



# Моделирование процессов с целочисленными значениями

ГРЫЗЛОВА Т. П.

РГАТА, 2010

**М**оделирование.

**К**омпьютерное моделирование.

- ❖ пуассоновский процесс
- ❖ процесс размножения и гибели
- ❖ процесс чистого размножения
- ❖ распределение Пуассона
- ❖ марковская цепь
- ❖ случайные потоки
- ❖ очереди
- ❖ дисциплины обслуживания

# ПРОЦЕССЫ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

# Методика описания характеристик процессов с целочисленными значениями

- ❖ **Вводятся постулаты процесса**
- ❖ **Строится автоматная модель (стохастический автомат Мура)**
- ❖ **Составляется выражение для вероятности произвольного состояния процесса**
- ❖ **Составляется выражение для приращения вероятности состояния процесса**
- ❖ **Выполняется предельный переход к дифференциальному уравнению**
- ❖ **Задаются начальные условия и решаются системы дифференциальных уравнений**

# Пуассоновский процесс

Постулаты:

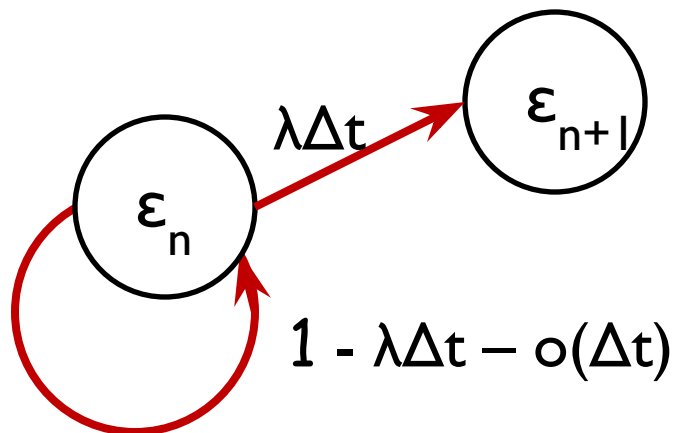
(1) Процесс начинается в момент времени 0 в состоянии  $\varepsilon_0$ .

(2) Непосредственный переход из состояния  $\varepsilon_i$  возможен только в состояние  $\varepsilon_{i+1}$

$$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

(3) Вероятность перехода

$o(\Delta t)$  – вероятность более чем одного скачка.



# Вероятности (находятся аналитически)

$P_n(t + \Delta t)$

Вероятность того, что система в момент времени  $(t + \Delta t)$  будет находиться в состоянии  $n$

$$P_n(t)P_0(\Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + P_{n-1}(t)\lambda + o(\Delta t) / \Delta t$$

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$n = 0$   $P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$   $P_0(t) = e^{-\lambda t}$   $P_0(0) = 1$

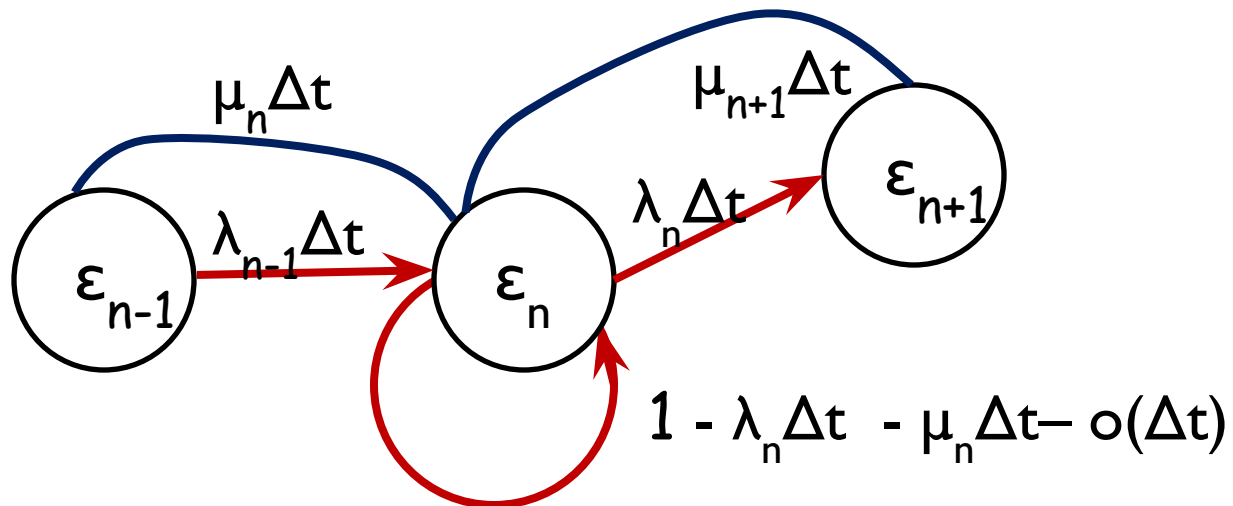
$n = 1$   $P_1(0) = 0$   $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

