Тема 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

СОБЫТИЯ И ИСПЫТАНИЯ

- Предметом исследования в теории вероятностей являются события, появляющиеся при определенных условиях, которые можно воспроизводить неограниченное количество раз.
- Каждое осуществление этих условий называют испытанием

Примеры испытаний и событий

- ***Испытание*** – бросание игральной кости

- **Событие** – выпадение шестерки *или* выпадение четного числа очков

- ***Испытание*** – измерение температуры тела

- **Событие** – ошибка измерения не превзойдет заранее заданного числа

Случайные события

Событие называется **случайным**, если при одних и тех же условиях оно может как произойти, так и не произойти.

Примеры случайных событий

- ***Испытание*** – бросание игральной кости

- **<u>Событие</u>** – выпадение четного числа очков

- ***Испытание*** – бросание монеты

- **<u>Событие</u>** – выпадение «орла»

Вероятность случайного события

Степень объективной возможности случайного события можно измерять числом.

Это число называется **вероятностью случайного события.**

Около этого числа группируются относительные частоты данного случайного события

Абсолютная и относительная частота

- Пусть проведено n испытаний, в которых событие А произошло m раз.

Число m называют абсолютной частотой или просто частотой события А.

Отношение

$$P^*(\text{А})=\frac{m}{n}$$

называют относительной частотой события А.

Статистическое определение вероятности

- Вероятностью события А в данном испытании называют число ***P(A)***, около которого группируются значения относительной частоты при большом числе испытаний n.

Совместимые и несовместимые события

События *A* и *B* называются **совместимыми**, если появление одного из них не исключает появления другого.

События *A* и *B* называются **несовместимыми**, если появление одного из них исключает появление другого (не могут наступить одновременно).

Примеры совместимых и несовместимых событий

- ***Испытание*** – бросание двух игральных кубиков

совместимые

- **<u>События:</u>**
- А - выпадение четной суммы очков и
- В - выпадение равных чисел на обоих кубиках;

- ***Испытание*** – однократно бросание монеты

несовместимые

- **<u>События</u>** –
- А - выпадение «орла»
- и В - выпадение «решки»

Противоположные события

С каждым событием *A* связано **противоположное событие B**, состоящее в том, что событие *A* ***не*** осуществляется.

Противоположные события, очевидно, несовместимы.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1

Примеры противоположных событий

1. На кубике выпадет четное число и на кубике выпадет нечетное число;
2. Монета упала орлом вверх и монета упала вверх решкой;
3. Лампа горит и лампа не горит.

Полной группой событий называется множество всех событий для данного испытания, если его результатом становится выполнение хотя бы одного из них .

Примеры полных групп событий

- ***Испытание*** – бросание игральной кости

- **<u>Полная группа событий </u>**– выпадение 1,2,3,4,5,6 очков.

- ***Испытание*** – бросание монеты

- **<u>Полная группа событий</u>**– выпадение «орла», выпадение «решки»

- События образующие полную группу попарно несовместимых равновозможных событий называют элементарными.

$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ - полная группа событий для бросания игрального кубика, где элементарные события:

U_1- выпадение 1, U_2- выпадение 2, U_2- выпадение 2, U_3- выпадение 3, U_4- выпадение 4, U_5- выпадение 5, U_6- выпадение 6 очков.

Событие А называется благоприятствующим событию В, если наступление события А влечет за собой наступление события В.

Событие В – выпадение четного числа очков.

U_2, , U_4, U_6 - благоприятствующие события.

Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события A называется отношение числа элементарных событий m, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу n всех элементарных событий, входящих в данную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

Достоверные события

Событие называется **достоверным,** если оно наступает всегда, при любом испытании.

Вероятность достоверного события всегда равна 1.

Примеры достоверных событий

- ***Испытание*** – однократное бросание игральной кости

- **<u>Событие</u>** – выпадение менее 7 очков

- ***Испытание*** – извлечение шара из урны, в которой только белые шары

- **<u>Событие</u>** – вынут белый шар

Невозможные события

Событие называют **невозможным**, если оно не наступает никогда, то есть благоприятных исходов для него 0.

Вероятность невозможного события равна 0 .

Примеры невозможных событий

- ***Испытание*** – бросание игральной кости
- **<u>Событие</u>** – выпадение семи очков

- ***Испытание*** – извлечение шара из урны, в которой только белые шары
- **<u>Событие</u>** – вынут черный шар

Независимые события

- Несколько событий $A_1, A_2, \ldots A_k$ называются независимыми в совокупности, если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.
- В противном случае события называют зависимыми.

