



Метод Годунова для численного моделирования газодинамических течений

Титов Павел Андреевич
Куликов Игорь Михайлович
Терёшин Илья Дмитриевич

Постановка задачи



- **Область применения:**

Исследование различных газодинамических течений и их взаимодействие.

- **Решаемая проблема:**

Невозможность постановки натурного эксперимента либо его технологическая сложность.

- **Решение:**

Математическое моделирование процессов.

- **Используемый метод:**

Наиболее широкое применение получил метод Годунова, основным структурным элементом которого является задача о распаде произвольного разрыва.

Метод Годунова в одномерном случае

Газодинамические уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho V^2}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho EV}{\partial x} = -\frac{\partial p V}{\partial x} \end{cases}$$

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho V^2}{2}$$

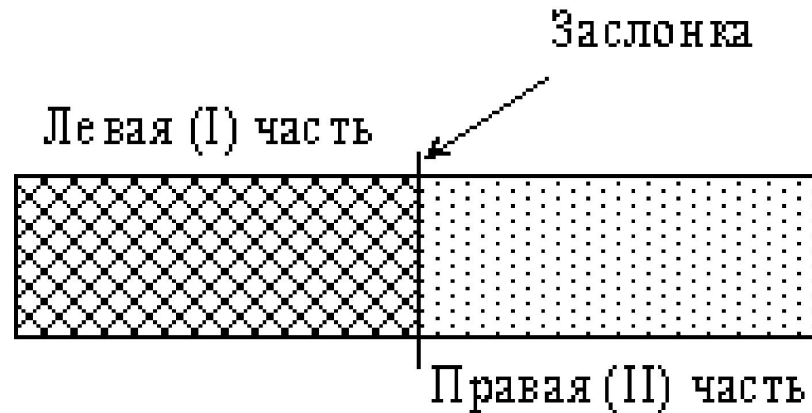
Гиперболический векторный вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V^2 + p \\ \rho EV + pV \end{pmatrix}$$