# гибели

Постулаты:

- (1) Непосредственный переход из состояния  $\epsilon_i$ ,  $i \geq 1$  возможен в состояния  $\epsilon_{i+1}$  и  $\epsilon_{i-1}$ . Из состояния  $\epsilon_0$  переход возможен только в состояние  $\epsilon_1$
- (2) Вероятность перехода в течении интервала  $(t, t + \Delta t)$  из состояния  $\epsilon_i$  в состояние  $\epsilon_{i+1}$  составляет  $\lambda_i \Delta t$  а в  $\epsilon_{i-1}$  —  $\mu_i \Delta t$
- (3) Вероятность более чем одного скачка -  $o(\Delta t)$



# Вероятности переходов

Состояние  $\varepsilon_n$  в момент времени  $t + \Delta t$

возможно, если:

(1) в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $\varepsilon_{n-1}$  и на рассматриваемом интервале произошел переход в  $\varepsilon_n$

(2) в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $\varepsilon_n$

и на рассматриваемом интервале времени не произошло никаких событий

(3) система находилась в состоянии  $\varepsilon_{n+1}$

и на рассматриваемом интервале произошел переход в  $\varepsilon_n$

(4) на интервале  $(t, t + \Delta t)$  происходит несколько переходов.

Поскольку возможности взаимно исключают друг друга, их складывают:

# Вероятности состояний

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t) + \lambda_{n-1} \Delta t P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} \Delta t P_{n+1}(t) + o(\Delta t)$$

$$n \geq 1$$

$$P'_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t)$$

$$n = 0$$

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

$$P_i(0) = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad n \neq i$$

Начальные условия

Условие стационарности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = p_n$$

$$\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_{n+1}$$

Вероятности переходов в марковской сети

$$\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_{n-1}$$

$$\pi_{n,n+1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}; \quad \pi_{n,n-1} = \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}$$



# Процесс линейного роста

Элементы совокупности на интервале  $\Delta t$

могут делиться с вероятностью  $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$

погибнуть с вероятностью  $\mu\Delta t + o(\Delta t)$

$$\lambda_n = n\lambda \quad \mu_n = n\mu$$

$$P'_n(t) = -(\lambda + \mu)nP_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t),$$

$$P'_0(t) = \mu P_1(t)$$

$$E\{n(0)\} = n_0 \longrightarrow E\{n(t)\} = n_0 e^{(\lambda - \mu)t}$$

# Распределение Пуассона

Распределение Пуассона - распределение вероятностей случайной величины  $X$  с целочисленными неотрицательными значениями,

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

заданное формулой

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Математическое ожидание и дисперсия такой случайной величины равна параметру  $\lambda$

$$\bar{X} = (x_1 + \dots + x_n) / n$$

Процесс радиоактивного распада: если в  $n$  независимых испытаниях события

$A_1, \dots, A_n$  происходят с одной и той же малой вероятностью  $p$ , то вероятность того, что  $k$  событий произойдут одновременно приблизительно выражается распределением Пуассона с параметром  $\lambda = np$ :

$$P_k(np)$$

# Пуассоновский процесс

В теории случайных процессов при расчете нагрузки линий связи обычно полагают, что количество вызовов, поступивших за непересекающиеся интервалы времени, – независимые случайные величины, подчиняющиеся распределению Пуассона с параметрами, значения которых пропорциональны длинам соответствующих интервалов времени.

Пуассоновский процесс – удобная математическая модель, описывает однородный поток требований в теории массового обслуживания:

- ❖ вызовы, поступающие на телефонную станцию
- ❖ выезды машин скорой помощи при транспортных происшествиях и т.п.

*Пуассоновский процесс* – случайный процесс, описывающий моменты наступления случайных событий, в которых число событий за фиксированный интервал времени имеет распределение Пуассона, а числа событий, происходящих в непересекающиеся промежутки времени, независимы.