Примеры независимых событий

1. На обоих кубиках выпадет шестерка;
2. При подбрасывании двух монет выпадут два орла;
3. При вытаскивании двух шаров из урны оба шара будут красными.

Сумма событий

Суммой событий A и B называют событие C=A+B, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B

Пример суммы событий

- Испытание – стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу)
- A – попадание в мишень 1 стрелка;
- B – попадание в мишень 2 стрелка;
- C=A+B – попадание в мишень хотя бы одним стрелком.

Произведение событий

- Произведением событий A и B называют событие C=AB, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие A и событие B.

Пример произведения событий

- Испытание – стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу)
- A – попадание в мишень 1 стрелка;
- B – попадание в мишень 2 стрелка;
- C=AB – оба стрелка попали в мишень.

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместимых событий

- Вероятность суммы двух совместимых событий А и В равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

- Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Условная вероятность

Пусть события А и В – зависимые. Условной вероятностью события

Р(А /В) называется вероятность события А при условии, что событие В уже наступило.

Условной вероятностью события

Р(В /А) называется вероятность события В при условии, что событие А уже наступило.

Теорема умножения вероятностей

- Вероятность произведения двух событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило

$$P(AB)=P(A)P(B/A)$$

$$P(AB)= P(B)P(A/B)$$

В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Опыт: бросают три игральные кости.

Благоприятное событие А: в сумме выпало 7 очков.

К-во благоприятных событий m=?

331	223	511
313	232	151
133	322	115
412	142	
421	214	
124	241	

$\}$ 15

К-во всех событий группы n=?

1-я кость - 6 вариантов
2-я кость - 6 вариантов
3-я кость - 6 вариантов

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{216} \approx \boxed{0{,}07}$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

Условие можно трактовать так: какова вероятность того, что все четыре раза выпадет решка?

К-во всех событий группы n=?

К-во благоприятных событий m=?

m=1

Четыре раза выпала решка.

1-й раз - 2 варианта
2-й раз - 2 варианта
3-й раз - 2 варианта
4-й раз - 2 варианта

$$\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16}$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{16} = \boxed{0{,}0625}$$

В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимается 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?

<u>Решение:</u>

Количество всех возможных результатов *n=3+9=12*.

Опытов, в результате которых может быть вынут черный шар *m=9*.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Ответ: 0, 75

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате испытания может принять одно значение из множества возможных.
Если значения величины можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, то такая величина называется дискретной.

- **Пример 1.** В студенческой группе 25 человек. Пусть величина *X* – число студентов, находящихся в аудитории перед началом занятий. Ее возможными значениями будут числа 0, 1, 2,…,25.

  При каждом испытании (начало занятий) величина X обязательно примет одно из своих возможных значений, т.е. наступит одно из событий $X = 0$, $X = 1$, …, $X = 25$.

Закон распределения случайной величины

Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется ***законом распределения*** данной случайной величины.

Простейшая формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины (обычно в порядке возрастания) и соответствующие им вероятности. Такая таблица называется рядом распределения.

.

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

- Допустим, что число возможных значений случайной величины конечно: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- При одном испытании случайная величина принимает одно и только одно постоянное значение. Поэтому события $X = x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) образуют полную группу попарно независимых событий.
- Следовательно сумма вероятностей всех событий,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Математическое ожидание

случайной величины X указывает некоторое среднее значение, около которого группируются все возможные значения X.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

- Для дискретной случайной величины математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому ее значений (при достаточно большом числе испытаний):

$$M(X) = \bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k}{n}$$

n= m_1 +m_2+…+m_k-число испытаний, в которых величина принимала значения

- Для дискретной случайной величины, которая может принимать лишь конечное число возможных значений, **математическим ожиданием** называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на вероятность этих значений:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k$$

Отклонение случайной величины

- Отклонением случайной величины Х от ее математического ожидания называют случайную величину, равную разности этой величины и ее математического ожидания

$$X - M(X)$$

Дисперсия случайной величины

- Дисперсия D(X) дискретной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)$$

Среднее квадратичное отклонение

- Средним квадратичным отклонением $\sigma(\mathrm{X})$ случайной величины X называют корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(X)}.$$

Элементы математической статистики

Генеральная совокупность и выборка

- Пусть требуется изучить множество однородных объектов. Назовем это множество статистической совокупностью.
- Статистическая совокупность, из которой отбирается часть объектов называется генеральной совокупностью.
- Множество объектов, случайным образом отобранных из генеральной совокупности называют выборкой.