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho V^2}{2}$$

Распад произвольного разрыва

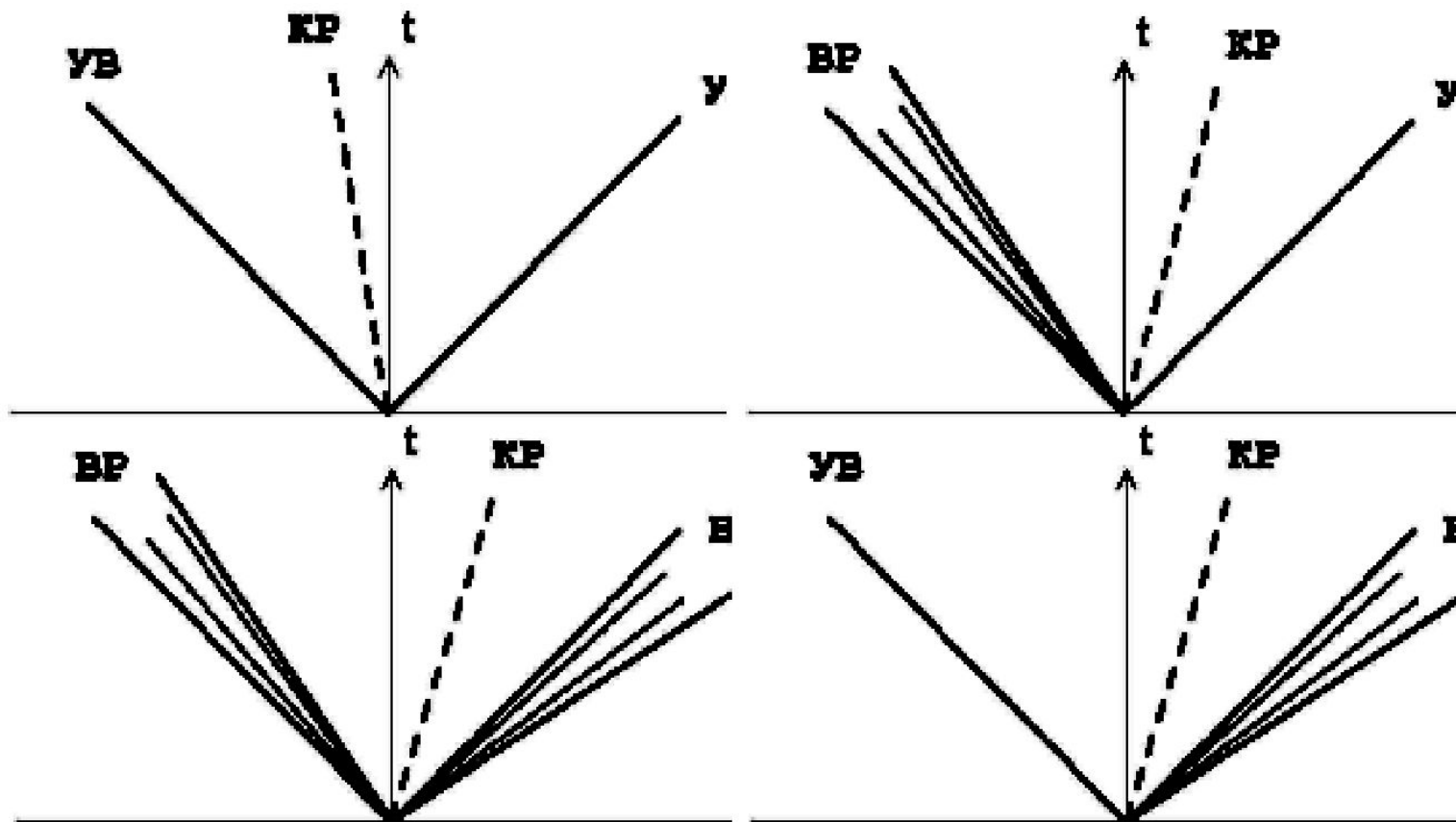


Слева от перегородки газ находится в состоянии (P_1, ρ_1, u_1) , справа (P_2, ρ_2, u_2)

Заслонка в начальный момент времени убирается.

Распад произвольного разрыва

В зависимости от соотношений состояний справа и слева от перегородки возникает одна из следующих конфигураций:



Метод Годунова (одномерный случай)

Схема:

