Лекция 5.

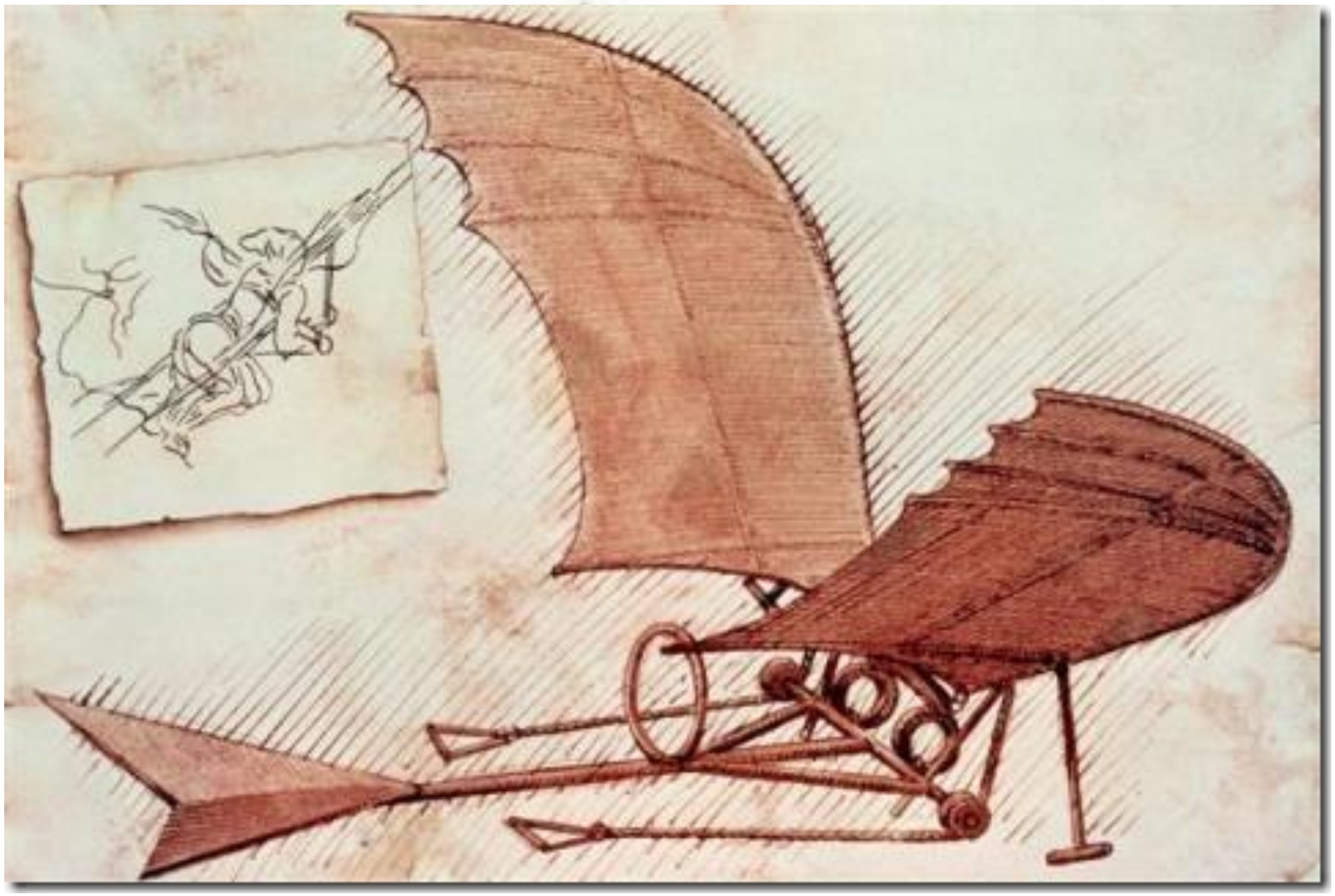
РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Каждым тяжелым телом побеждается сопротивление трения, равное четвертой части этого веса.

Леонардо да Винчи

Леонардо да Винчи
1452-1519, Италия

Музей Леонардо да Винчи
Венеция, Италия



… и когда они ели, сказал: истинно говорю вам, что один из вас предаст Меня

На предыдущей лекции

- Были изучены методы расчета плоских ферм и плоских составных конструкций

- До сих пор, однако, изучались лишь системы, в которых отсутствуют силы трения

Цель лекции

- ***Познакомиться с решением задач статики при наличии силы трения***
- ***Ввести понятие центра тяжести тела и познакомиться с методами его расчета***

