ФУНКЦИЯ $y=ax^2+bx+c$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Алгебра(1 час) 09 февраля

Задание:

1.Повторить теоретический материал по презентации.

2.Решить в рабочей тетради (поставить дату 09.02) следующие задания из задачника:

22.7, 22.8, 22.9, 22.10

Квадратный трехчлен

$$ax^2 + bx + c$$

a, b, c – *числа (коэффициенты),* $a \neq 0.$

ax^2 – *старший член квадратного трехчлена.*

a – *старший коэффициент квадратного трехчлена.*

$3x^2 + 2x$ $\quad a = 3,\ b = 2,\ c = 0.$

Функцию $y = ax^2 + bx + c$, *где a, b, c – произвольные числа, причем* $a \neq 0$, *называют квадратичной функцией.*

Пример 1: Построить график функции y=-3x²-6x+1.

Решение:

Выделим полный квадрат

$$-3x^2-6x+1=-3(x^2+2x)+1=-3\big((x^2+2x+1)-1\big)+1=$$
$$=-3\big((x+1)^2-1\big)+1=-3(x+1)^2+3+1=-3(x+1)^2+4.$$

$$y=-3(x+1)^2+4$$

$$(-1;4)$$

$$y=-3x^2$$

(0;0), (1;-3), (-1;-3),(2;-12), (-2;-12)

$$y=a(x+l)^2+m$$

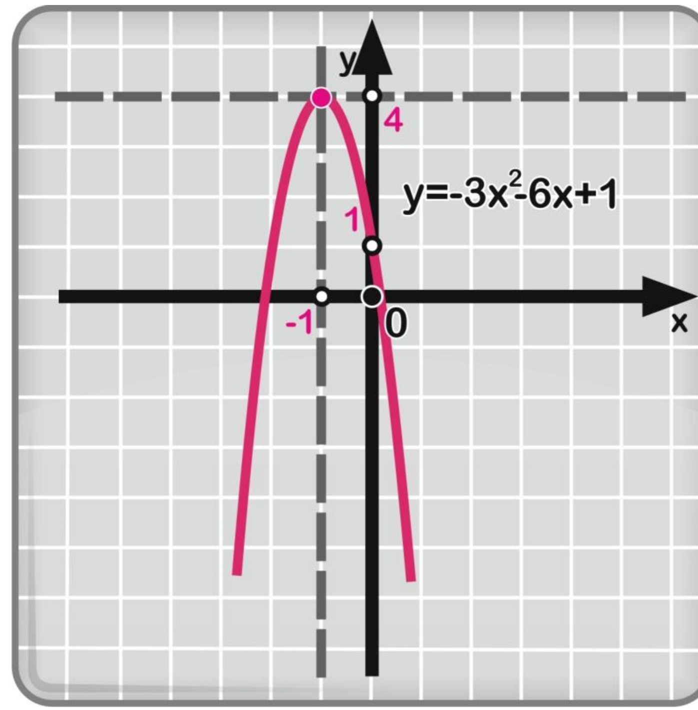


График любой квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ можно получить из параболы $y=ax^2$ параллельным переносом.

Теорема: *Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, которая получается из параболы $y=ax^2$ параллельным переносом.*

Доказательство:

