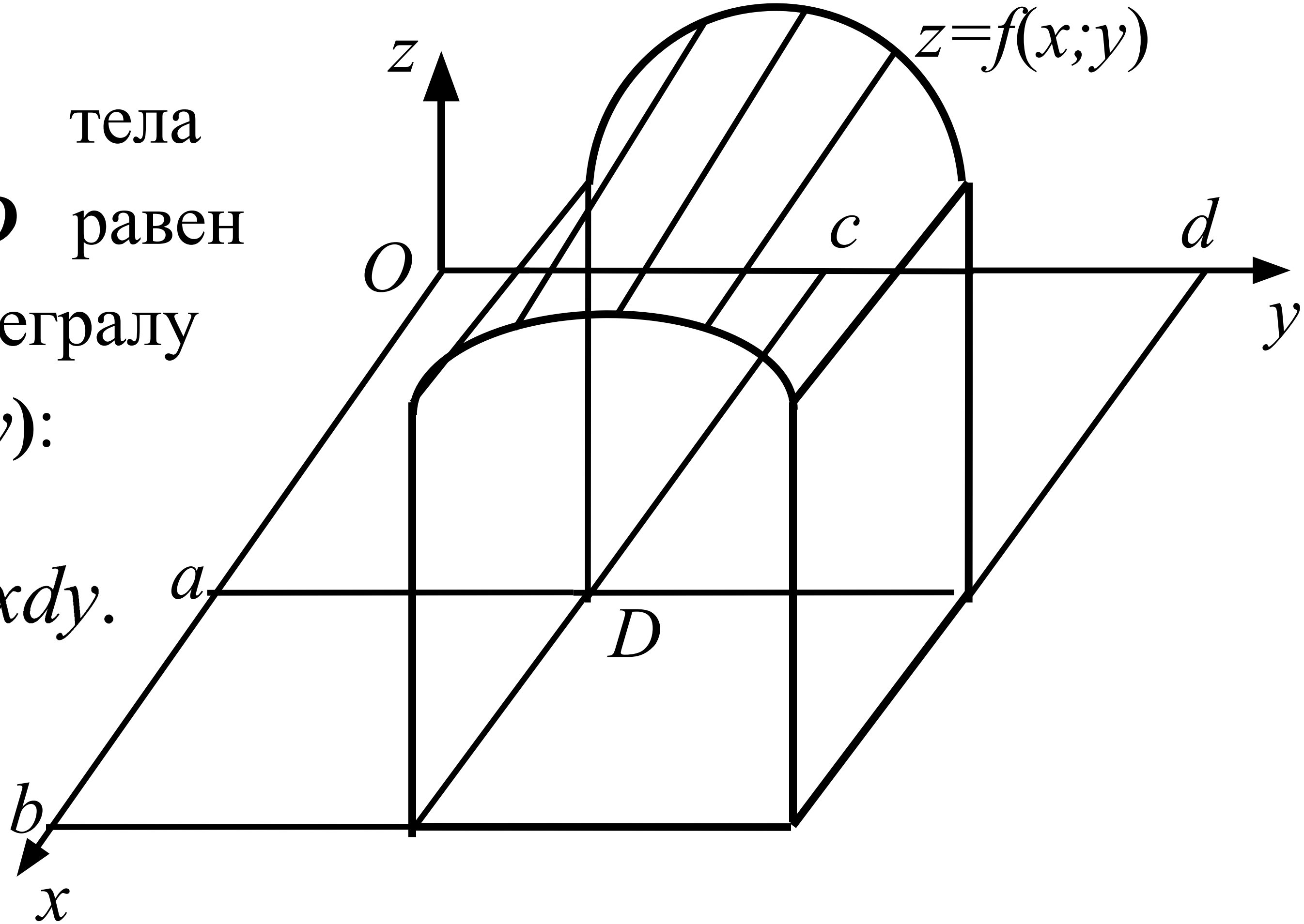
$$\iint_D f(x;y)ds = \iint_{D_1} f(x;y)ds + \iint_{D_2} f(x;y)ds$$

3. $\iint_D ds = s,$ где ***s*** - площадь области ***D***.

Вычисление двойного интеграла в ПДСК

Пусть область D – прямоугольник, определяемый неравенствами $a \le x \le b,\ c \le y \le d,$ где $f(x;y) \ge 0$ непрерывна.

