ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 2

КОЛЕБАНИЯ

движения точки, которые характеризуются определенной повторяемостью по времени.

Осциллятор — система, совершающая колебания

Линейный осциллятор — система, движущаяся под действием **возвращающей силы**, то есть силы, пропорциональной отклонению от точки, называемой положением равновесия и направленной к этой точке

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ

На примере прямолинейных колебаний точки познакомиться с колебательным движением в механике

Физические явления:

- *механические колебания*
- *электромагнитные волны (оптические, радио, инфракрасные…)*
- *акустические волны (звук)*

Природные явления:

- *суточное вращение Земли*
- *землетрясения*
- *приливы и отливы*

Биологические системы:

- *сердечно-сосудистая система*
- *ухо + голосовые связки*

КОЛЕБАНИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Основные факторы

- природные явления
- промышленность
- транспорт

Виды колебаний

- механические
- акустические
- электромагнитные
- тепловые

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Начнем изучение колебаний с простой задачи. Будем рассматривать **прямолинейные свободные колебания точки без учета сил сопротивления**.

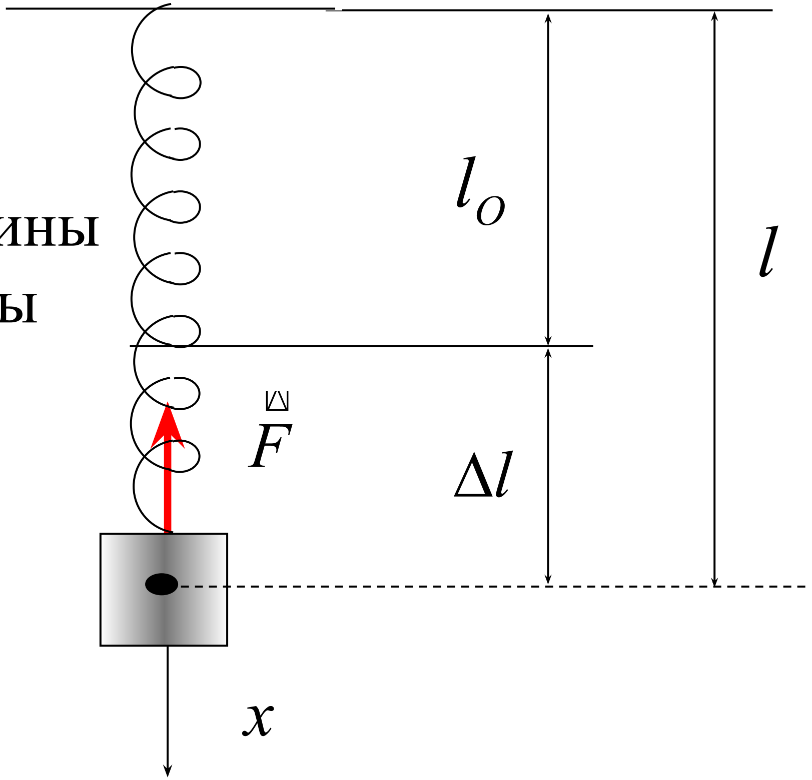
Колебания называются свободными, если отсутствует внешнее воздействие на колебательную систему.

