Математическая логика и теория алгоритмов

каф. ПМиК
доцент , к. ф.-м. н.
Мачикина Елена Павловна

Электронные ресурсы
Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/

- Балюкевич Э.Л. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Балюкевич Э.Л., Ковалева Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, 2009.— 188 c.—
- Маньшин М.Е. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Маньшин М.Е.— Электрон. текстовые данные.— Волгоград: Волгоградский институт бизнеса, Вузовское образование, 2009.— 106 c.
- Жоль К.К. Логика [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов/ Жоль К.К.— Электрон. текстовые данные.— М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.— 400 c.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: учеб. пособие /. - 3- изд. - СПб.: ПИТЕР, 2009. - 383с.

Электронные ресурсы

Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/

ЭБС «IPRbooks», по паролю

- Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов
- Верещагин Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления
- Верещагин Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции

Электронные ресурсы

- www.intuit.ru
- Бесплатный доступ после регистрации

- 1. Теория булевых функций
- 2. Логические исчисления
- 3. Алгоритмические системы

1. Булевы функции

1.1 Определения

- Функция f:$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

называется *булевой*

Утверждение

- ***Для булевой функции от n аргументов существует 2^n различных наборов аргументов.***

- **Поскольку каждая булева функция имеет конечное количество наборов аргументов, то булеву функцию можно задать в виде таблицы**

- **Базовые логические связки – отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция**

1

x_1	x_2	$\neg x_1$	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$
0	0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Из логических переменных с помощью логических связок можно составлять конструкции, которые образуют *формулы алгебры логики*

Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ – некоторое множество логических переменных.

Определим рекурсивно понятие *формулы алгебры логики*:

- **любая логическая переменная является формулой (атомарной);**
- **если α и β – формулы, то выражения ¬α, α x β, где x – логическая операция, являются формулами;**
- **никаких других формул нет.**

- **Пусть даны формулы булевых функций** $F(y_1, y_2, \ldots, y_m)$,
  $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

  Тогда *подстановкой* формул f_i в формулу F называется следующая конструкция:

$(F|\, y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$
$F(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

- Пример
  - $F(y_1, y_2) = y_1 \sim y_2$
- $f_1(x_1, x_2) = x_1$ $f_2(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$

$(F| y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2) = x_1 \sim (x_1 \& x_2)$

-

Теорема (О подстановке формул)

- ***Если** $F(y_1, y_2, \dots, y_m)$ **и** $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **– формулы алгебры логики, то** $(F| y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **также является формулой.***

- **Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются *равносильными* (т. е. на всех наборах переменных их значение истинности совпадает).**
- **Отношение равносильности формул является отношением эквивалентности.**

Правило подстановки

- ***Если в равносильных формулах:***

$F(y_1, y_2, \ldots, y_m) \equiv G(y_1, \ldots, y_m)$ – вместо всех вхождений некоторой переменной y_i подставить одну и ту же формулу, то получатся равносильные формулы.

Правило замены

- ***Если в формуле F заменить некоторую подформулу y_i на равносильную g_i, то получатся равносильные формулы.***

- ФАЛ, при образовании которых используются только операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, называются *булевыми формулами*.

Теорема Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей булева формула.

- **Множество булевых функций с определенными на нем операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции называется *булевой алгеброй*.**
- **Множество булевых функций от *n* аргументов будем обозначать P_n.**

Для булевых функций выполняется ряд равносильностей

- **Операции с константами:**
  1) $A \lor 1 \equiv 1$; $A \& 1 \equiv A$; 2) $A \lor 0 \equiv A$; $A \& 0 \equiv 0$.
- **Противоречие: $A \& \neg A \equiv 0$.**
- **Исключение третьего: $A \lor \neg A \equiv 1$.**
- **Идемпотентность: $A \& A \equiv A$; $A \lor A \equiv A$.**
- **Двойное отрицание: $\neg\neg A \equiv A$.**
- **Коммутативность: $A \& B \equiv B \& A$; $A \lor B \equiv B \lor A$.**
- **Ассоциативность:**
  $(A \lor B) \lor C \equiv A \lor (B \lor C)$; $(A \& B) \& C \equiv A \& (B \& C)$.
- **Дистрибутивность:**
  $A \& (B \lor C) \equiv (A \& B) \lor (A \& C)$; $A \lor (B \& C) \equiv (A \lor B) \& (A \lor C)$.
- **Законы де Моргана: $\neg(A \& B) \equiv \neg A \lor \neg B$; $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \& \neg B$.**