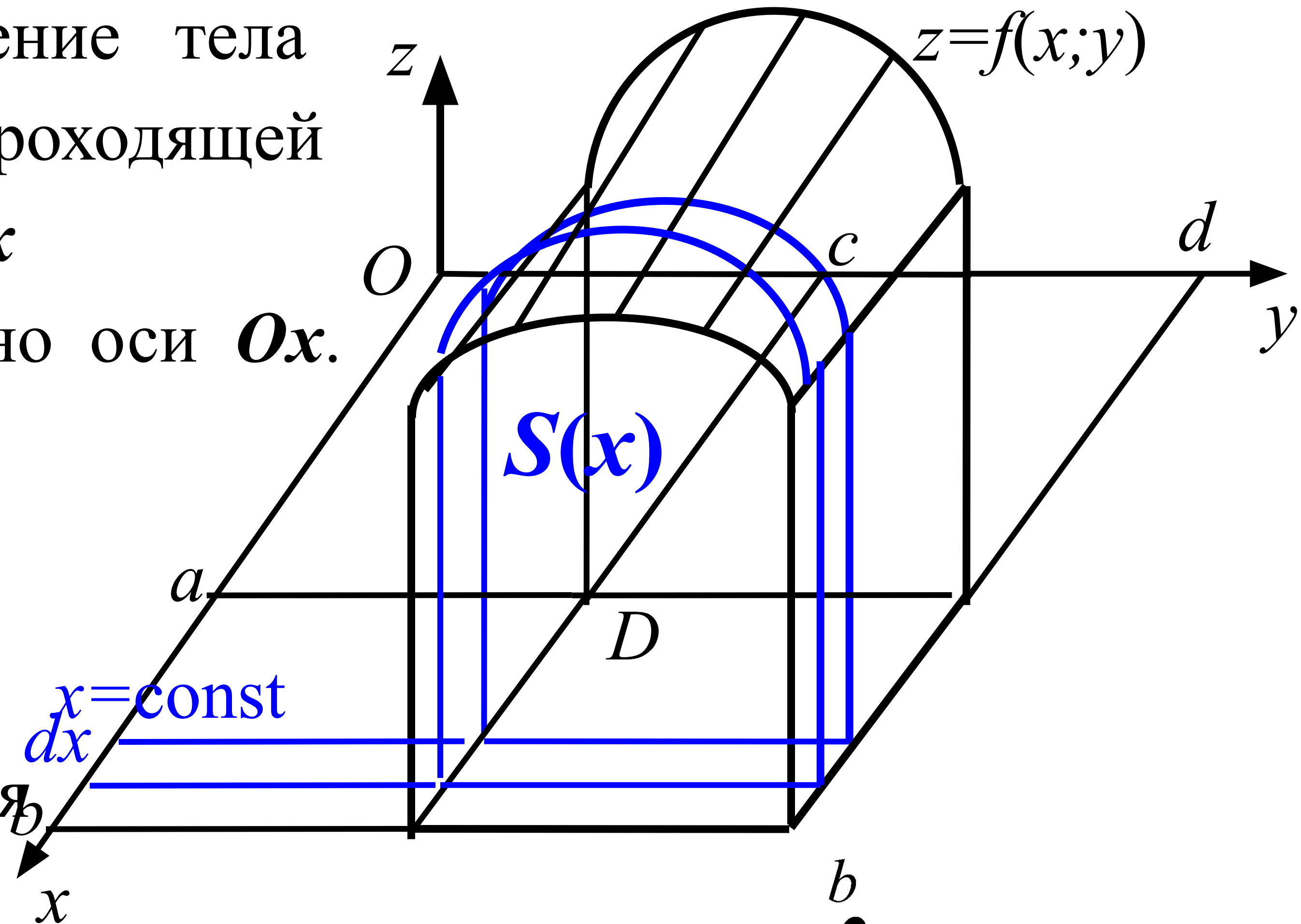
Тогда объём тела с основанием D равен двойному интегралу функции $f(x;y)$:



$$V = \iint\limits_D f(x;y)\,dxdy.$$

С другой стороны, объём тела можно найти по известной площади любого его поперечного сечения.

Построим сечение тела плоскостью, проходящей через точку ***x*** перпендикулярно оси ***Ox***.



S(***x***) – площадь сечения тела.