План лекции

5.1. Сила трения покоя

5.2. Сила трения скольжения

5.3. Условия равновесия при наличии трения

5.4. Трение качения

5.5. Центр тяжести

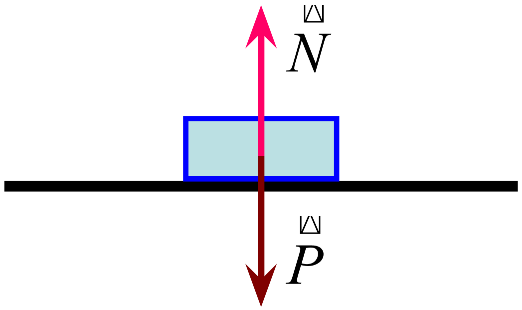
5.6. Методы расчета центра тяжести

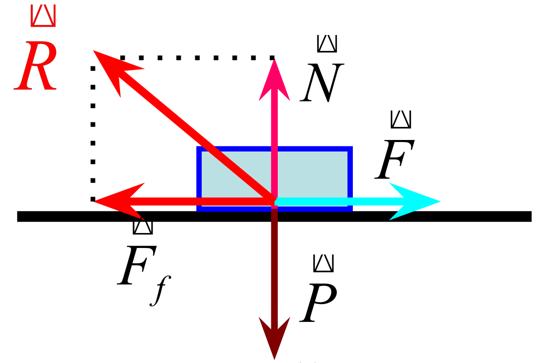
5.7. Заключение

5.1. Сила трения покоя

5.1.1. Сила трения покоя

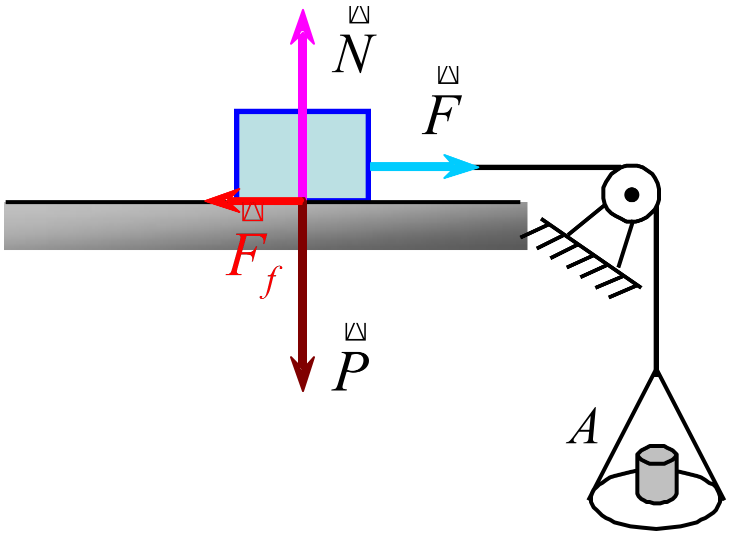
Гладкая поверхность **Реальная поверхность**





- Возникает сила, препятствующая движению под действием силы
- **Движение возникает лишь когда** $\vec{F} > \vec{F}_f^*$
- Сила трения покоя может принимать любые значения от нуля до некоторого максимального, называемого предельной силой трения покоя. Направлена она в сторону, противоположную той, куда действующие активные силы стремятся сдвинуть тело

- **Закон Кулона-Амонтона** $F_f^* = f_s N$ Как определить f_s?

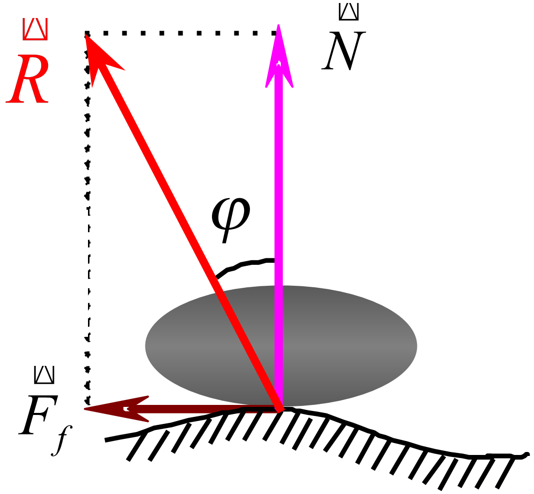


$$f_s = F_f^* / P$$

- Коэффициент трения покоя (статический коэффициент трения) определяется лишь свойствами материалов соприкасающихся тел и не зависит от площади контакта этих тел

Материал	f_s
Медно-свинцовый сплав по стали (без смазки)	0.2
Тщательно очищенные металлы по металлу	100
Стекло по стеклу, очищенные	1
Дерево по металлу, сухое и очищенное	0.2–0.6
Кожа по металлу, очищенная сухая	0.6

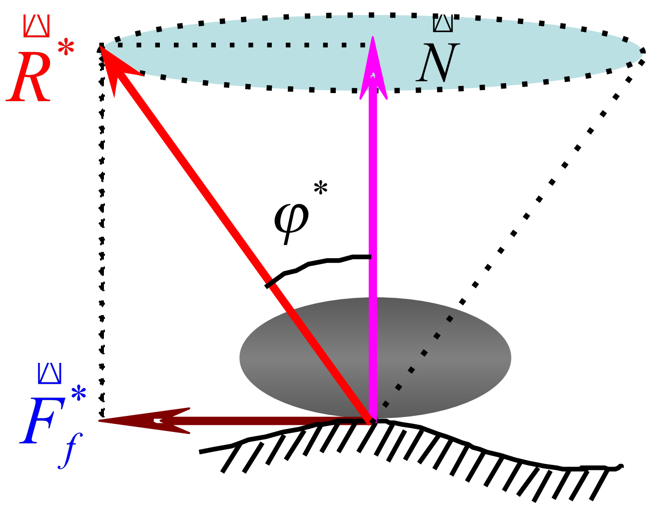
- **Поверхность, на которой на тело действует сила трения, будем называть шероховатой**