Метод выделения полного квадрата

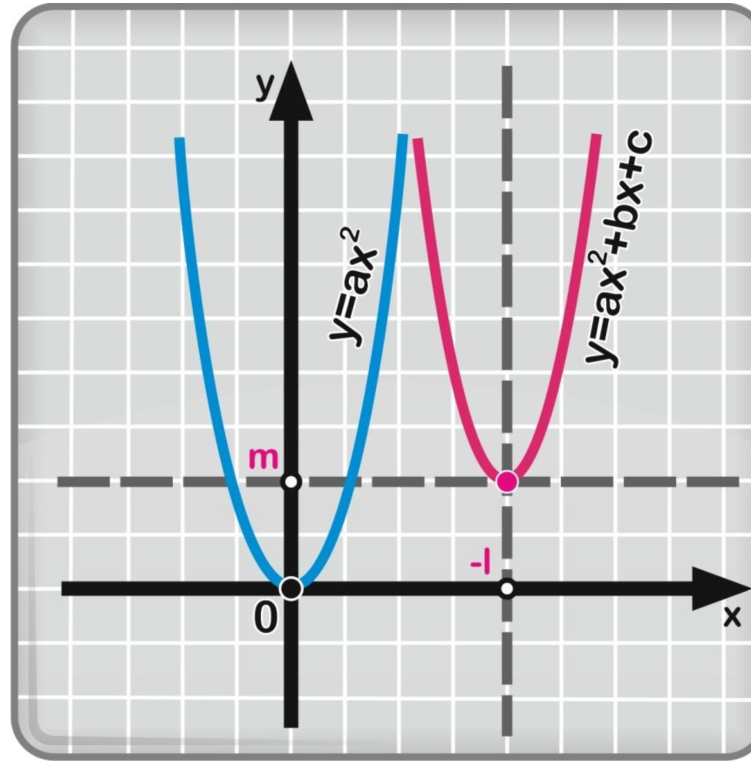
$$ax^2+bx+c=(ax^2+bx)+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=$$

$$=a\left(\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{-4a^2}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

$$ax^2+bx+c \rightarrow a(x+l)^2+m, \quad l=\frac{b}{2a}, \quad m=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Теорема: *Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, которая получается из параболы $y=ax^2$ параллельным переносом.*



Доказательство:

$$y=a(x+l)^2+m$$

$$y=ax^2$$

$$(-l;m)$$

$$y=ax^2+bx+c$$

$$x=-l;\quad x=-\frac{b}{2a}.$$

Осью параболы $y=ax^2+bx+c$ служит прямая $x=-\frac{b}{2a}$ *; абсцисса x_0 вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ вычисляется по формуле*

$$\boxed{x_0=-\frac{b}{2a}.}\quad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Пример 2: Не выполняя построения графика функции $y=-3x^2-6x+1$, ответить на следующие вопросы:

а) Какая прямая служит осью параболы?

б) Каковы координаты вершины параболы?

в) Куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы?

Решение:

$$a)\quad a=-3,\;\; b=-6$$

$$x=-\frac{b}{2a},\quad x=-1.$$

$$б)\quad x_0=-1,$$

$$y_0=f(x_0)=f(-1)=4.$$

$$(-1;4)$$

$$в)\quad y=-3x^2-6x+1$$

$$y=-3x^2$$

Ветви параболы $y=ax^2+bx+c$ направлены вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

$$y_0 = f(x_0), \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Пример 3: Построить график функции $y=2x^2-6x+1$.

Решение:

2 – *положительное число*

$$a=2,\ \ b=-6,$$

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\cdot 2}=1{,}5.$$

$$y_0=f(x_0)=f(1{,}5),\ \ f(x)=2x^2-6x+1$$

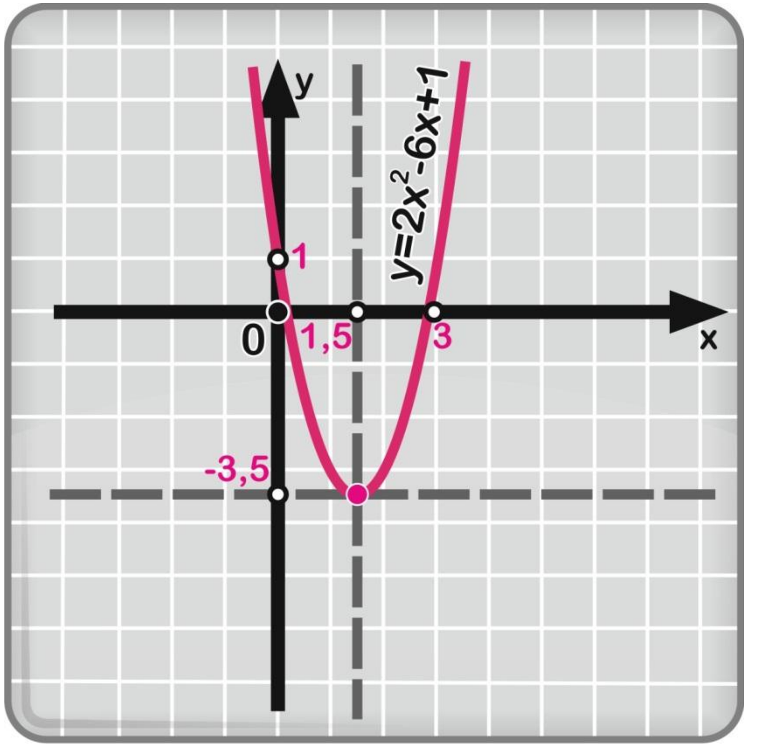
$$y_0=f(1{,}5)=2\cdot 1{,}5^2-6\cdot 1{,}5+1=-3{,}5.$$

