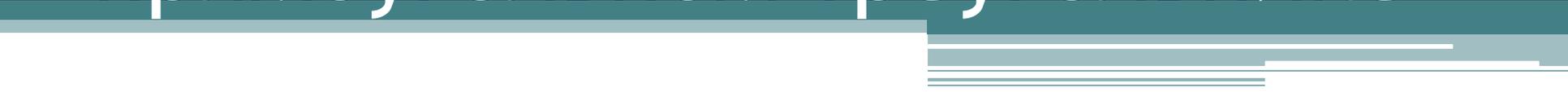


Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

A decorative graphic consisting of a solid teal horizontal bar, followed by a white horizontal bar, and then three thin, parallel white horizontal lines.

Свойство высоты, проведенной из прямого угла на гипотенузу

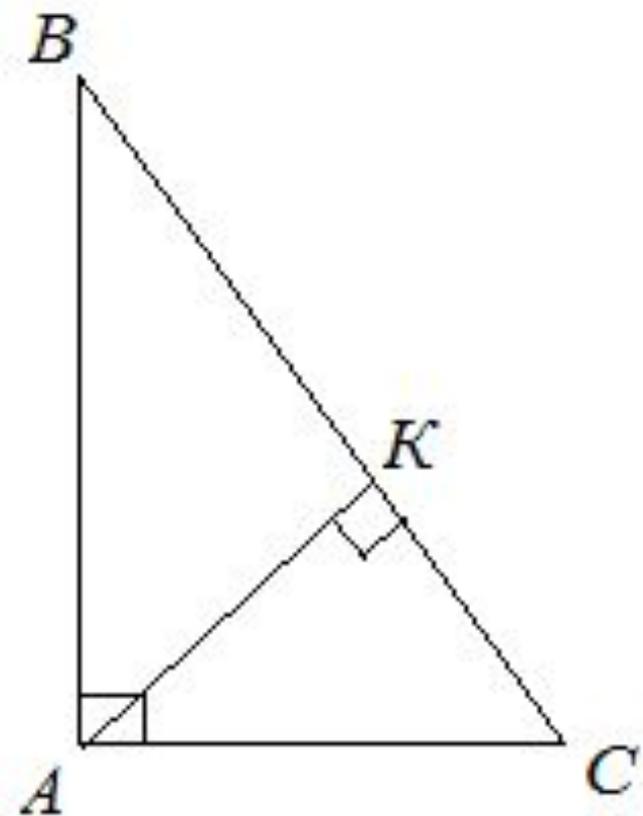
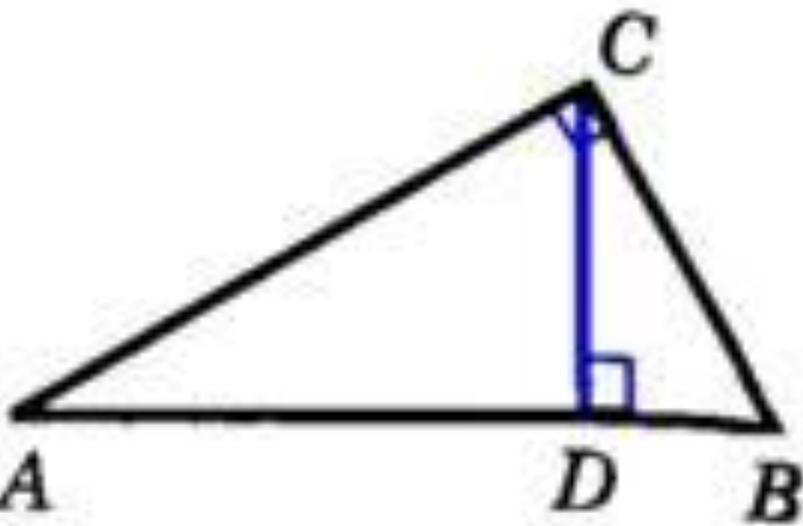


Рис. 1

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Доказательство:



Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C , CD — высота, проведенная из вершины C к гипотенузе AB . Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

Треугольники ABC и ACD подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$).

Точно так же подобны ABC и CBD ($\angle B$ — общий и $\angle ACB = \angle BDC = 90^\circ$), поэтому $\angle A = \angle BCD$.