$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_f$$

$$\mathrm{tg}\varphi = F_f / N$$

Для предельной силы трения имеем

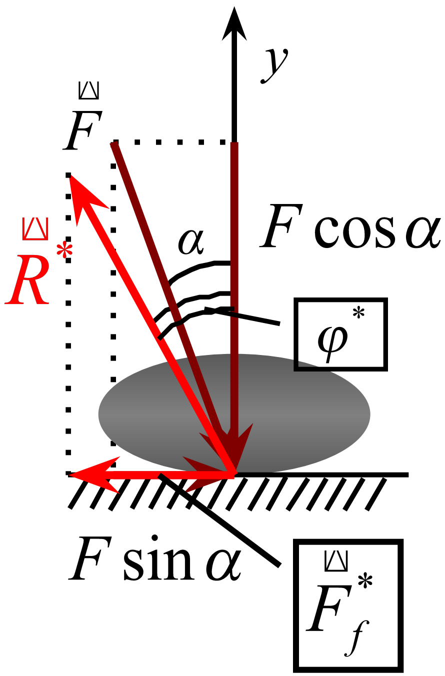


$$\vec{R}^* = \vec{N} + \vec{F}_f^*$$

$$\mathrm{tg}\varphi^* = F_f^* / N = f_s$$

Конус с верши… …сания тел, образующая которого составляет угол трения с норм… …остям, называется **конусом трения**

φ^* – угол трения



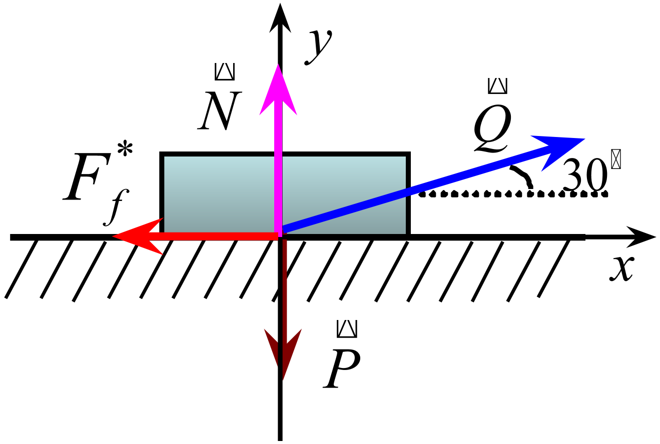
- Сдвинется ли тело под действием силы при заданном значении угла α?
- Сдвинется ли тело, если при заданном значении угла α увеличивать модуль силы F?

Условие, при котором тело сдвинется

$$F\sin\alpha > F_f^* = f_s N = f_s F\cos\alpha$$

$\operatorname{tg}\alpha > f_s$ **но** $\operatorname{tg}\varphi^* = f_s$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\varphi^*$ $\quad \alpha > \varphi^*$

Если внешняя сила *F* лежит внутри конуса трения, то сколько ее не увеличивай, тело не сдвинется (заклинится)



Определить силу Q, направленную под углом 30° к горизонту, которую необходимо приложить к грузу веса P = 10 кН, чтобы сдвинуть его с места, если коэффициент трения $f_s = f = 0.6$.

Решение

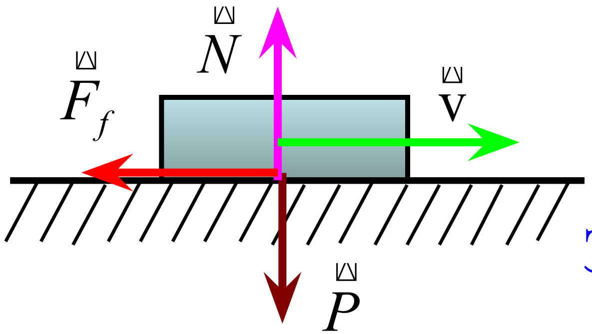
- Введем систему координат, считая тело материальной точкой
- Составим уравнения предельного равновесия груза

$$\sum_i F_{ix} = 0, \qquad -F_f^* + Q\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \qquad N - P + Q\sin 30^\circ = 0$$

Но $F_f^* = fN \Longrightarrow Q = fP/(\cos 30^\circ + f\sin 30^\circ) = 5{,}2(kH)$