F - восстанавливающая сила

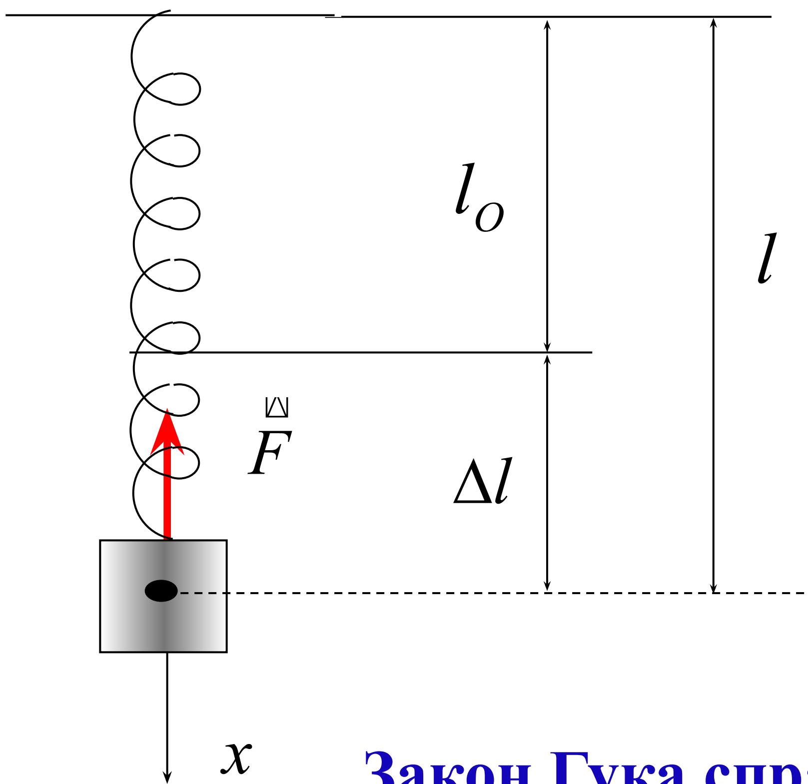
l_O - длина недеформированной пружины

l - длина деформированной пружины

$\Delta l = l - l_O$ - деформация пружины



СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ



Рассматриваем прямолинейное движение точки массой ***m*** под действием силы упругости ***F***. **Силу тяжести не учитываем.**

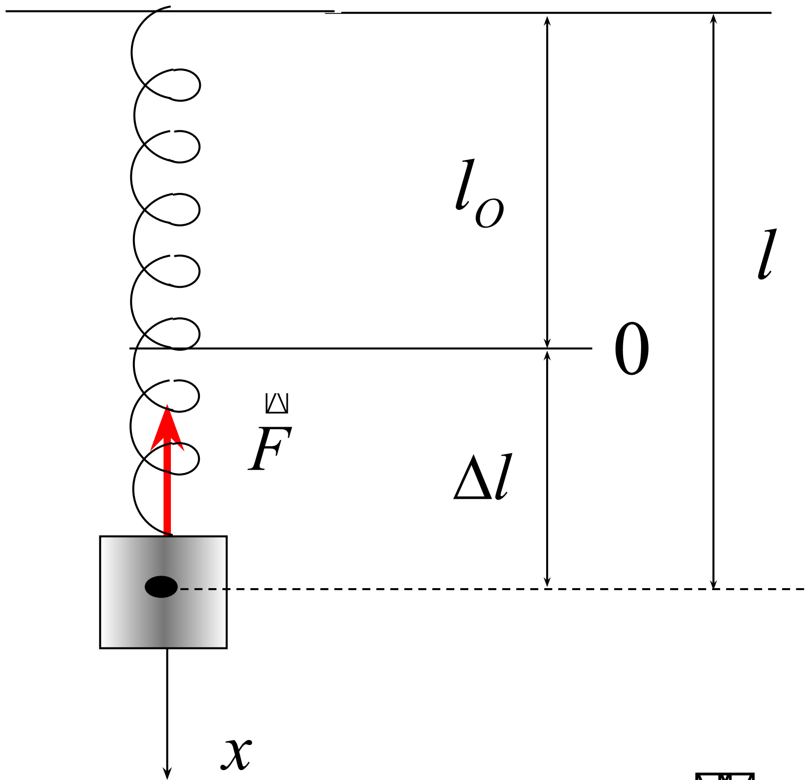
$$F = c\Delta l$$ - закон Гука

c - коэффициент жесткости пружины

Закон Гука справедлив только для малых колебаний! В общем случае

$$F = c\Delta l + c_3\Delta l^3 + c_5\Delta l^5 + \ldots$$

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ



Начало отсчета – в положении равновесия

$$F = c\Delta l = cx$$

Запишем ДУ движения точки

$$m\ddot{x} = F \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -cx$$

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

$$k^2 = \frac{c}{m}$$

k – частота колебаний [рад/с]

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

<u>ДУ свободных колебаний</u>
при отсутствии сил сопротивления

- **линейное**
- **однородное**
- **второго порядка**

$$x = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

В результате подстановки решения получим

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda t}(\lambda^2 + k^2) = 0$$

характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

Корни уравнения мнимые $\lambda_{1,2} = \sqrt{-k^2} = \pm ik$

$$x = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} = D_1 e^{ikt} + D_2 e^{-ikt}$$

