



Математическая логика и теория алгоритмов

каф. ПМиК

доцент , к. ф.-м. н.

Мачикина Елена Павловна

Электронные ресурсы

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>

- Балюкевич Э.Л. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Балюкевич Э.Л., Ковалева Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, 2009.— 188 с.—
- Маньшин М.Е. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Маньшин М.Е.— Электрон. текстовые данные.— Волгоград: Волгоградский институт бизнеса, Вузовское образование, 2009.— 106 с.
- Жоль К.К. Логика [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов/ Жоль К.К.— Электрон. текстовые данные.— М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.— 400 с.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: учеб. пособие / . - 3- изд. - СПб.: ПИТЕР, 2009. - 383с.

Электронные ресурсы

Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>

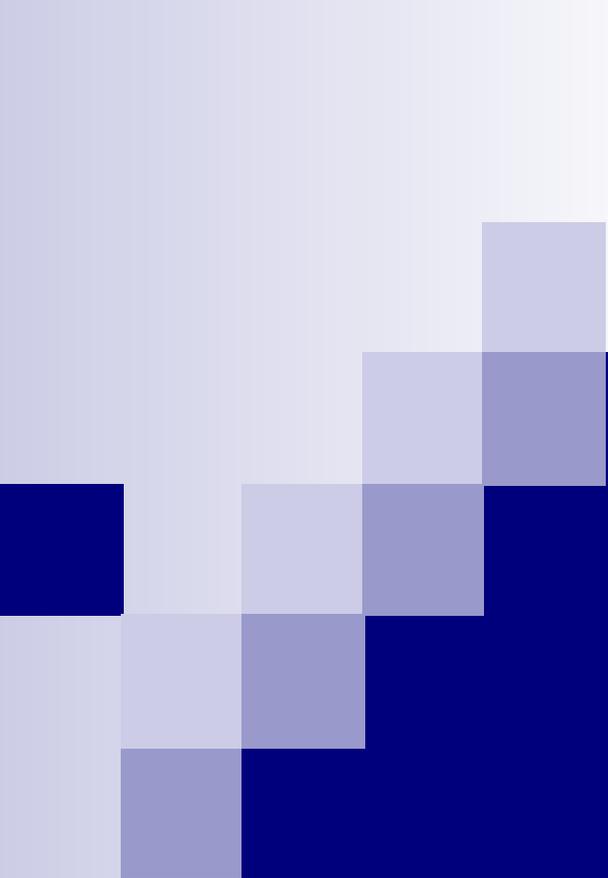
ЭБС «IPRbooks», по паролю

- **Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов**
- **Верещагин Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления**
- **Верещагин Н.К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции**

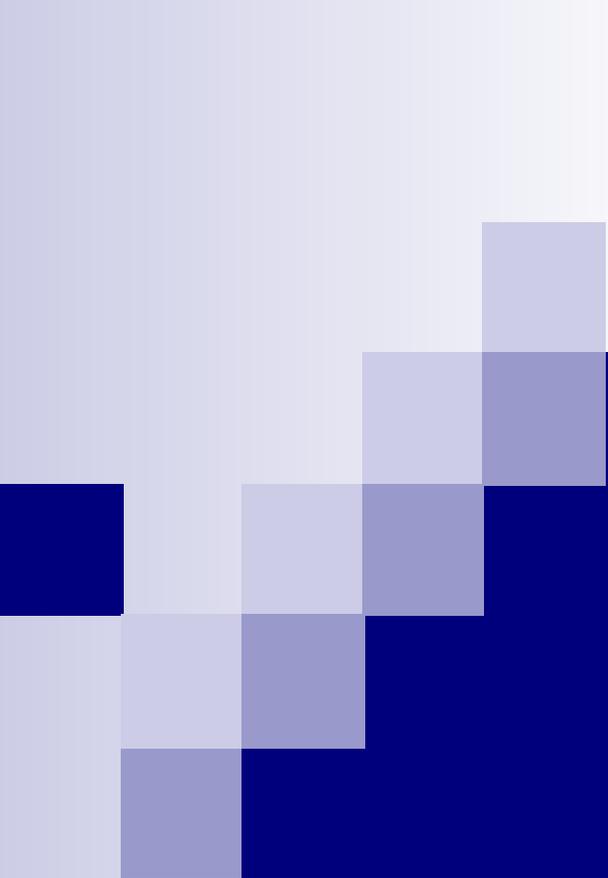
Электронные ресурсы

- www.intuit.ru
- Бесплатный доступ после регистрации

- 
- **1. Теория булевых функций**
 - **2. Логические исчисления**
 - **3. Алгоритмические системы**



1. Булевы функции



1.1 Определения

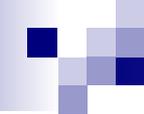
■ Функция $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$

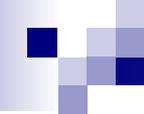
от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n

называется булевой

Утверждение

- *Для булевой функции от n аргументов существует 2^n различных наборов аргументов.*

- 
- 
- **Поскольку каждая булева функция имеет конечное количество наборов аргументов, то булеву функцию можно задать в виде таблицы**

- 
- 
- **Базовые логические связки – отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция**

1

x_1	x_2	$\neg x_1$	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Из логических переменных с помощью логических связок можно составлять конструкции, которые образуют *формулы алгебры логики*

Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ – некоторое множество логических переменных.