5.2. Сила трения скольжения

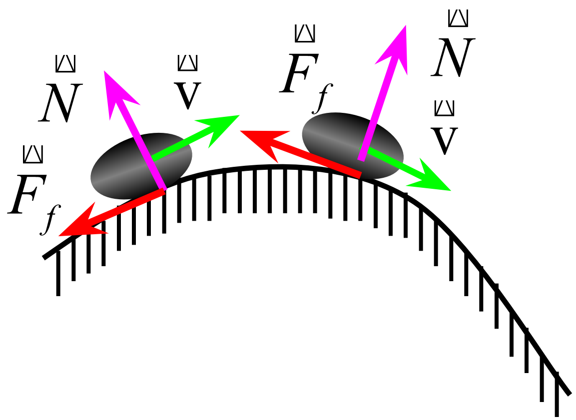


Пусть теперь тело веса *P* движется по плоской шероховатой поверхности

Закон Кулона-Амонтона

$$F_f = f_d N$$

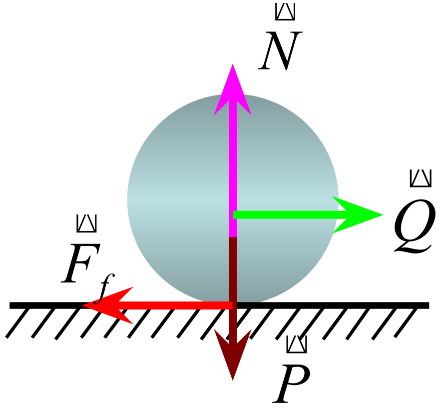
Сила трения направлена противоположно вектору скорости движения тела



$$\vec{F}_f = -f_d N \frac{\vec{v}}{v}$$

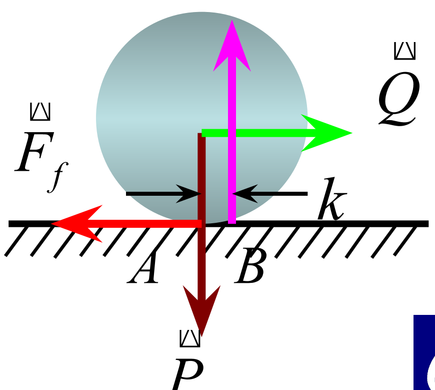
$$f_d < f_s$$

5.3. Трение качения



- Чтобы заставить диск катиться по поверхности, необходимо приложить силу
- На катящийся диск радиуса R и веса P на шероховатой плоскости также действует сила сопротивления, которую называют **силой трения качения**

- Если рассмотреть схему на верхнем рисунке, то качение должно начаться при любой сколь угодно малой силе Q, что противоречит опыту



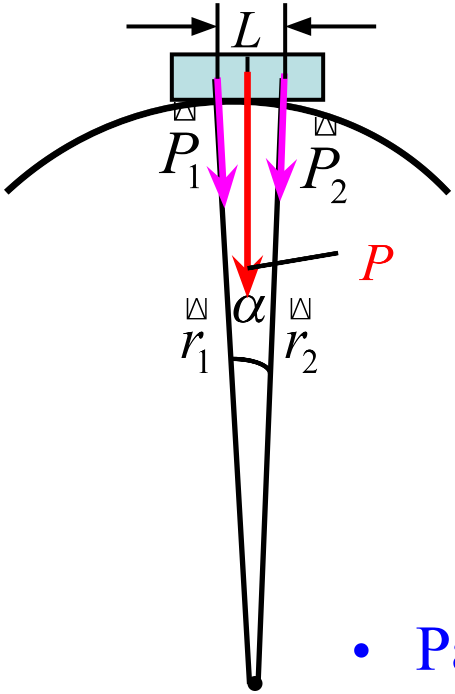
- Противоречие связано с ограниченностью применимости в данном случае модели твердого тела. Соприкасающиеся при качении диска тела деформируются, их происходит вдоль некоторой площадки AB

$$Q_{\max} R = Nk \quad \Longrightarrow \quad M_f^* = kN$$

k – коэффициент трения качения

5.4. Центр тяжести

5.4.1. Определение центра тяжести



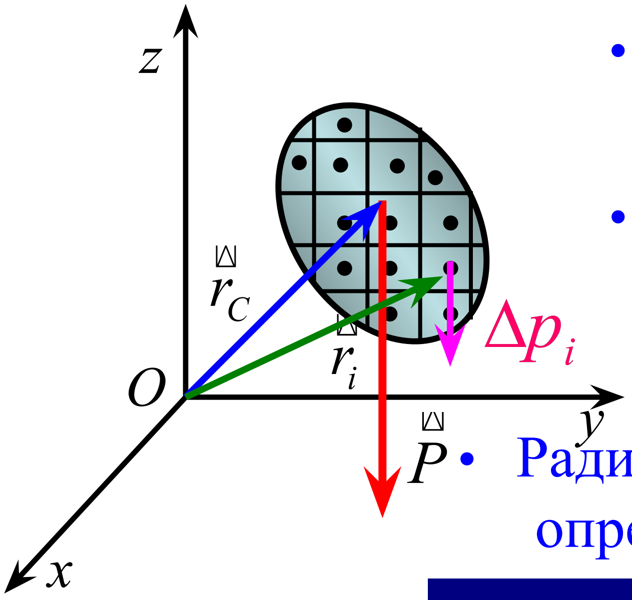
$$\sin(\alpha/2) = L/2r_i \equiv L/2R_\mathrm{E} << 1$$