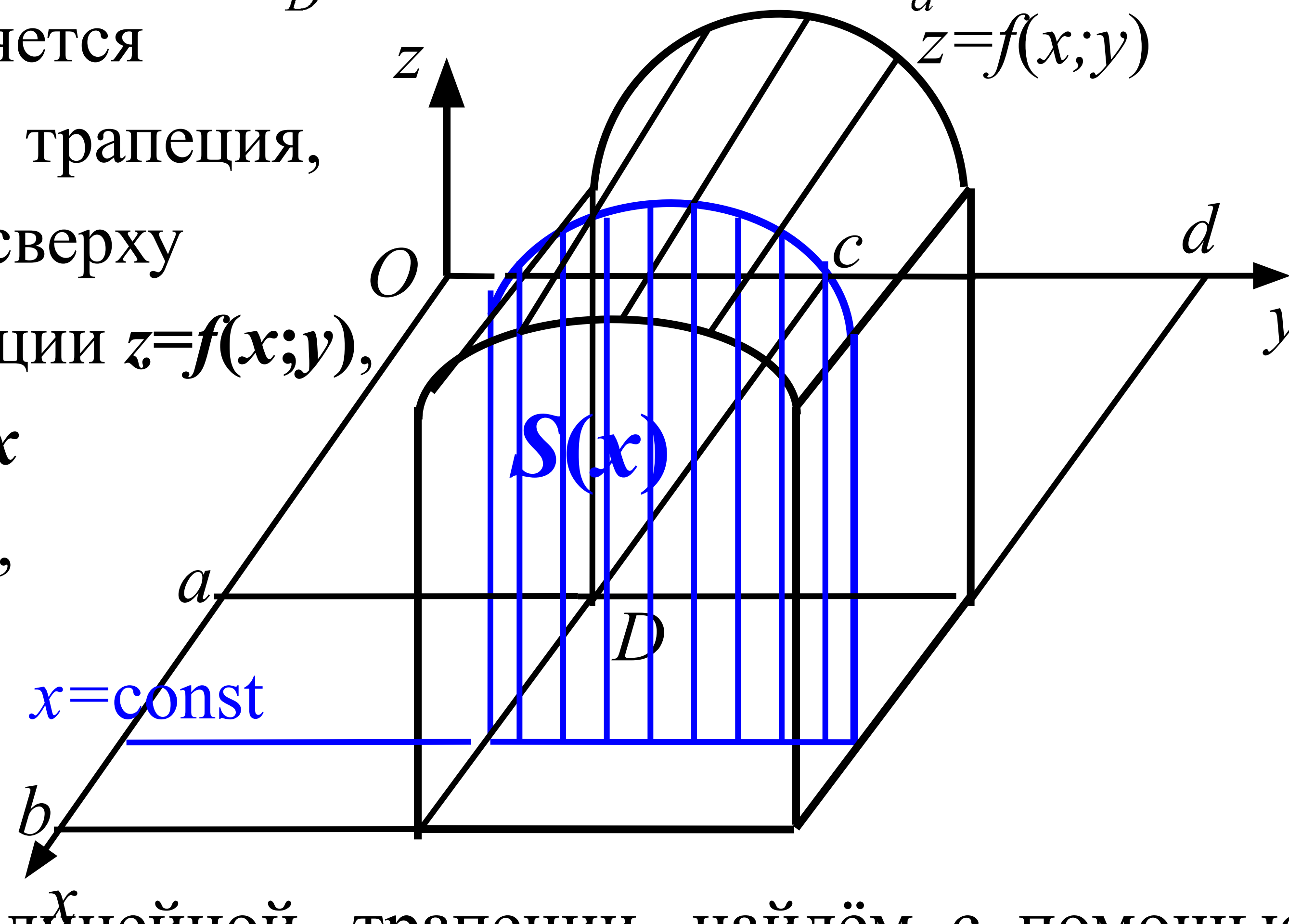
Тогда объём тела находится с помощью определённого интеграла:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Получаем, что $V = \iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_a^b S(x)\,dx.$

Сечением является криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком функции ***z=f*(*x*;*y*)**, где значение ***x*** фиксированное,