Определим рекурсивно понятие *формулы алгебры логики*:

- любая логическая переменная является формулой (атомарной);
- если α и β – формулы, то выражения $\neg\alpha$, $\alpha \times \beta$, где \times – логическая операция, являются формулами;
- никаких других формул нет.

- Пусть даны формулы булевых функций
 $F(y_1, y_2, \dots, y_m),$
 $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$

Тогда *подстановкой* формул f_i в формулу F называется следующая конструкция:

$$(F | y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

- Пример

- $F(y_1, y_2) = y_1 \sim y_2$

- $f_1(x_1, x_2) = x_1$ $f_2(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$

$$(F \mid y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2) = x_1 \sim (x_1 \& x_2)$$

-

Теорема (О подстановке формул)

- Если $F(y_1, y_2, \dots, y_m)$ и $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – формулы алгебры логики, то $(F |_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, x_2, \dots, x_n)$ также является формулой.

- 
- **Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются *равносильными* (т. е. на всех наборах переменных их значение истинности совпадает).**
 - **Отношение равносильности формул является отношением эквивалентности.**

Правило подстановки

- *Если в равносильных формулах:*

$F(y_1, y_2, \dots, y_m) \equiv G(y_1, \dots, y_m)$ – вместо всех вхождений некоторой переменной y_i подставить одну и ту же формулу, то получатся равносильные формулы.

Правило замены

- *Если в формуле F заменить некоторую подформулу y_i на равносильную g_i , то получатся равносильные формулы.*

- ФАЛ, при образовании которых используются только операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, называются *булевыми формулами*.

Теорема Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей булева формула.

- Множество булевых функций с определенными на нем операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции называется *булевой алгеброй*.
- Множество булевых функций от n аргументов будем обозначать P_n .

Для булевых функций выполняется ряд равносильностей

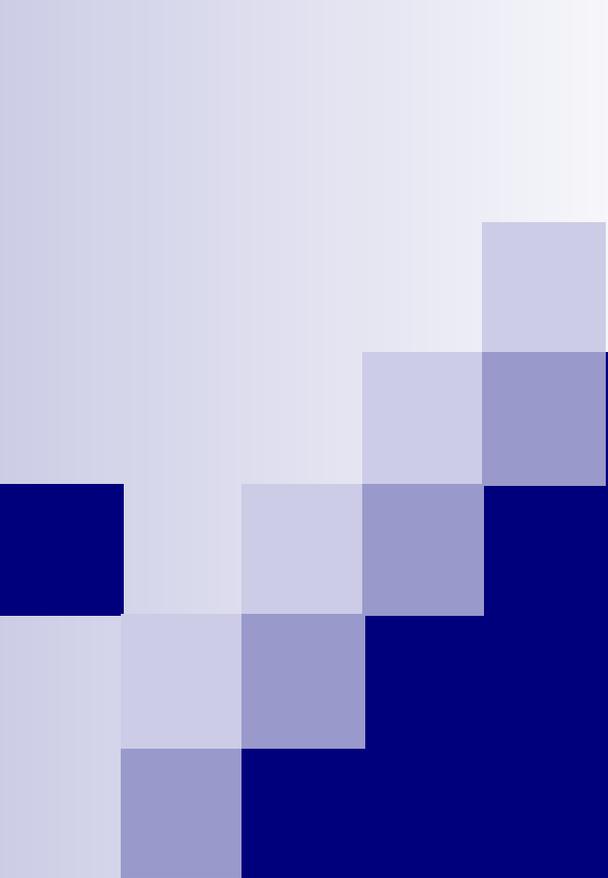
- **Операции с константами:**
1) $A \vee 1 \equiv 1; A \& 1 \equiv A;$ 2) $A \vee 0 \equiv A; A \& 0 \equiv 0.$
- **Противоречие:** $A \& \neg A \equiv 0.$
- **Исключение третьего:** $A \vee \neg A \equiv 1.$
- **Идемпотентность:** $A \& A \equiv A; A \vee A \equiv A.$
- **Двойное отрицание:** $\neg \neg A \equiv A.$
- **Коммутативность:** $A \& B \equiv B \& A; A \vee B \equiv B \vee A.$
- **Ассоциативность:**
 $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C); (A \& B) \& C \equiv A \& (B \& C).$
- **Дистрибутивность:**
 $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C); A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C).$
- **Законы де Моргана:** $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B; \neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B.$