Объем генеральной совокупности и выборки

- Это соответственно число элементов генеральной совокупности и выборки.
- Если элементы в выборке не повторяются, то выборка называется **бесповторной**, иначе – **выборкой с повторениями**

Репрезентативная выборка

- Свойства объектов выборки должны правильно отражать свойства объектов генеральной совокупности, тогда выборка считается репрезентативной.
- Считается, что выборка репрезентативна, если все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Варианты. Вариационный ряд

- Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причём значения $x_1, x_2 \ldots x_k$ наблюдались соответственно $n_1, n_2 \ldots n_k$ раз.
- Наблюдаемые значения $x_1, x_2 \ldots x_k$ называются вариантами, а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке – вариационным рядом.

Частоты

- Числа наблюдений

$$n_1, n_2 \ldots n_k$$

называются частотами, а их отношения к объему выборки – относительными частотами:

$$p_1^* = \frac{n_1}{n}, p_2^* = \frac{n_2}{n}, \ldots, p_k^* = \frac{n_k}{n}/$$

Сумма относительных частот равна 1.

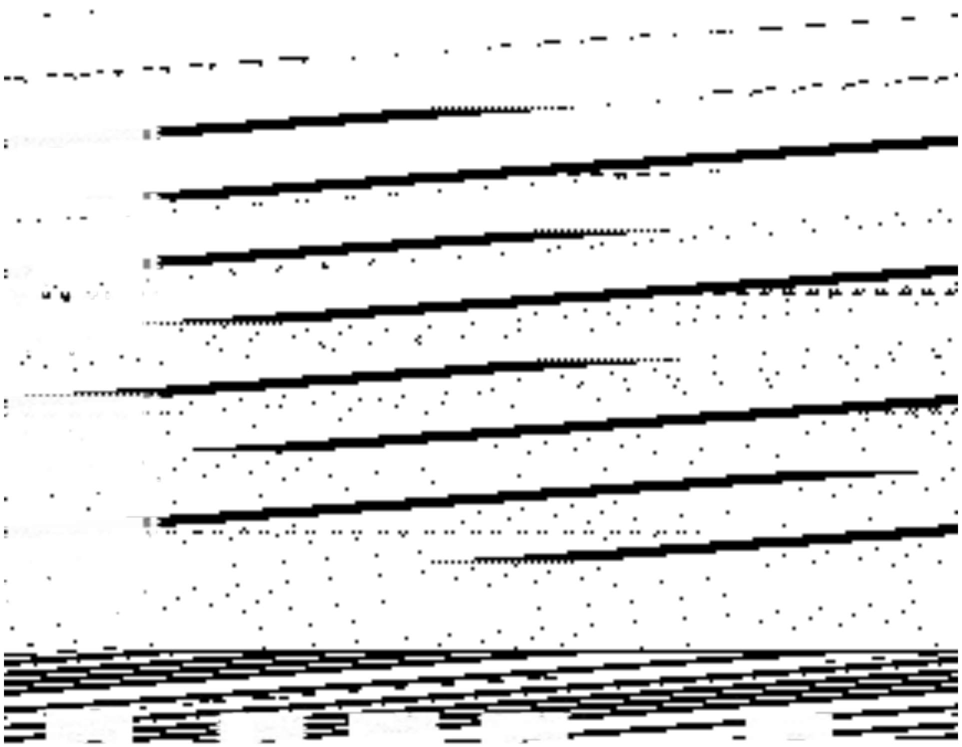
Статистическим распределением выборки

- называется перечень вариант и соответствующих им частот (или относительных частот).
- Для графического изображения статистического распределения используются

полигоны и гистограммы.

Полигоны

Для построения полигона на горизонтальной оси откладывают значения вариант, по вертикальной – относительные или абсолютные частоты.