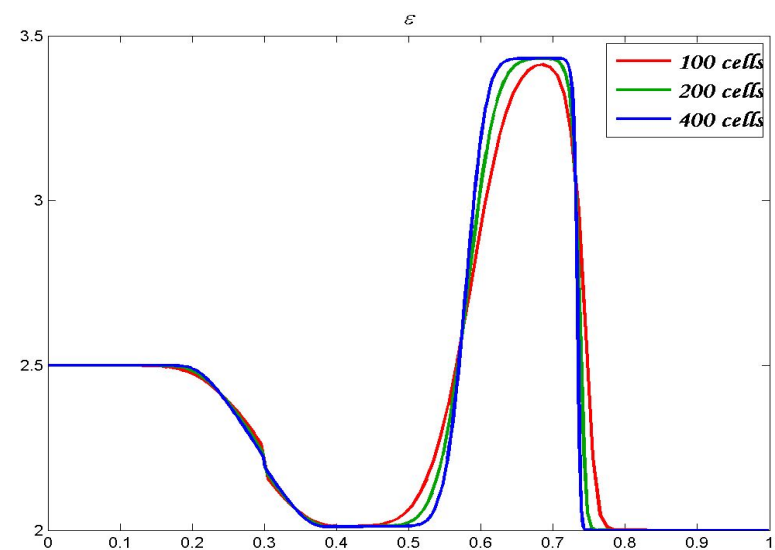
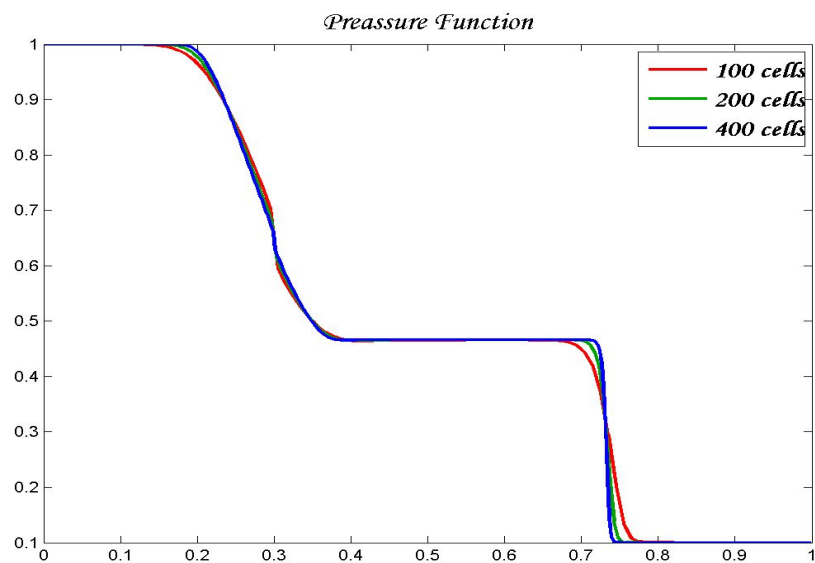
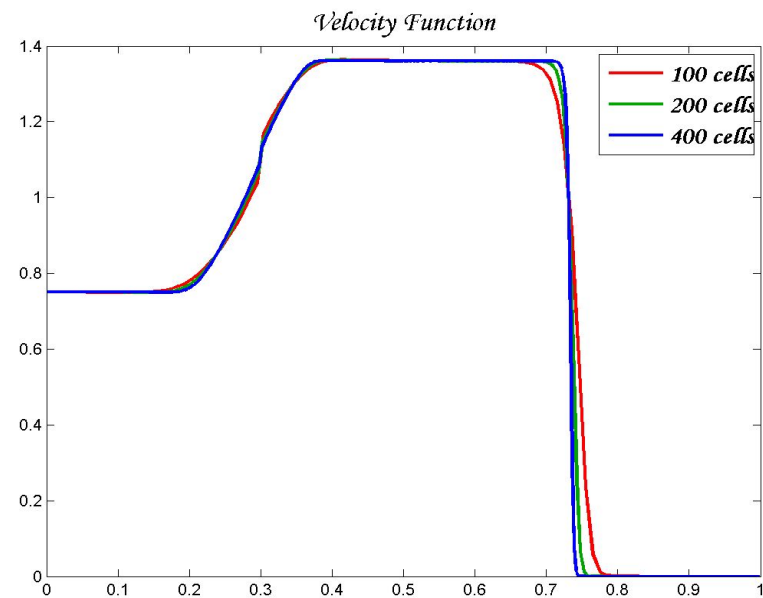
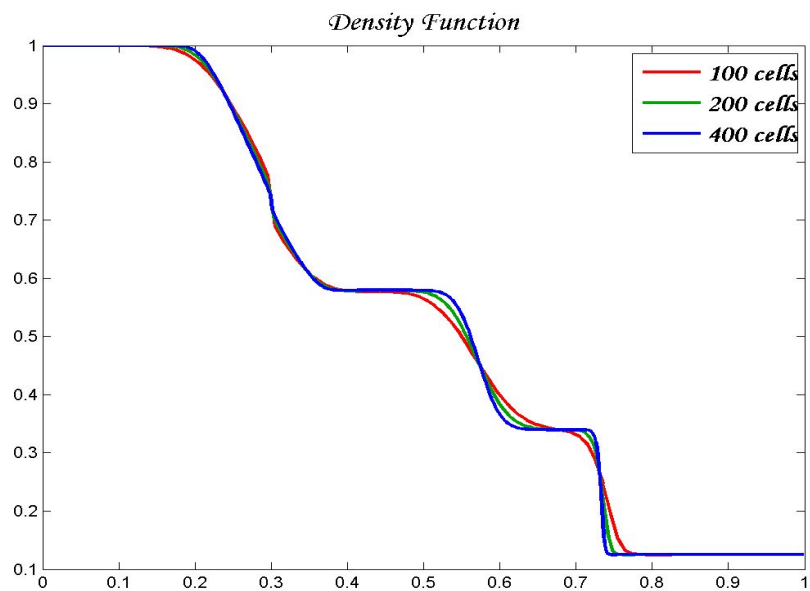
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta h} (F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}})$$

Условие устойчивости:

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta h} V_{\max} \leq 1$$

Тесты Годунова (тесты Toro)

№	r1	u1	p1	r2	u2	p2	Xo	T
Тест1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.3	0.2
Тест2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
Тест3	1	0	1000	1	0	0.01	0.5	0.012
Тест4	5.99924	19.5975	460.894	5.99242	-6.19633	46.095	0.4	0.035
Тест 5	1	-19.59745	1000	1	-19.59745	0.01	0.8	0.012



Метод Годунова (двумерный случай)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho V^2}{2}$$

$$V = (V_x, V_y)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ V_x \\ V_y \\ \rho E \end{pmatrix}$$