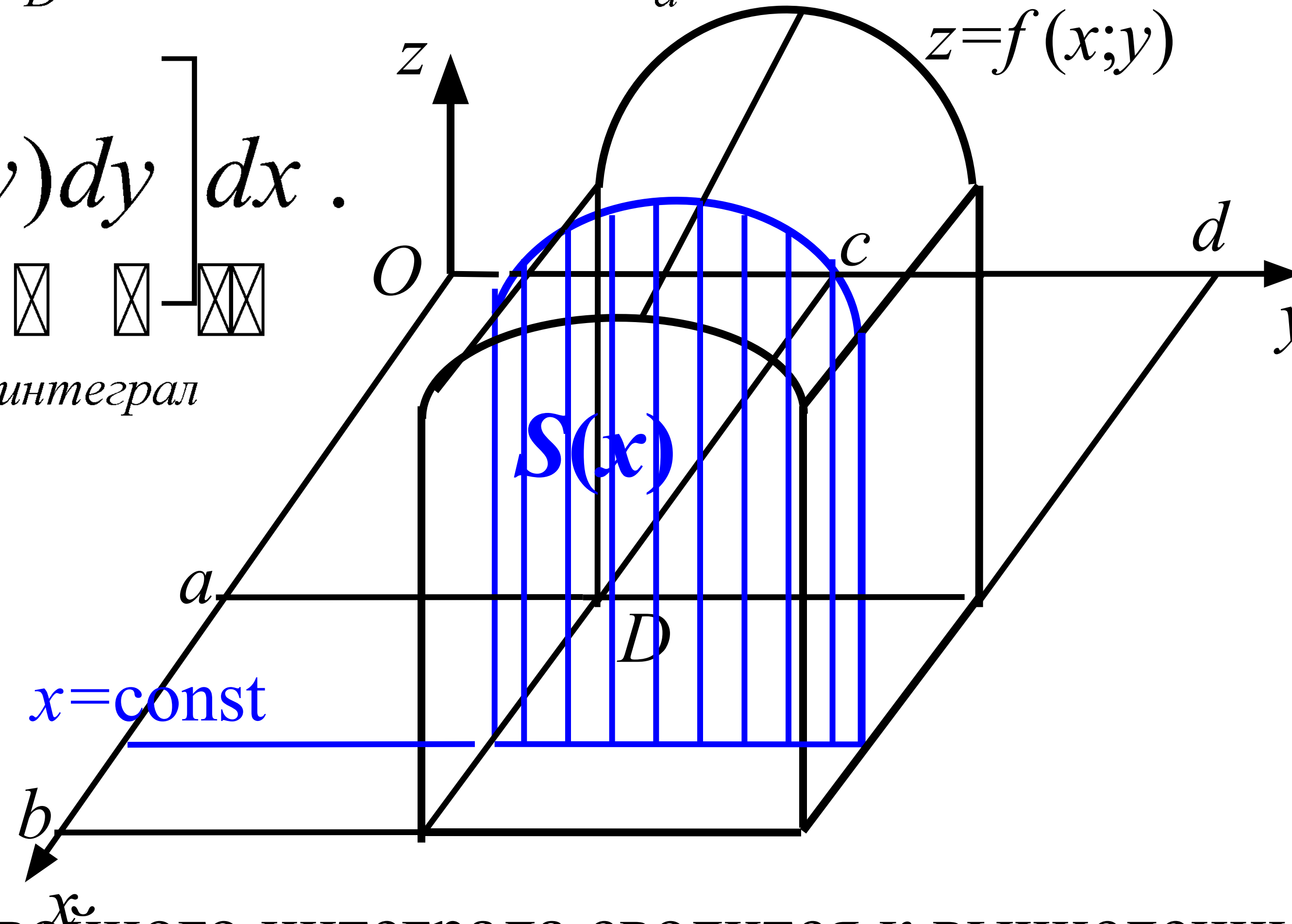
$$c \le y \le d.$$



Площадь ***S*(*x*)** сечения - криволинейной трапеции найдём с помощью определённого интеграла: $S(x) = \int\limits_c^d f(x;y)\,dy.$

Тогда $V = \iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_a^b S(x)\,dx =$

$$= \underbrace{\int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x;y)\,dy \right] dx}_{\textit{повторный интеграл}} .$$



Нахождение двойного интеграла сводится к вычислению двух определённых. При вычислении «внутреннего» интеграла (в квадратных скобках) ***x*** считается постоянным.

Повторный интеграл можно записать так:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x;y)dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy.$$

Аналогично можно показать, что

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x;y)dx \right] dy.$$

Тог

Результат интегрирования не зависит от порядка интегрирования

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c \left[\int_a f(x;y)dx \right] dy = \int_c dy \int_a f(x;y)dx.$$

Понятно, что

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx.$$

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (x^2 + 2y)\,dxdy,$$

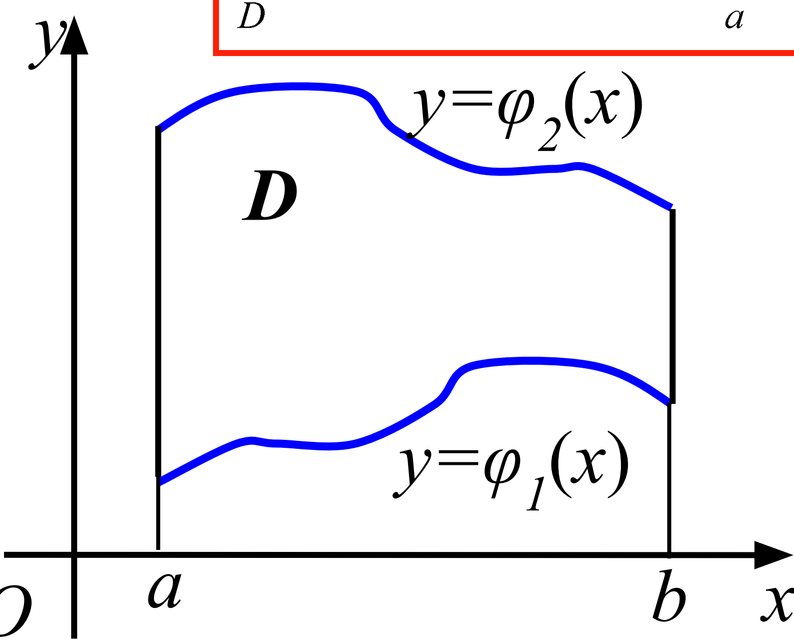
где область ***D*** определяется неравенствами

