Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова

Факультет физико-математического и технологического образования

Презентация на тему

"Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа"

Выполнил
студент гр. ИИЯ-19 Ильин А.Д.

Проверил
Ст. преподаватель
Волкова Н.А.

Ульяновск, 2019

Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$.
Можем считать, что в правой части этого равенства $f(a)$ – многочлен Тейлора нулевого порядка с центром в точке a, а $f'(\xi)(b - a)$ – остаток в формуле Тейлора для функции f, вычисленной в точке b. Эта формула позволяет оценить $|f(b) — f(a)|$, т. е. погрешность приближения значения функции $f(b)$ значением $f(a)$, через $|f'(\xi)| \cdot |b - a|$.
Например, если $f(x) = \operatorname{arctg} x$, то

$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} b + \frac{1}{1+\xi^2}(b - a),$$

откуда сразу получаем, что

$$|\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a| \leqslant \frac{1}{1+\xi^2}|b - a| \leqslant |b - a|.$$

Обобщением этих рассуждений на случай произвольного натурального n и есть формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теорема. *Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке непрерывные производные до порядка n включительно, а на интервале (a, b) существует производная $(n+1)$-го порядка. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}(b-a)^{n+1}.$$

Доказательство. Обозначим

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

– многочлен Тейлора функции f с центром в точке a. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi = f(x) - P_n(x) - \lambda(b-a)^{n+1}$, где число λ

определяется из условия $\varphi(b) = 0$, т. е.

$$f(b) = P_n(b) - \lambda(b-a)^{n+1}. \qquad (5.4)$$

Так как P_n – многочлен Тейлора функции f с центром в точке a, то производные функции f и многочлена P_n в точке a совпадают до порядка n включительно, т. е. $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)\ (k = 0, 1, \ldots, n)$.
Далее, для функции φ имеем $\varphi(a) = 0$,

$$\varphi'(x) = f'(x) - P_n'(x) - \lambda(n+1)(x-a)^n, \qquad \varphi'(a) = 0,$$

$$\varphi''(x) = f''(x) - P_n{}''(x) - \lambda(n+1)\,n(x-a)^{n-1}, \qquad \varphi''(a) = 0,$$

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) - \lambda(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-k+2)\,(x-a)^{n-k+1}.$$

Итак, $\varphi^{(k)}(a) = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, n)$.

Поскольку $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, то на $[a, b]$ к функции φ можно применить теорему Ролля, согласно которой существует такая точка $\xi_1 \in (a, b)$, что $\varphi'(\xi_1) = 0$. Далее, на $[a, \xi_1]$ к функции φ' снова можно применить теорему Ролля, согласно которой существует такая точка $\xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, b)$, что $(\varphi')'(\xi_2) = \varphi''(\xi_2) = 0$. Продолжая этот процесс, на n-м шаге получим такую точку $\xi_n \in (a, b)$, что $\varphi^{(n)}(\xi_n) = 0$. На отрезке $[a, \xi_n]$ функция $\varphi^{(n)}$ все еще удовлетворяет условиям теоремы Ролля, согласно которой найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\left(\varphi^{(n)}\right)'(\xi) = \varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Имеем

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left(\varphi^{(n)}\right)'(x) = \left[f^{(n)}(x) - P_n^{(n)} - \lambda(n+1)!(x-a)\right]' = \\ = f^{(n+1)}(x) - 0 - \lambda(n+1)!$$

и $\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \lambda(n+1)! = 0$, откуда $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}$. Подставив найденное значение λ в равенство (5.4), получим утверждение теоремы.

□

Замечание. В правой части доказанного в теореме равенства записан многочлен Тейлора функции f с центром в точке a, значение которого вычислено в точке b, а остаток $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}(b-a)^{n+1}$ отличается от остальных слагаемых тем, что производная вычислена в точке $\xi \in (a, b)$. При $n = 0$ доказанная теорема обращается в теорему Лагранжа.

Пример 1. Для функции $f(x) = e^x$ на $[0, x]$ $(x > 0)$ формула

Тейлора

с остатком в форме Лагранжа принимает вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Тогда для любого n остаток не превосходит

$R_n(x) = \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$ и, очевидно, $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Преимущество остатка в такой форме состоит в том, что мы можем

оценить погрешность приближения

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Она не превосходит

$$0 \leqslant e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \leqslant \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \leqslant \frac{3^{[x]+1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

В частности, при $x = 1$ получаем

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!},$$

где $0 < \theta < 1$.Отсюда следует, что

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$

Источники:

https://ib.mazurok.com/2018/06/13/taylor_lagrange/
http://www.apmath.spbu.ru/ru/education/final/question03.pdf
http://portal.tpu.ru:7777/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/Calc1-ru/6/05.htm