- при выполнении преобразований часто используются законы поглощения:

$$1) A \& (A \vee B) \equiv A; \quad A \vee A \& B \equiv A;$$

$$2) \neg A \& (A \vee B) \equiv \neg A \& B; \quad A \vee \neg A \& B \equiv A \vee B.$$

- А также $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$; $A \sim B \equiv (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$



1.2 Принцип двойственности

- Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – булева функция. *Двойственной* к ней называется функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n)$.

Из определения видно, что $f^{**}=f$.

- Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f , то такая функция f называется *самодвойственной*.

Пример

- $f_1(x_1) = x_1$ $f_2(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$
- $f_1^*(x_1) = \neg f_1(\neg x_1) = x_1$
- $f_2^*(x_1, x_2) = \neg f_2(\neg x_1, \neg x_2) =$
- $= \neg (\neg x_1 \& \neg x_2) = x_1 \vee x_2$

Теорема (Общий принцип двойственности)

- Если $G(x_1, \dots, x_n)$ получена подстановкой формул f_i

из $F(y_1, \dots, y_m)$

$$G(x_1, \dots, x_n) \equiv (F \mid y_i \leftarrow f_i)(x_1, \dots, x_n),$$

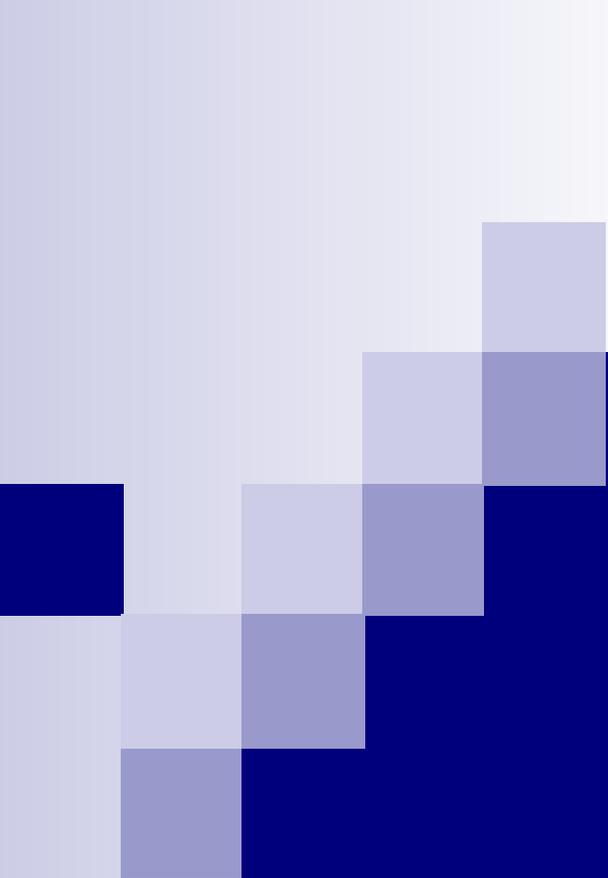
то $G^*(x_1, \dots, x_n) \equiv (F^* \mid y_i \leftarrow f_i^*)(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема

(Принцип двойственности для булевых функций)

Двойственная к булевой функции может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, дизъюнкции на конъюнкцию, конъюнкции на дизъюнкцию и сохранением структуры формулы (т.е. соответствующего исходному порядку действий).

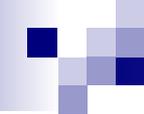
- Булевы функции с операциями умножения и сложения по модулю 2 образуют *алгебру Жегалкина*.
- Аксиомы алгебры Жегалкина:
- Операции с константами: $A \cdot 1 \equiv A$; $A \cdot 0 \equiv 0$; $A \oplus 0 \equiv A$.
- Идемпотентность: $A \cdot A \equiv A$; $A \oplus A \equiv 0$.
- Коммутативность: $A \cdot B \equiv B \cdot A$; $A \oplus B \equiv B \oplus A$.
- Ассоциативность: $(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$; $(A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C)$.
- Дистрибутивность: $A \cdot (B \oplus C) \equiv A \cdot B \oplus A \cdot C$.
- Можно перейти от алгебры Буля к алгебре Жегалкина, используя следующие соотношения: $A \oplus 1 \equiv \neg A$; $A \vee B \equiv A \oplus B \oplus A \cdot B$.
- И наоборот, от алгебры Жегалкина к алгебре Буля: $A \oplus B \equiv \neg A \cdot B \vee A \cdot \neg B$
- Перейти к выражению булевой алгебры: $(x \oplus 1) \cdot y \oplus (x \oplus 1) = \neg x \cdot y \oplus \neg x = \neg x y \cdot \neg x \vee x \cdot \neg x y = (x \vee \neg y) \cdot \neg x \vee 0 = \neg x \neg y$.