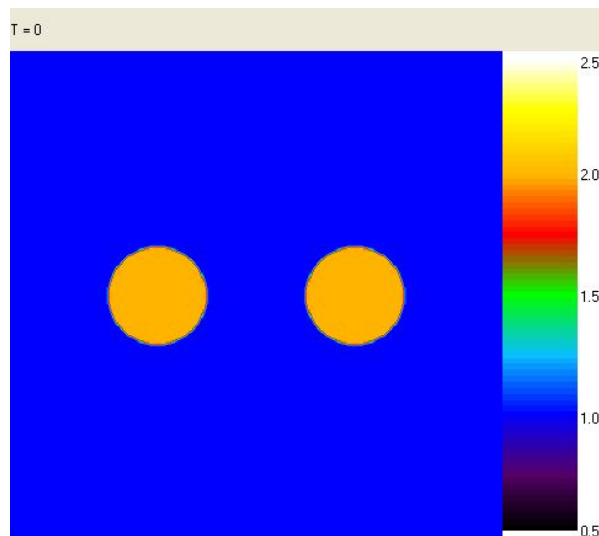
$$F = \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_x V_x + p \\ \rho V_y V_x \\ \rho E V_x + p V_x \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \rho V_y \\ \rho V_y V_x \\ \rho V_y V_y + p \\ \rho E V_y + p V_y \end{pmatrix}$$

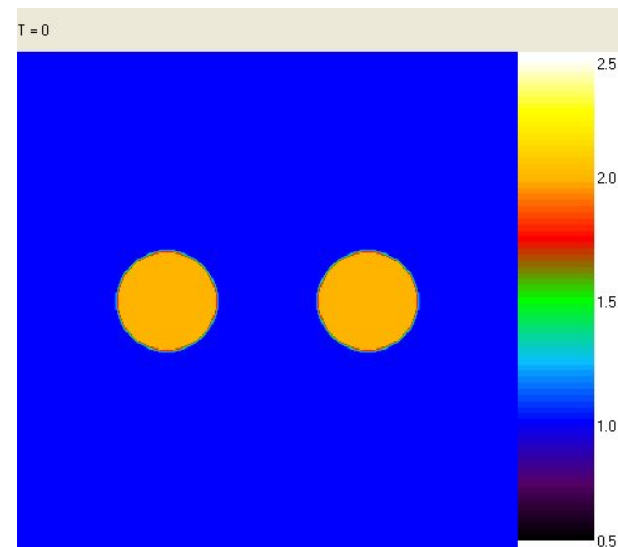
Для двумерной задачи имеется аналогичная разностная схема