- Система сил тяжести, действующих на различные части любого тела, лежащего на поверхности Земли, с хорошей точностью можно заменить системой параллельных сил

- Равнодействующая сил тяжести, действующая на каждую частицу тела, приложена в центре данной системы параллельных сил и равна сумме сил тяжести (весу тела)

- Точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на тело, и называется **центром тяжести тела**

5.4.2. Координаты центра тяжести



- Разобьем данное тело на элементы ΔV_i прямоугольной сеткой
- Каждый из полученных элементов заменяем точкой

$$P = \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i$$

- Радиус-вектор центра тяжести определяется соотношением

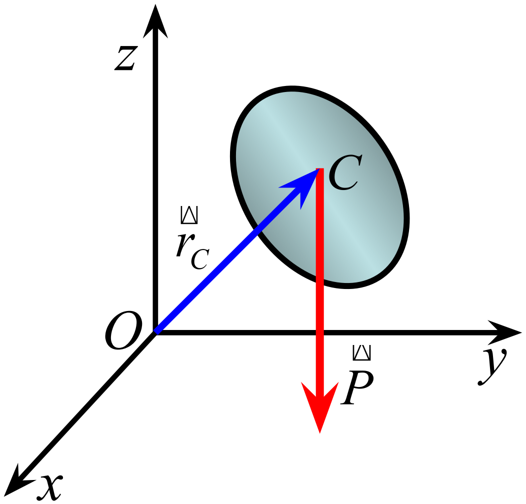
$$\vec{r}_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_C = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta V_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta V_i}$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P}\iiint_V \gamma(\vec{r})\vec{r}\,dV$$

$$P = \iiint_V \gamma(\vec{r})\,dV$$

5.4.3. Координаты центра тяжести



$$x_C = P^{-1} \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\, x\, dx\, dy\, dz$$

$$y_C = P^{-1} \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\, y\, dx\, dy\, dz$$

$$z_C = P^{-1} \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\, z\, dx\, dy\, dz$$

- Центр тяжести пластины

$$\vec r_C = \frac{1}{P} \iint\limits_S \gamma(\vec r)\, \vec r\, dS$$

- Центр тяжести стержня

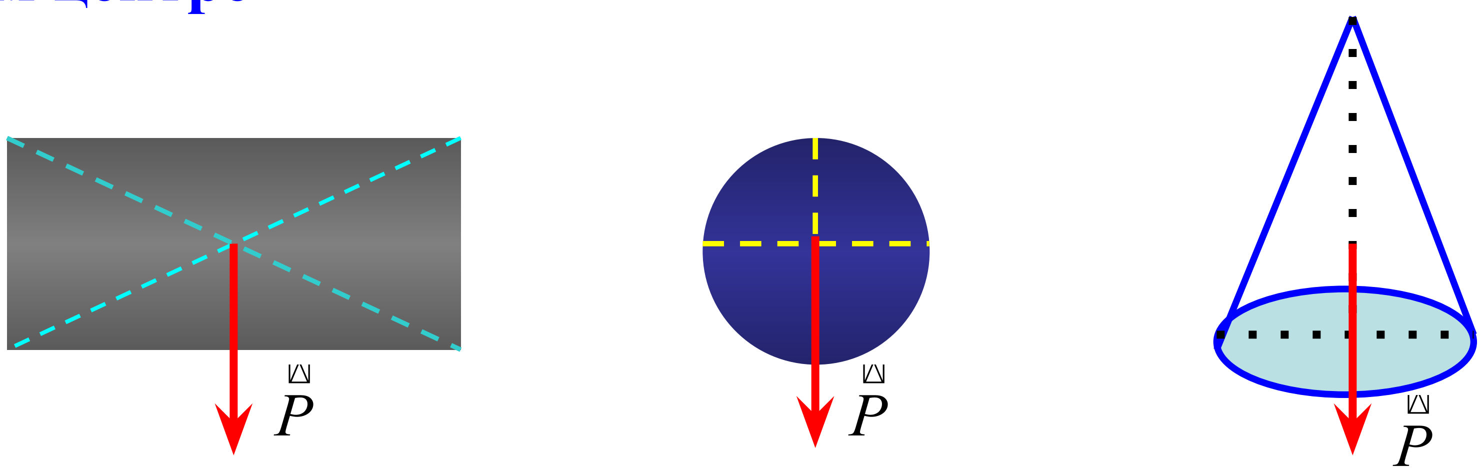
$$\vec r_C = \frac{1}{P} \int\limits_l \gamma(\vec r)\, \vec r\, dl$$