# Марковская цепь

*Марковская цепь* – важный пример последовательности зависимых случайных испытаний с конечным или счетным числом исходов. Более точно – последовательность случайных величин

$$X_0, X_1, \dots, X_n$$

со значениями из множества натуральных чисел, при этом условное распределение случайной величины  $x_n$  при любом  $n$  зависит только от значения  $x_{n-1}$  и не зависит от всех предыдущих значений:

$$\begin{aligned} P\{X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = \\ P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\} \end{aligned}$$

# Моделирование случайных ПОТОКОВ

Рассматривается упорядоченная последовательность случайных моментов времени, в которые происходит или не происходит какое-либо событие. Такая модель называется случайным потоком

Случайный поток событий используется при моделировании:

- ❖ систем массового обслуживания
- ❖ приема импульсных сигналов
- ❖ в теории надежности

Многомерные плотности интервалов между моментами наступления событий:

$$w(\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_k, \dots)$$

$$\Delta t_1 = \tau_1 = t_1 - t_0, \quad \Delta t_2 = \tau_2 = t_2 - t_1, \dots$$

Моменты времени наступления события

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \quad (***)$$

# Типы потоков событий

Потоки с **ограниченным последствием**, у которых интервалы  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  статистически независимы, следовательно, многомерное распределение раскладывается на произведение одномерных распределений:

$$w(\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_k, \dots, \Delta t_n) = w(\Delta t_1)w(\Delta t_2) \dots w(\Delta t_k) \dots w(\Delta t_n)$$

Потоки с **ограниченным последствием** задаются последовательностью одномерных законов распределения

$$w(\Delta t_k) = p_k(\tau)$$

**Рекуррентные стационарные потоки**, у которых

$$p_2(\tau) = p_3(\tau) = \dots = p_n(\tau) = p(\tau)$$

задаются двумя одномерными плотностями  $p_0(\tau), p(\tau)$

Потоки, у которых  $p_0(\tau) = p(\tau)$

это просто **рекуррентные потоки**.

Пример: простейший пуассоновский поток при  $k = 1$  с распределением

$$p(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \quad \tau > 0$$

# Методика моделирования случайных Потоков

(1) **Ф**ормируются реализации случайных величин  $\Delta t_k$  с заданным законом распределения

(2) **П**о формулам (\*\*\*) вычисляются моменты времени наступления событий

Последовательность моделирования пуассоновского потока –

❖ генерация равномерно распределенных случайных величин

$$r_k = [0,1]$$

❖ определение интервала времени

$$\Delta t_k = -\frac{1}{\lambda} \ln r_k$$

❖ вычисление моментов времени наступления событий

- ❖ Очереди в случае одного канала
- ❖ Предположение о показательном времени обслуживания
- ❖ Очереди с бесконечным числом каналов
- ❖ Очереди с фиксированным числом каналов
- ❖ Очередь с дисциплиной FIFO
- ❖ Очередь с дисциплиной LIFO
- ❖ Очередь со случайной дисциплиной обслуживания



# ОЧЕРЕДИ



# Предположение о показательном времени обслуживания

Простейший случай постоянных коэффициентов в процессе размножения и гибели

$$\lambda_n = \lambda \quad \mu_n = \mu$$

Процесс размножения и гибели сводится к задаче об очередях при  $a = 1$

Аналогия основана на предположении о **показательных временах обслуживания**

Телефонный разговор длится  $X$  секунд, причем  $X$  – целочисленная случайная величина с известным законом распределения

$$p_n = P\{X = n\}$$

Очередь – это физическая система с двумя состояниями – занято и свободно

$$(\varepsilon_0) \rightleftharpoons (\varepsilon_1)$$

Если линия занята, то вероятность изменения состояния в следующую секунду зависит от того, сколько идет разговор. Иначе, прошлое влияет на будущее и процесс не является марковским.

# Предположение о показательном времени обслуживания

Представим, что решение продолжать или не продолжать разговор принимается каждую секунду подбрасыванием несимметричной монеты, иначе, раз в секунду производится испытание **Бернулли**, последовательность испытаний продолжается до первого успеха. Когда произойдет успех, разговор кончится.

В этом случае **время обслуживания** имеет геометрическое распределение

$$p_n = q^{n-1} p$$

**Когда** линия занята, вероятность того, что она останется занятой более одной секунды, равна  $q$

**Вероятность** перехода в свободное состояние равна  $p$

Теперь эти вероятности не зависят от того, как долго была занята линия.

Если же время нельзя считать **дискретным**, то вместо геометрического распределения берут **показательное**. Это единственное распределение, имеющее **марковский характер**

# Показательное время обслуживания

Вероятность того, что разговор, происходящий в момент времени  $s$ , продлится до  $(s + \Delta t)$ , не зависит от предыдущего разговора тогда, когда вероятность того, что разговор продлится более  $t$  единиц времени, равна

$$e^{-\lambda t}$$

Показательное время обслуживания – нулевой член распределения Пуассона, т. е. времени ожидания первого изменения

Входной поток (поток требований) имеет пуассоновский тип с параметром

$\lambda$