Взаимодействие ударных волн

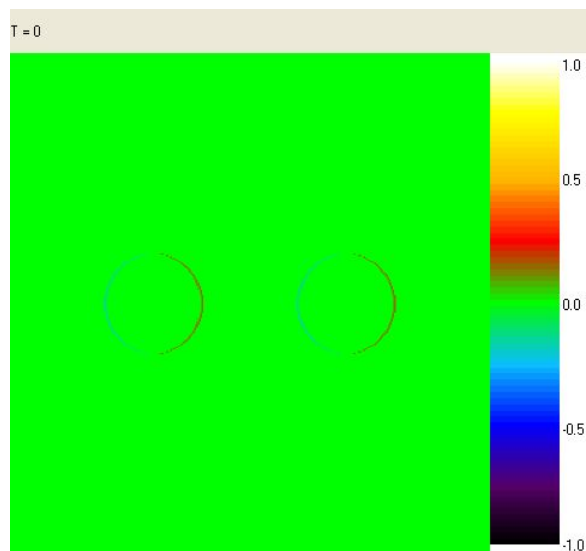
ПЛОТНОСТЬ



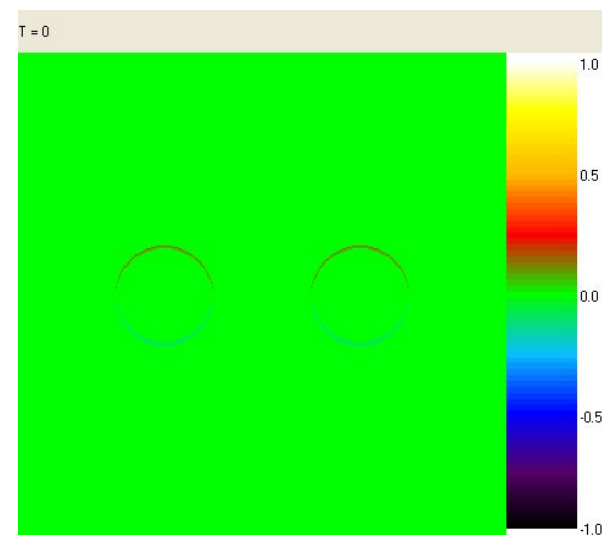
давление



V_x



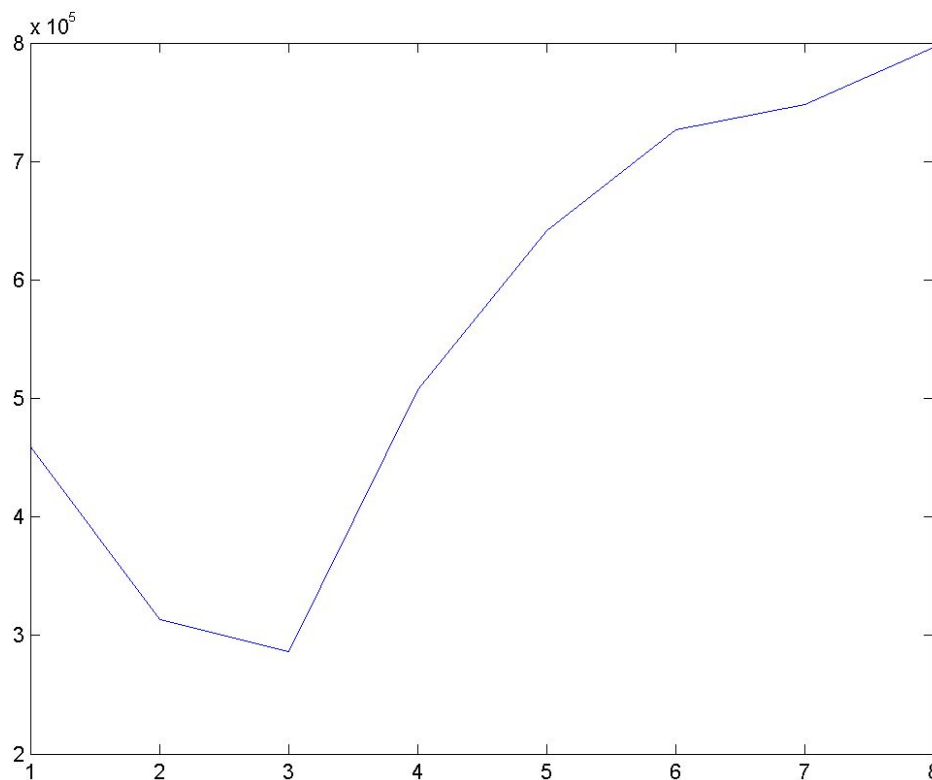
V_y



Параллельная реализация в OpenMP

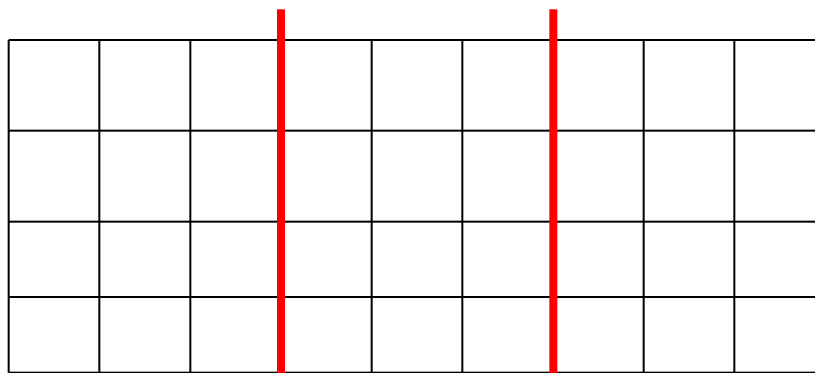
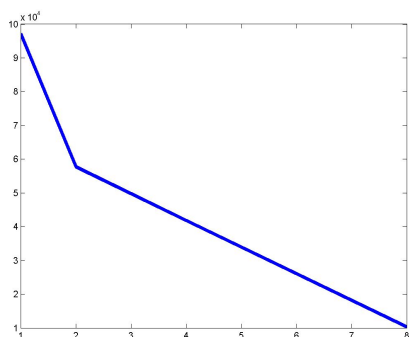
```
...  
#pragma omp parallel for ...  
for(i=0; i<numcells; i++)  
    for(k =0; k<numcells; k++)  
        {...}  
...
```