$$(1{,}5;-3{,}5)$$

$$x=0,\ \ x=3,\ \ f(0)=f(3)$$

$$f(0)=1,\quad f(3)=1$$

$$(0;1),\ (3;1)$$



Алгоритм построения параболы $y = ax^2 + bx + c$:

1. Найти координаты вершины параболы, построить на координатной плоскости соответствующую точку, провести ось параболы.

2. Отметить на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы (чаще всего в качестве одной из таких точек берут точку $x=0$), найти значения функции в этих точках; построить на координатной плоскости соответствующие точки.

3. Через полученные три точки провести параболу (в случае необходимости берут еще пару точек, симметричных относительно оси параболы, и строят параболу по пяти точкам).

Пример 4: Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=-2x^2+8x-5$ на отрезке $[0;3]$.

Решение:

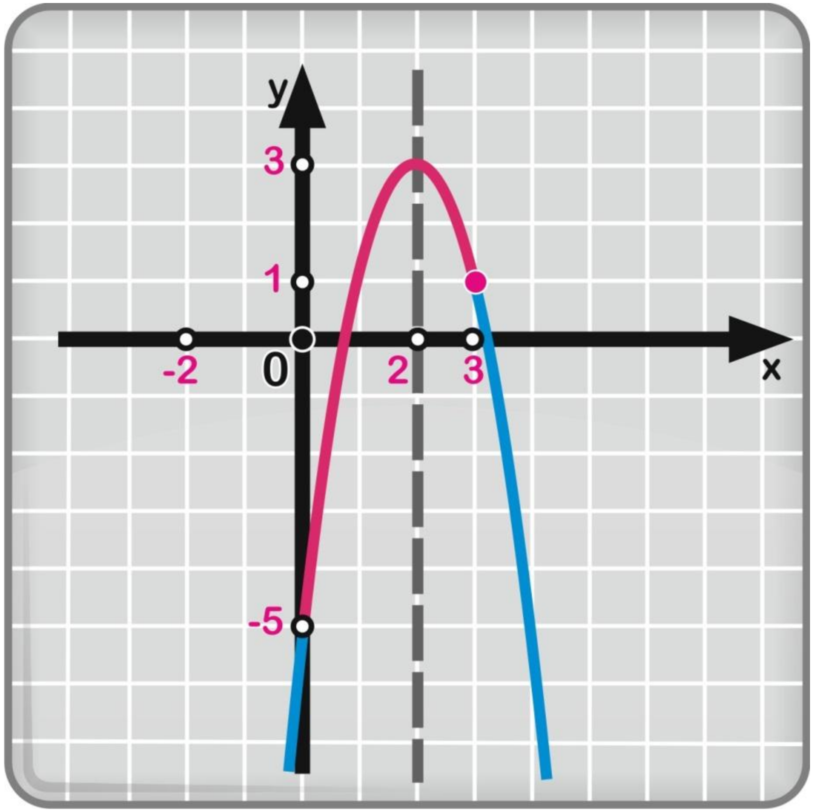
I этап.

1). $a=-2, \quad b=8,$

$$x_0=-\frac{b}{2a}=2;$$

$$y_0=f(2)=-2\cdot 2^2+8\cdot 2-5=3$$

$(2;3), \quad x=2$



2). $x=0, \; x=4$

$$f(0)=f(4)=-5,$$

3). $(2;3), (0;-5), (4;-5)$

II этап.

$y_{наим}=-5$ (при $x=0$) $\qquad y_{наиб}=3$ (при $x=2$)