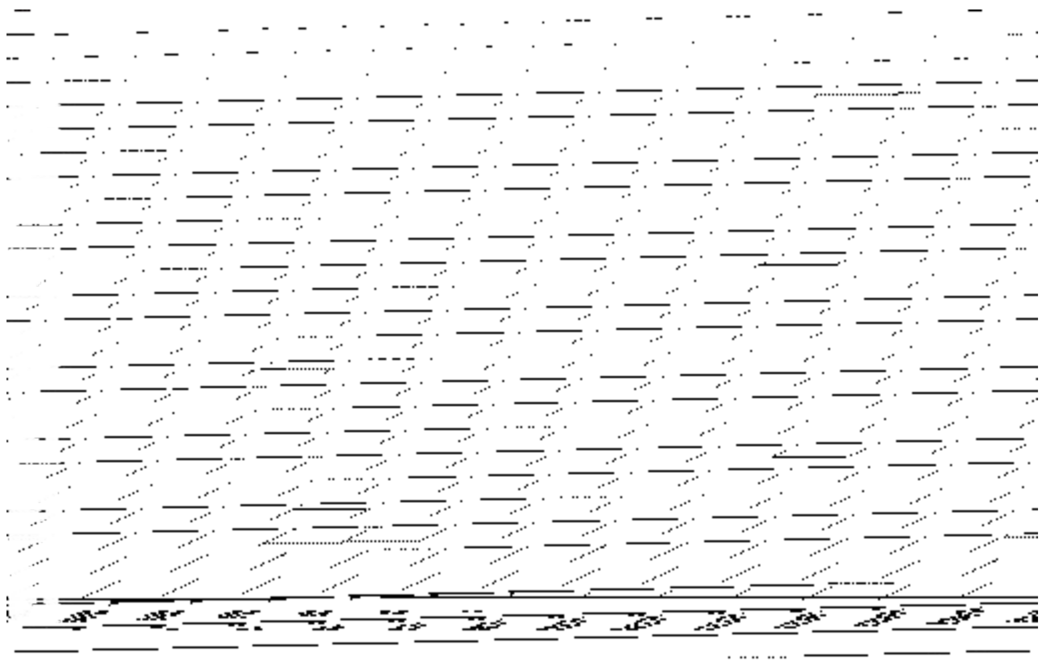
Гистограммы

- В случае большого числа вариант и в случае непрерывного распределения признака, строят гистограммы, разбивая вариационный ряд на интервалы.

Построение гистограмм

1. Сначала вариационный ряд разбивается на несколько интервалов (чаще одинаковых).
2. Интервалы откладываются на горизонтальной оси
3. Затем над каждым из рисуется прямоугольник. Если все интервалы были одинаковыми, то высота каждого прямоугольника пропорциональна числу элементов выборки, попадающих в соответствующий интервал. Если интервалы разные, то высота прямоугольника выбирается таким образом, чтобы его площадь была пропорциональна числу элементов выборки, которые попали в этот интервал.

Гистограмма



Генеральная и выборочная средняя

- Генеральной средней называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Выборочной средней называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности

$$\overline{x_{\text{в}}}=\frac{1}{n}(x_1n_1+x_2n_2+\ldots+x_kn_k)$$

Генеральная и выборочная дисперсия

- Генеральной дисперсией D называют среднее арифметическое квадратов отклонения значений признака X генеральной совокупности от средней генеральной.
- Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонения значений признака X выборки от средней выборочной.

$$D_{в}=\frac{(x_1-\overline{x_{в}})^2 n_1+(x_2-\overline{x_{в}})^2 n_2+\cdots+(x_k-\overline{x_{в}})^2 n_k}{n}$$

Мода и медиана

- ***Модой*** выборки называется вариант, которому соответствует наибольшая частота.
- ***Медианой*** выборки называется значение признака, приходящееся на середину ранжированного ряда наблюдений.

- Для определения медианы **в дискретном ряду** при наличии частот: 1) сначала вычисляют полусумму частот n/2, то есть находят номер серединного элемента вариационного ряда.
- 2) затем определяют, какое значение варианта приходится на этот элемент ряда.

- Например, если всего в выборке было n=60 элементов, то медианой будет то значение признака, которое приходится на n/2=30, то есть на 30-й элемент ряда.