1.3 Нормальные формы

- Табличный способ определения истинности сложного выражения имеет ограниченное применение. Тогда может быть использован способ приведения формул к *нормальной форме*.
- Аналитическое выражение функции (или формула) находится в *нормальной форме*, если в ней отсутствуют знаки эквивалентности, импликации, двойного отрицания, а знаки отрицания находятся только при переменных.

- **Элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией)** называется дизъюнкция переменных и/или их отрицаний
- **ДНФ** – это дизъюнкция элементарных конъюнкций.
- **КНФ** – это конъюнкция элементарных дизъюнкций.

- 
- 
- **ДНФ (КНФ) называется *совершенной*, если каждая переменная формулы входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз.**

Примеры

Элементарные дизъюнкции: $x \vee y, z$.

Элементарные конъюнкции: $x \& \neg y \& z,$
 x .

$f(x,y,z) = x \& y \& z \vee \neg x \& y$ – ДНФ

$f(x,y,z) = (x \vee y) \& z$ – КНФ.



X & Y

- Введем обозначения

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \neg x, & \alpha = 0 \end{cases}$$

Теорема

О разложении булевой функции по k переменным

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$n=3, k=2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdot f(0, 0, x_3) \vee \bar{x}_1 x_2 \cdot f(0, 1, x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 \cdot f(1, 0, x_3) \vee x_1 x_2 \cdot f(1, 1, x_3)$$

Доказательство

- Выберем какой-либо набор значений для переменных x_1, \dots, x_n .
- Пусть это будет $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.
- Заметим, что
$$\sigma_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & \sigma_i = \alpha_i \\ 0, & \sigma_i \neq \alpha_i \end{cases}$$

- Подставим в правую часть формулировки теоремы вместо x_1, \dots, x_n набор $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

- Получим.

$$V_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$$

- Поскольку коэффициент перед функцией равен 1 только при равных значениях σ_i и α_i , в разложении останется только один член

- $$\sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$$

- и $\sigma_i = \alpha_i$, т.е.
$$f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$$

- Получена левая часть формулы теоремы. Поскольку набор был выбран произвольно, получаем, что утверждение верно любого набора X_1, \dots, X_n

Следствие 1 Разложение Шеннона

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \neg x_1 \cdot f(0, x_2, \dots, x_n) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n)$$

Следствие 2

При $k=n$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{f=1}^n x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Построение СДНФ

- 1. Найти строки в таблице истинности , где значение функции *f* истинное.
- 2. Каждому найденному набору $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ поставить в соответствие конъюнкцию

$$\tilde{x}_1 \& \tilde{x}_2 \& \dots \& \tilde{x}_n$$

- где
$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{аñëè } \sigma_i = 1 \\ \neg x_i, & \text{аñëè } \sigma_i = 0 \end{cases}$$
- 3. Составить дизъюнкцию из полученных конъюнкций

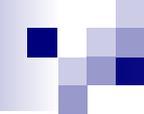
Построение СКНФ

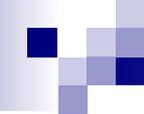
- 1. Найти строки в таблице истинности, где значение функции f ложное.
- 2. Каждому найденному набору $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ поставить в соответствие дизъюнкцию

$$\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \dots \vee \tilde{x}_n$$

- где
$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } \sigma_i = 0 \\ \neg x_i, & \text{если } \sigma_i = 1 \end{cases}$$

- 3. Составить конъюнкцию из полученных дизъюнкций

- 
- 
- Получение из ДНФ.
 - Если некоторое произведение ДНФ не содержит какой-либо переменной, то необходимо домножить это произведение на дизъюнкцию этой переменной и ее отрицания и применить дистрибутивный закон.

- 
- Получение из КНФ.
 - Если некоторая элементарная дизъюнкция КНФ не содержит какой-либо переменной, то необходимо дизъюнктивно добавить в нее произведение этой переменной и ее отрицания и применить дистрибутивный закон.

1

- Получим СДНФ и СКНФ по таблице истинности

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x, y, z) = \neg x \neg y \neg z \vee \neg x \neg y z \vee \neg x y z \vee x \neg y z \vee x y z - \text{ÑÄÍÔ} ,$$

$$f(x, y, z) = (x \vee \neg y \vee z)(\neg x \vee y \vee z)(\neg x \vee \neg y \vee z) - \text{ÑÊÍÔ}$$