- **при выполнении преобразований часто используются <u>законы поглощения</u>:**
  1) $A \,\&\, (A \vee B) \equiv A$; $A \vee A \,\&\, B \equiv A$;
  2)$\neg A \,\&\, (A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, B$; $A \vee \neg A \,\&\, B \equiv A \vee B$.

- **А также $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$; $A \sim B \equiv (A \rightarrow B)\&(B \rightarrow A)$**

1.2 Принцип двойственности

- Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – булева функция. *Двойственной* к ней называется функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n)$.

  Из определения видно, что $f^{**}=f$.

- Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f, то такая функция f называется *самодвойственной*.

Пример

- $f_1(x_1) = x_1$ $\qquad$ $f_2(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$
- $f_1^*(x_1) = \neg f_1(\neg x_1) = x_1$
- $f_2^*(x_1, x_2) = \neg f_2(\neg x_1, \neg x_2) =$
- $= \neg(\neg x_1 \& \neg x_2) = x_1 \vee x_2$

Теорема (Общий принцип двойственности)

- ***Если $G(x_1, \ldots, x_n)$ получена подстановкой формул f_i***

  из $F(y_1, \ldots, y_m)$

  $G(x_1, \ldots, x_n) \equiv (F| \, y_i \leftarrow f_i)(x_1, \ldots, x_n)$,

то $G^*(x_1, \ldots, x_n) \equiv (F^*| \, y_i \leftarrow f^*_i)(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема
(Принцип двойственности для булевых функций)

Двойственная к булевой функции может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, дизъюнкции на конъюнкцию, конъюнкции на дизъюнкцию и сохранением структуры формулы (т.е. соответствующего исходному порядка действий).

- Булевы функции с операциями умножения и сложения по модулю 2 образуют *алгебру Жегалкина*.
- Аксиомы алгебры Жегалкина:
- Операции с константами: $A \cdot 1 \equiv A$; $A \cdot 0 \equiv 0$; $A \oplus 0 \equiv A$.
- Идемпотентность: $A \cdot A \equiv A$; $A \oplus A \equiv 0$.
- Коммутативность: $A \cdot B \equiv B \cdot A$; $A \oplus B \equiv B \oplus A$.
- Ассоциативность: $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$; $(A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C)$.
- Дистрибутивность: $A \cdot (B \oplus C) \equiv A \cdot B \oplus A \cdot C$.
- Можно перейти от алгебры Буля к алгебре Жегалкина, используя следующие соотношения: $A \oplus 1 \equiv \square A$; $A \vee B = A \oplus B \oplus A \cdot B$.
- И наоборот, от алгебры Жегалкина к алгебре Буля: $A \oplus B = \square A \cdot B \vee A \cdot \square B$
- Перейти к выражению булевой алгебры: $(x \oplus 1) \cdot y \oplus (x \oplus 1) = \square x \cdot y \oplus \square x = \square xy \cdot \square x \vee x \cdot \square xy = (x \vee \square y) \cdot \square x \vee 0 = \square x \square y$.

1.3 Нормальные формы

- Табличный способ определения истинности сложного выражения имеет ограниченное применение. Тогда может быть использован способ приведения формул к ***нормальной форме***.
- Аналитическое выражение функции (или формула) находится в ***нормальной форме***, если в ней отсутствуют знаки эквивалентности, импликации, двойного отрицания, а знаки отрицания находятся только при переменных.

- ***Элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией)*** **называется дизъюнкция переменных и/или их отрицаний**
- ***ДНФ*** **– это дизъюнкция элементарных конъюнкций.**
- ***КНФ*** **– это конъюнкция элементарных дизъюнкций.**

- **ДНФ (КНФ) называется *совершенной*, если каждая переменная формулы входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз.**

Примеры

Элементарные дизъюнкции: $x \vee y$, z.