- Центр тяжести однородных тел $\gamma = \mathrm{const}$

$$\vec r_C = V^{-1} \iiint\limits_V \vec r\, dx\, dy\, dz \qquad \vec r_C = \mathrm{S}^{-1} \iint\limits_S \vec r\, dx\, dy \qquad \vec r_C = l^{-1} \int\limits_l \vec r\, dl$$

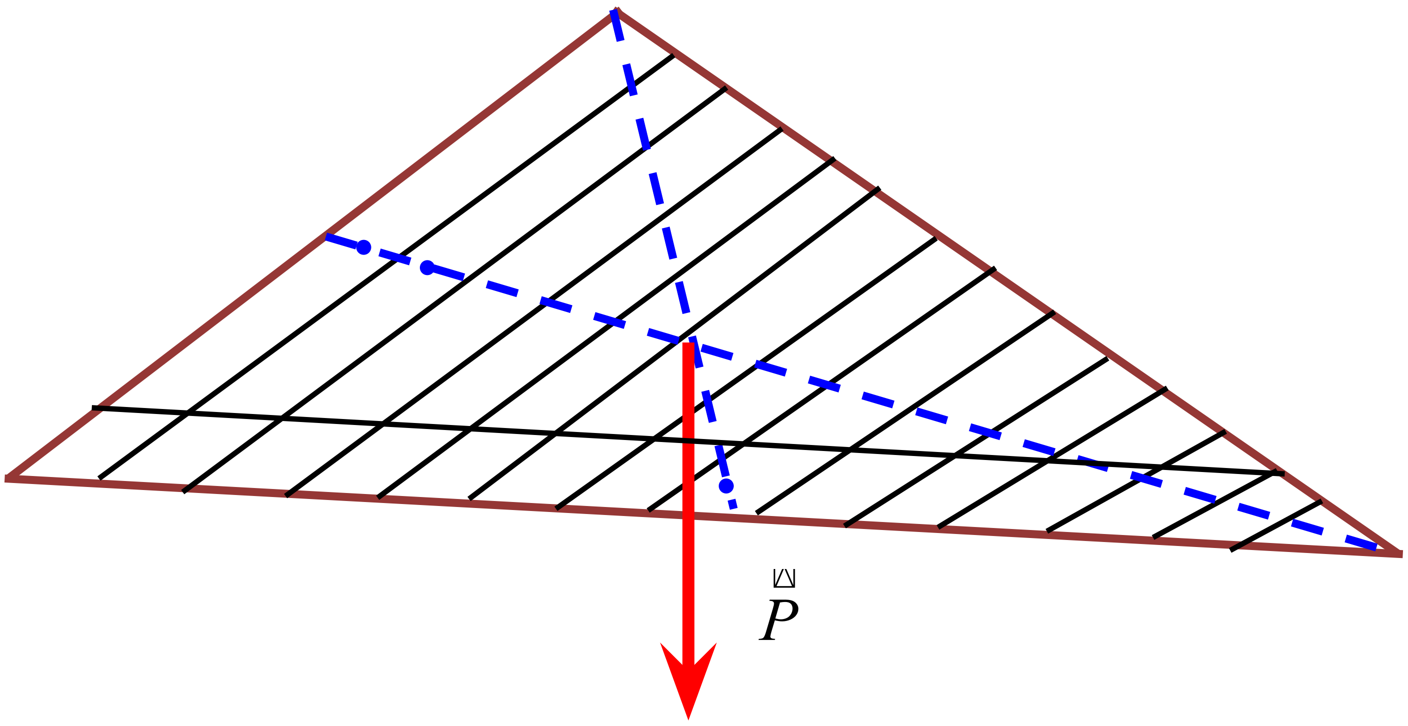
- **Метод симметрии**

Если однородное тело имеет плоскость или ось симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии. Если же тело имеет центр симметрии, то его центр тяжести находится именно в этом центре



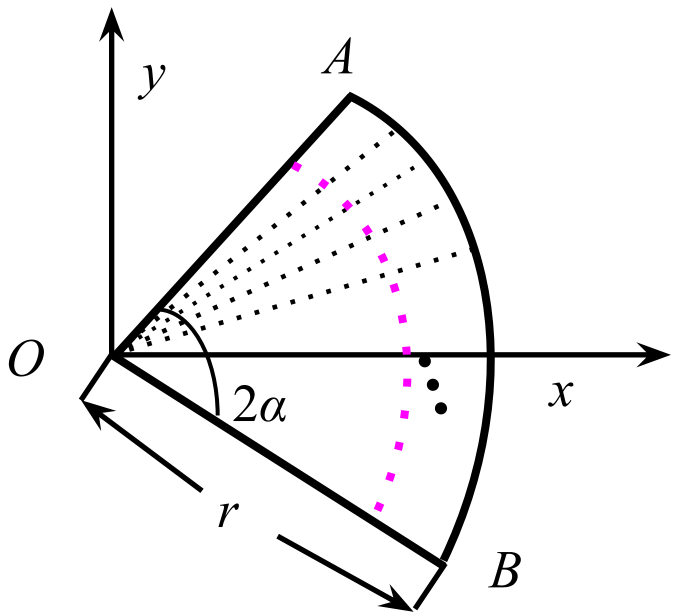
5.4.6. Центр тяжести треугольной пластины