smp16x256

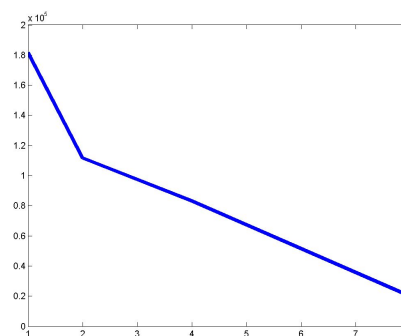


Параллельная реализация в MPI

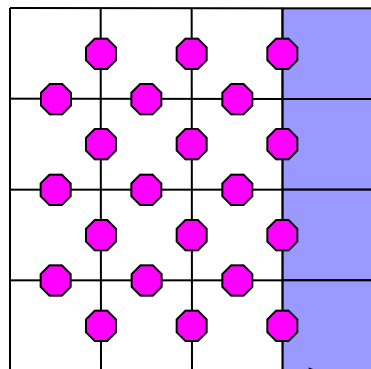
smp16x256



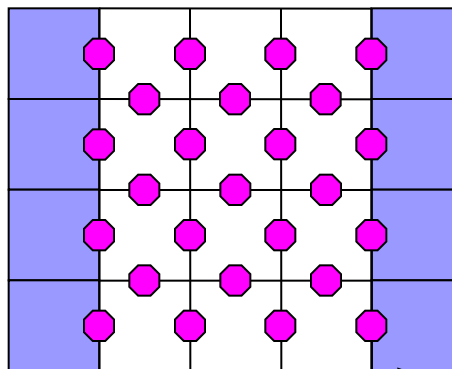
nks-30t



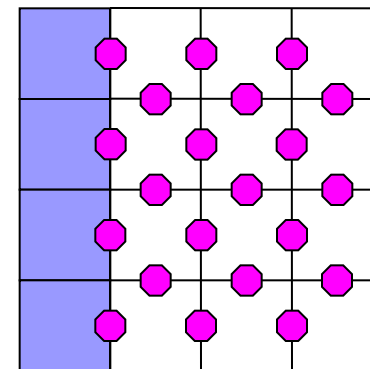
Процесс 0



Процесс 1

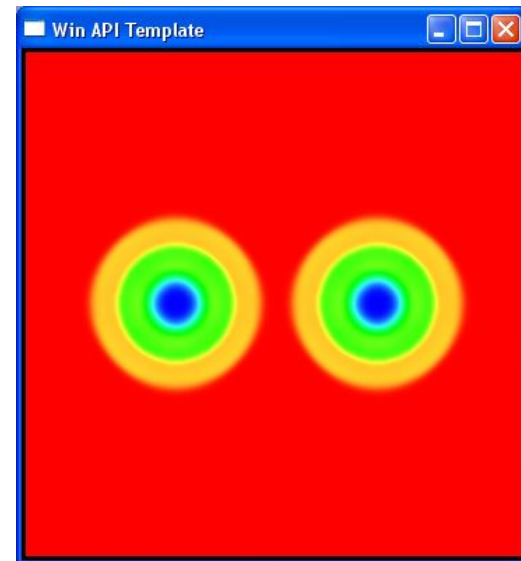
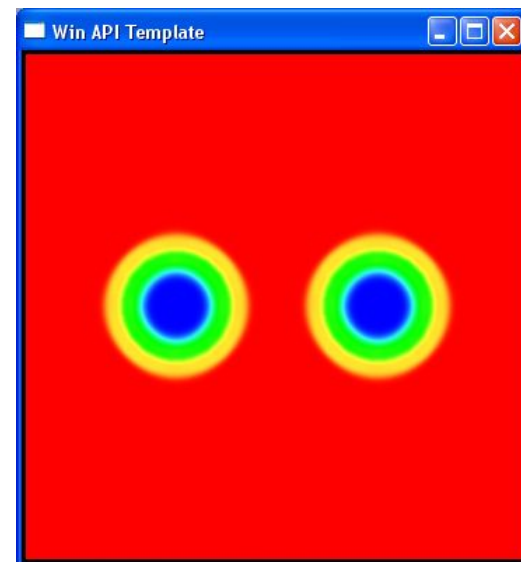


Процесс 2



Визуализация расчётов

- Библиотека **OpenGL**
- Язык тех. вычислений **MATLAB®**
- Генерация **png** файлов



Результаты работы

- Реализован метод Годунова для моделирования одномерных и двумерных газодинамических течений.
- Разработана и исследована параллельная реализация метода Годунова в двумерной постановке средствами библиотек OpenMP и MPI.
- Созданы сценарии генерации одномерных графиков в пакете MATLAB® и двумерных распределений средствами библиотеки OpenGL.
- Проведены вычислительные эксперименты по изучению различных газодинамических конфигураций.



Спасибо за внимание!