Элементарные конъюнкции: $x \& \neg y \& z$, x.

$f(x,y,z) = x \& y \& z \vee \neg x \& y$ – ДНФ

$f(x,y,z) = (x \vee y) \& z$ – КНФ.

X & Y

- Введем обозначения

$$x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \neg x, & \alpha = 0 \end{cases}$$

Теорема

О разложении булевой функции по k переменным

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_k} x_1^{\boldsymbol{\alpha}_1} x_2^{\boldsymbol{\alpha}_2} \ldots x_k^{\boldsymbol{\alpha}_k} \cdot f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

n=3, k=2

$$f(x_1,x_2,x_3) = \bigvee_{\alpha_1,\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot f(\alpha_1,\alpha_2,x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdot f(0,0,x_3) \vee$$

$$\bar{x}_1 x_2 \cdot f(0,1,x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 \cdot f(1,0,x_3) \vee x_1 x_2 \cdot f(1,1,x_3)$$

Доказательство

- **Выберем какой-либо набор значений для переменных $x_1, \ldots, x_n$.**
- **Пусть это будет $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.**
- **Заметим, что** $\sigma_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & \sigma_i = \alpha_i \\ 0, & \sigma_i \neq \alpha_i \end{cases}$

- Подставим в правую часть формулировки теоремы вместо $x_1, \dots, x_n$ набор $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.
- Получим.

$$\bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\dots\sigma_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$$

- Поскольку коэффициент перед функцией равен 1 только при равных значениях σ_i и α_i, в разложении останется только один член
- $$\sigma_1^{\alpha_1}\dots\sigma_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$$
- и $\sigma_i=\alpha_i$, т.е. $f(\sigma_1,\dots,\sigma_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$

- **Получена левая часть формулы теоремы. Поскольку набор был выбран произвольно, получаем, что утверждение верно любого набора $x_1, \ldots, x_n$**

Следствие 1 Разложение Шеннона

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \neg x_1 \cdot f(0, x_2, ..., x_n) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, ..., x_n)$$

Следствие 2

При k=n

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{f=1} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

Построение СДНФ

- **1. Найти строки в таблице истинности , где значение функции *f* *истинное*.**
- **2. Каждому найденному набору *σ_1, …, σ_n*. поставить в соответствие конъюнкцию**

$$\tilde{x}_1 \,\&\, \tilde{x}_2 \,\&\ldots\&\, \tilde{x}_n$$

- **где**

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{åñëè}\ \sigma_i = 1 \\ \neg x_i, & \text{åñëè}\ \sigma_i = 0 \end{cases}$$

- **3. Составить дизъюнкцию из полученных конъюнкций**

Построение СКНФ

- 1. Найти строки в таблице истинности , где значение функции *f* ложное.
- 2. Каждому найденному набору $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. поставить в соответствие дизъюнкцию

$$\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n$$

- где

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{åñëè}\ \sigma_i = 0 \\ \neg x_i, & \text{åñëè}\ \sigma_i = 1 \end{cases}$$

- 3. Составить конъюнкцию из полученных дизъюнкций

- <u>Получение из ДНФ</u>.
- Если некоторое произведение ДНФ не содержит какой-либо переменной, то необходимо домножить это произведение на дизъюнкцию этой переменной и ее отрицания и применить дистрибутивный закон.

- **Получение из КНФ**.
- **Если некоторая элементарная дизъюнкция КНФ не содержит какой-либо переменной, то необходимо дизъюнктивно добавить в нее произведение этой переменной и ее отрицания и применить дистрибутивный закон.**

1

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- Получим СДНФ и СКНФ по таблице истинности

$$f(x,y,z) = \neg x \neg y \neg z \vee \neg x \neg y z \vee \neg x y z \vee x \neg y z \vee xyz - \text{ÑÄÍÔ} \;,$$

$$f(x,y,z) = (x \vee \neg y \vee z)(\neg x \vee y \vee z)(\neg x \vee \neg y \vee z) - \text{ÑÊÍÔ}$$