- **Метод симметрии**



- **Центр тяжести однородной треугольной пластины лежит на пересечении медиан**

• Метод симметрии



- Рассмотрим круговой сектор радиуса r с центральным углом 2α
- Ось x направим вдоль оси симметрии

$$y_C = 0$$

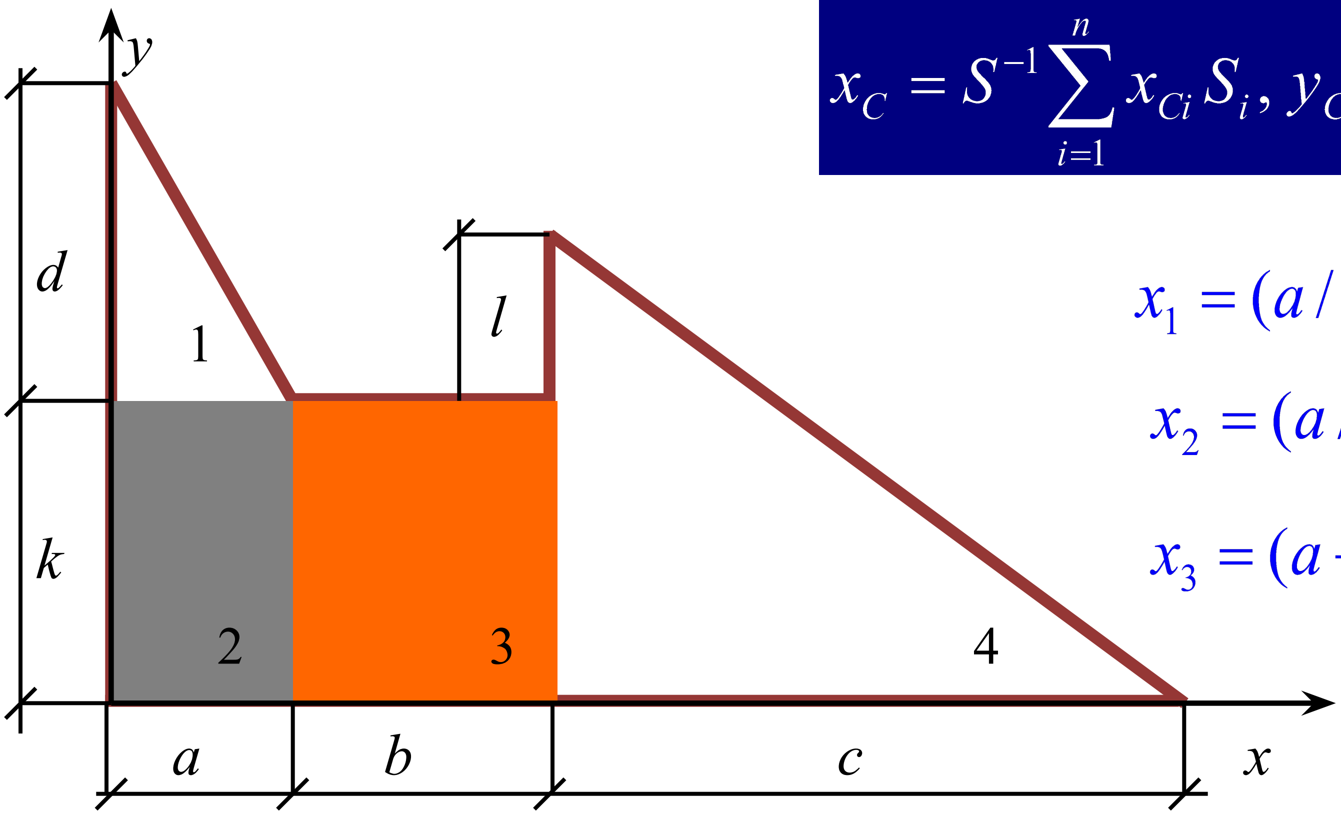
- Чтобы найти x_C, разобьем фигуру радиусами на n секторов. В пределе имеем n равнобедренных треугольников с высотой, которая является и медианой

- Центры тяжести этих треугольников лежат на дуге радиуса $R = 2r/3$

$$x_C = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$$

Метод разбиения

$$x_C = S^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_{Ci} S_i,\ y_C = S^{-1}\sum_{i=1}^{n} y_{Ci} S_i$$



$$x_1 = (a/3),\quad S_1 = (ad/2)$$

$$x_2 = (a/2),\quad S_2 = ak$$

$$x_3 = (a + b/2),\quad S_3 = bk$$

$$x_4 = (a + b + c/3),\quad S_4 = c(k+l)/2$$

Метод дополнений (отрицательных весов)

- Пусть тело, вес которого *P*, имеет полость заданного объема *V*. Если бы тело не имело полости, то его вес был бы равен $P' = P + P_v$, где P_v – вес объема *V*.