Наконец, $\triangle ACD$ и $\triangle CBD$ также подобны по первому признаку подобия (в этих треугольниках углы с вершиной D прямые и $\angle A = \angle BCD$), что и требовалось доказать.

Среднее пропорциональное

Среднее пропорциональное между двумя положительными числами - число, равное квадратному корню из их произведения.

Свойства пропорциональных отрезков

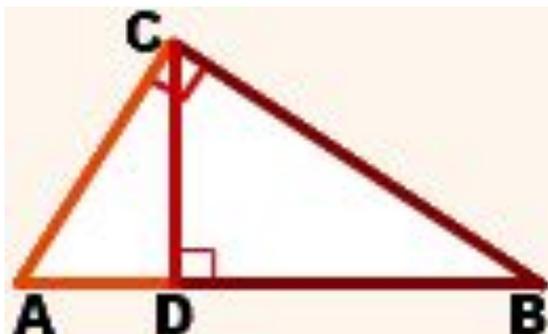
- Высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов:

$$CD^2 = AD \cdot BD.$$

- Катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

$$BC^2 = AB \cdot BD.$$



Доказательство

1. Из подобия $\triangle ACH$ и $\triangle CBH$ следует отношение сторон:

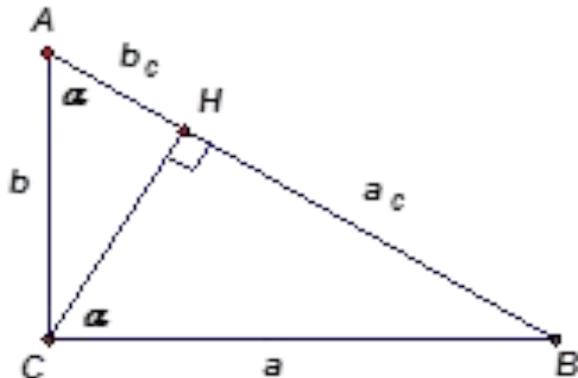
$HC/a(c) = b(c)/b$. Из этой пропорции получаем $h_c^2 = a_c \cdot b_c$

2. Из подобия $\triangle ACH$ и $\triangle ABC$ следует отношение сторон:

$b/c = b(c)/b$. Из этой пропорции получаем $b^2 = c \cdot b_c$

3. Из подобия треугольников CBH и ABC следует отношение

сторон: $a/c = a(c)/a$. Из этой пропорции получаем $a^2 = c \cdot a_c$



Задачи

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $BC=20$ см. Найти длину высоты AH , если $HC=15$ см.

2. $BH=BC - HC = 20 - 15 = 5$ см.
Т.к BH и HC – проекции катетов AB и AC на гипотенузу, то можно записать равенство:

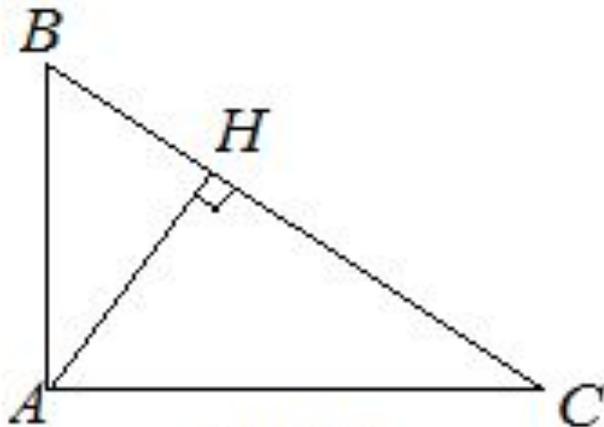


Рис.1

$$AH^2 = BH \cdot HC = 5 \cdot 15 = 75$$

$$AH = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\text{см}$$

2. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки 36 см и 64 см. Найти все стороны треугольника.

Рассмотрим $\triangle ABC$. Опустим из вершины A высоту $АН$, которая делит гипотенузу BC на отрезки $ВН=36$ см и $СН = 64$ см, которые являются проекциями катетов на гипотенузу.

Найдем длину гипотенузы:

$$BC = BH + HC = 36 + 64 = 100 \text{ см.}$$

Далее воспользуемся свойствами пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике:

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow AB = \sqrt{36 \cdot 100} = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см,}$$

$$AC^2 = HC \cdot BC \Rightarrow AC = \sqrt{64 \cdot 100} = 8 \cdot 10 = 80 \text{ см}$$