Функцией распределения случайной величины *X*

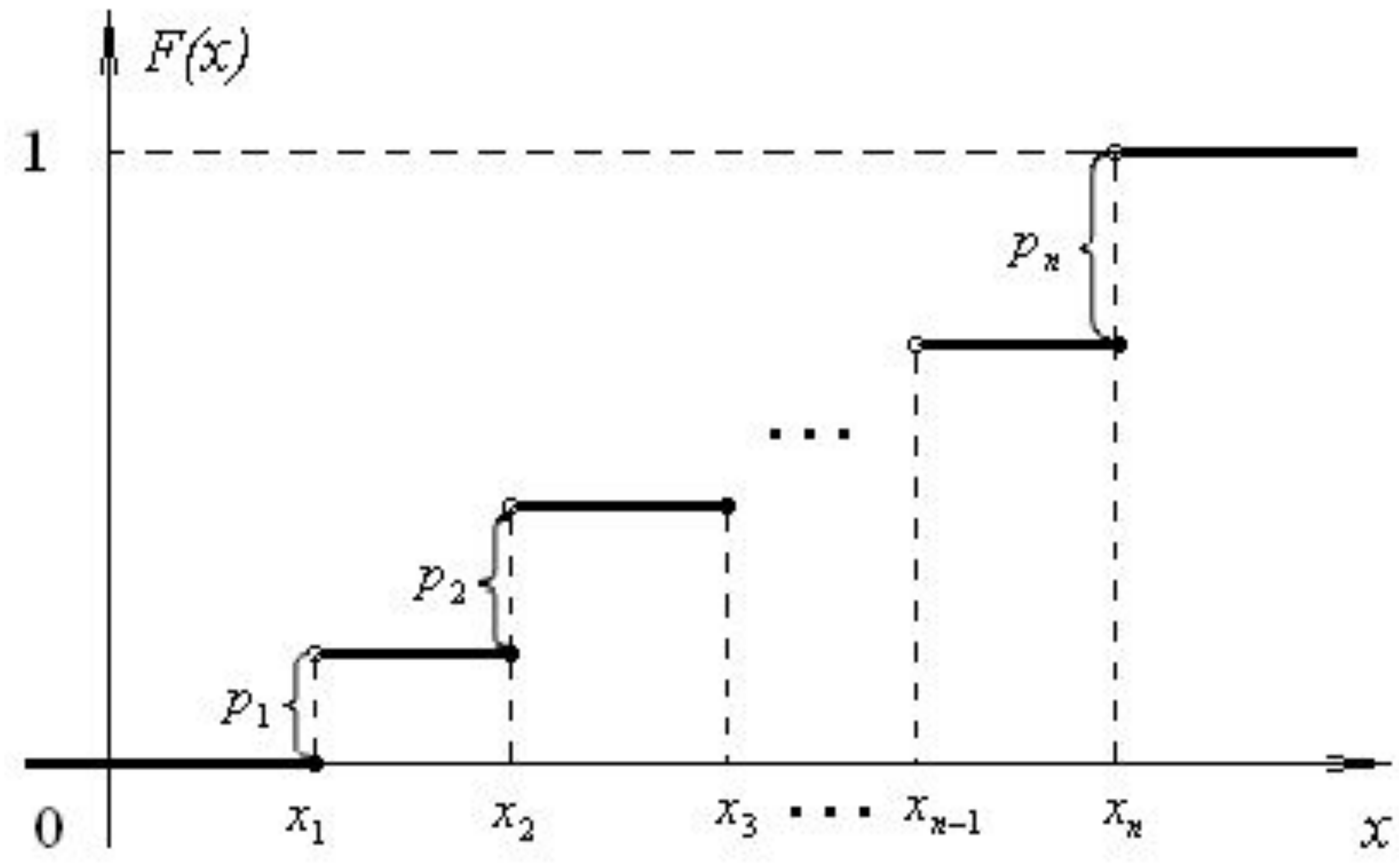
называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x, вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x, т.е.

$$F(x) = p\ (X < x).$$

Функция распределения дискретной случайной величины

-
- F(x)=$\begin{cases} 0, x \leq x_1 \\ p_1^*, x_1 < x \leq x_2 \\ p_1^* + p_2^*, x_2 < x \leq x_3 \\ \dots \\ p_1^* + p_2^* + \cdots + p_k^*, x_{k-1} < x \leq x_k \\ 1, x > x_k \end{cases}$

График функции распределения дискретной случайной величины



- Наиболее предпочтительной оценкой функции $F(x)$ для выборки является ***выборочная функция распределения*** $F_n(x)$, которая определяется следующим образом

$$F_n(x) = \frac{n_x}{n}$$

где n_x – число вариант меньших x , n – объем выборки.

Несмещённая оценка

в математической статистике — это точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру.

Выборочная средняя является несмещенной оценкой математического ожидания.

Несмещенной оценкой дисперсии

- является исправленная дисперсия

$$D_{\text{и}} = \frac{n}{n-1}\,\mathrm{D}\text{в}$$

$$D_{\text{и}} = \frac{(x_1 - \overline{x_{\text{в}}})^2 n_1 + (x_2 - \overline{x_{\text{в}}})^2 n_2 + \cdots + (x_k - \overline{x_{\text{в}}})^2 n_k}{n-1}$$