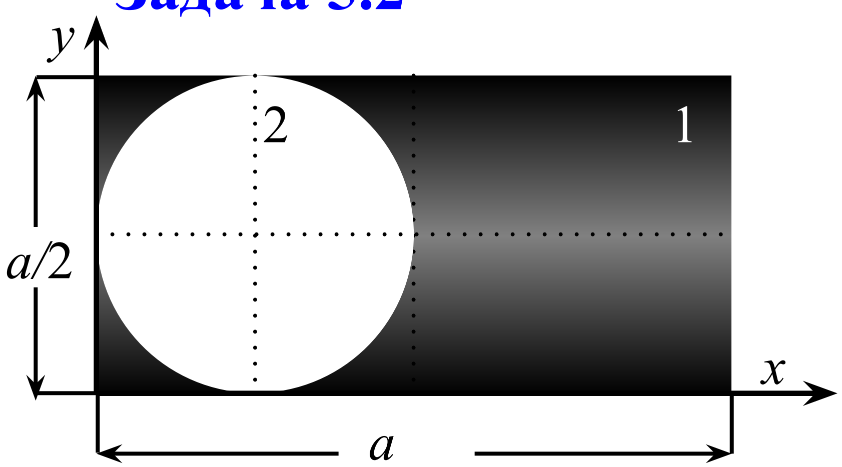
- Радиус-вектор тела без полости тогда равен

$$\vec{r}_c' = \left(\vec{r}_C P + \vec{r}_{CV} P_V\right) / P'$$

для тела с полостью

$$\vec{r}_C = \left(\vec{r}_C' P' - \vec{r}_{CV} P_V\right) / P$$

Задача 5.2

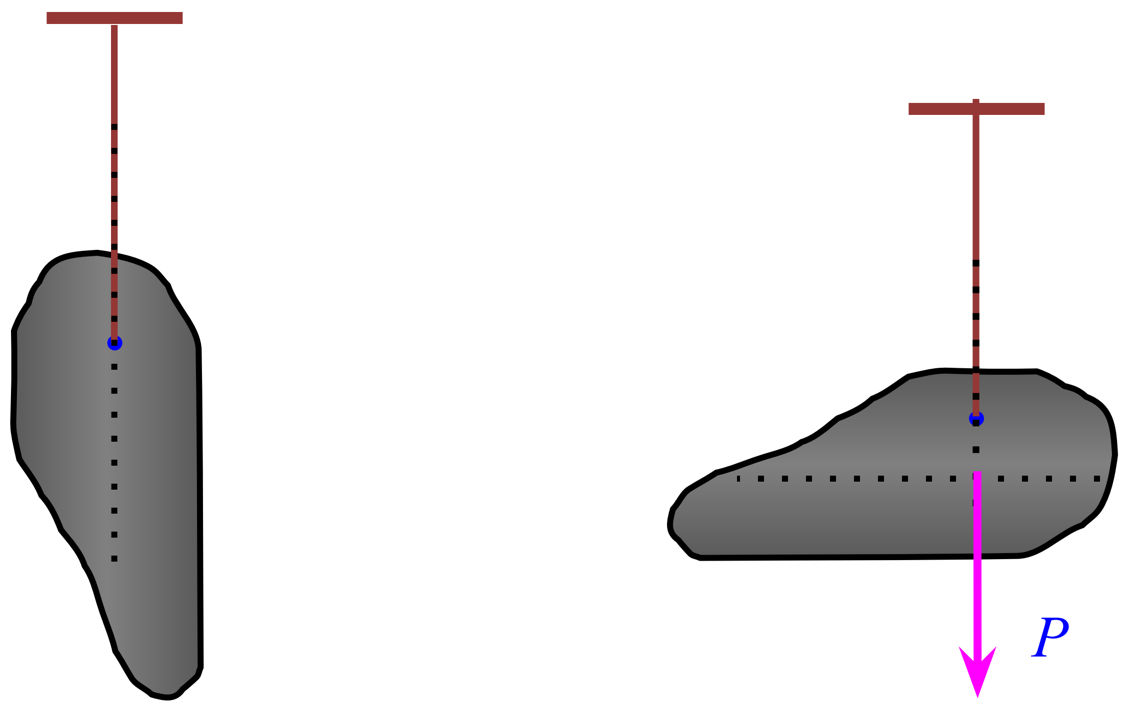


$$x_C = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2} = \frac{a(16-\pi)}{4(8-\pi)}$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 - y_2 S_2}{S_1 - S_2} = \frac{a}{4}$$

5.4.10. Экспериментальные методы

- Метод подвешивания



- Метод взвешивания

- Наличие силы трения существенно меняет силы реакции связей
- Следует различать трение
   - покоя
   - скольжения
   - качения
- Сила трения определяется силой нормального давления данного тела на поверхность
- Центр тяжести – это точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на данное тело

5.5.2. Тема следующей лекции

КОЛЛОКВИУМ