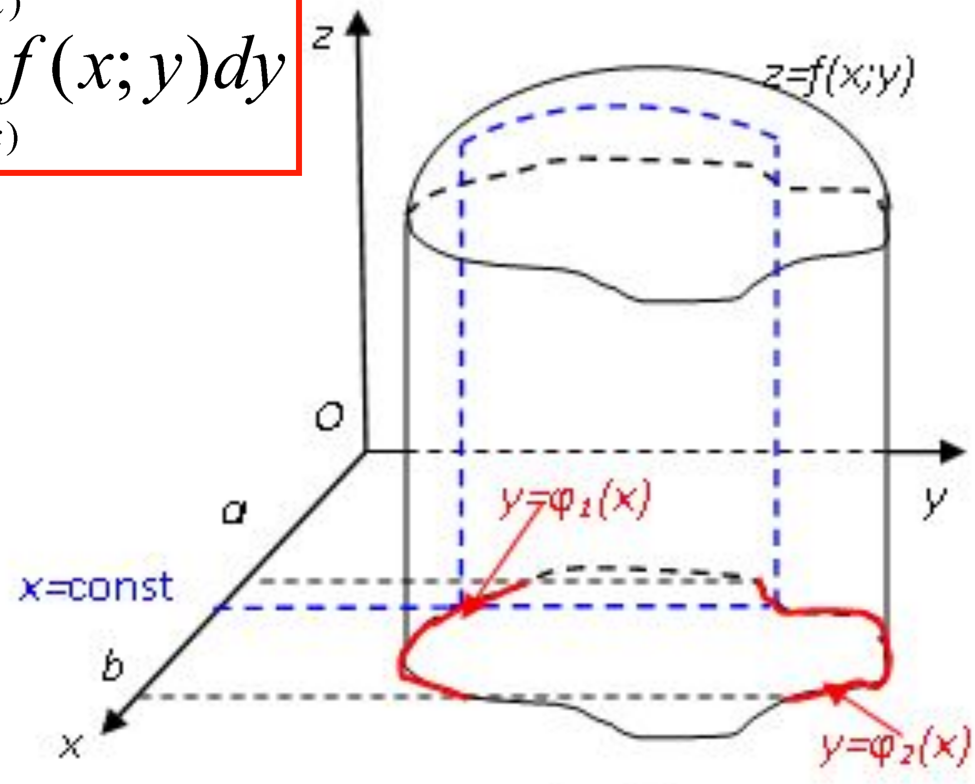
$$0 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le 1,$$

в различном порядке интегрирования.

Если область $\boldsymbol{D}$ ограничена слева и справа прямыми $\boldsymbol{x=a}$, $\boldsymbol{x=b}$ соответственно; снизу и сверху кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ соответственно; каждая из которых пересекается с прямыми $\boldsymbol{x=a}$, $\boldsymbol{x=b}$, только в одной точке (область $\boldsymbol{D}$), то в сечении получим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $\boldsymbol{z=f(x;y)}$, где $\boldsymbol{x=}$**const**, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$.

Тогда $$\boxed{\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy}$$





Если область $\boldsymbol{D}$ ограничена снизу и сверху прямыми $\boldsymbol{y = c}$, $\boldsymbol{y = d}$ соответственно; слева и справа кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ соответственно; каждая из которых пересекается с прямыми $\boldsymbol{y = c}$, $\boldsymbol{y = d}$, только в одной точке (область $\boldsymbol{D}$), то в сечении получим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $\boldsymbol{z=f(x;y)}$, где $\boldsymbol{y}$**=const**, $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$.

Тогда

$$\boxed{\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,dx}$$

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (3x+2y)\,dxdy,$$

где область $\boldsymbol{D}$ ограничена линиями

$$y = 2x^2, \qquad y = 18.$$