используя формулу Эйлера

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$

C_1, C_2 - постоянные интегрирования

Можно получить другую форму решения, если ввести две другие постоянные A, α

$$C_1 = A\cos\alpha \qquad C_2 = A\sin\alpha$$

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$

$$C_1 = A\cos\alpha \qquad C_2 = A\sin\alpha$$

$$x = A(\sin kt \cos\alpha + \cos kt \sin\alpha)$$

Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$$

Получим решение уравнения свободных колебаний в форме

$$x = A\sin(kt + \alpha)$$

A, α - постоянные интегрирования

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

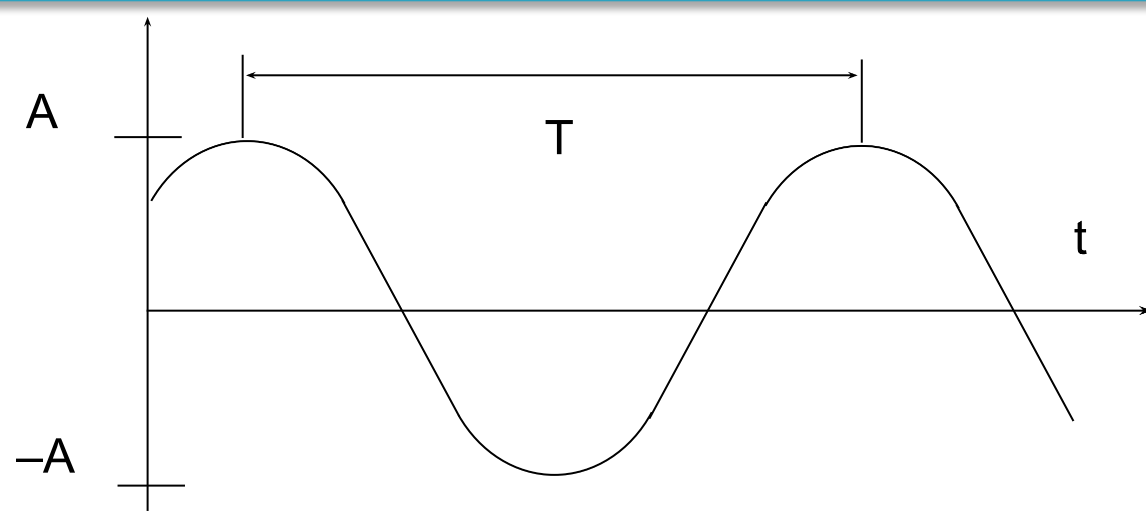
$$x = A\sin(kt + \alpha)$$

A - **амплитуда колебаний** [м]

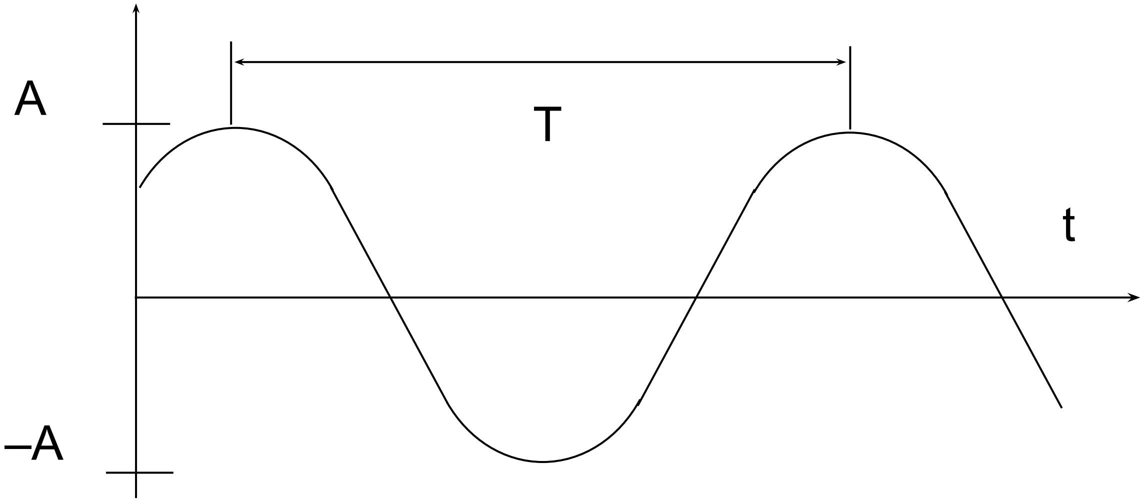
$kt + \alpha$ - фаза колебаний [радиан]

α - **начальная фаза** [радиан]

Колебания, описываемые этим уравнением, называются гармоническими.



СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ



Период колебаний – минимальное время, за которое система возвращается в исходное положение

$$x = A\sin(kt + \alpha)$$

$$\sin(kt + \alpha) = \sin(k(t + T) + \alpha)$$

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

$$T = 2\pi / k$$

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Найдем постоянные интегрирования A, α

Подставим начальные условия

$$t = 0 : x(0) = x_0, \mathrm{v}(0) = \dot{x}(0) = \mathrm{v}_0$$

в общее решение $x = A\sin(kt + \alpha)$

Получим $x_0 = A\sin\alpha, \;\; \mathrm{v}_0 = \dot{x}(0) = Ak\cos\alpha$

$$tg\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha = (x_0/A)/(\mathrm{v}_0 / Ak) = kx_0/\mathrm{v}_0$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$(x_0/A)^2 + (\mathrm{v}_0 / Ak)^2 = 1, \;\; A = \sqrt{x_0^2 + \mathrm{v}_0^2 / k^2}$$

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

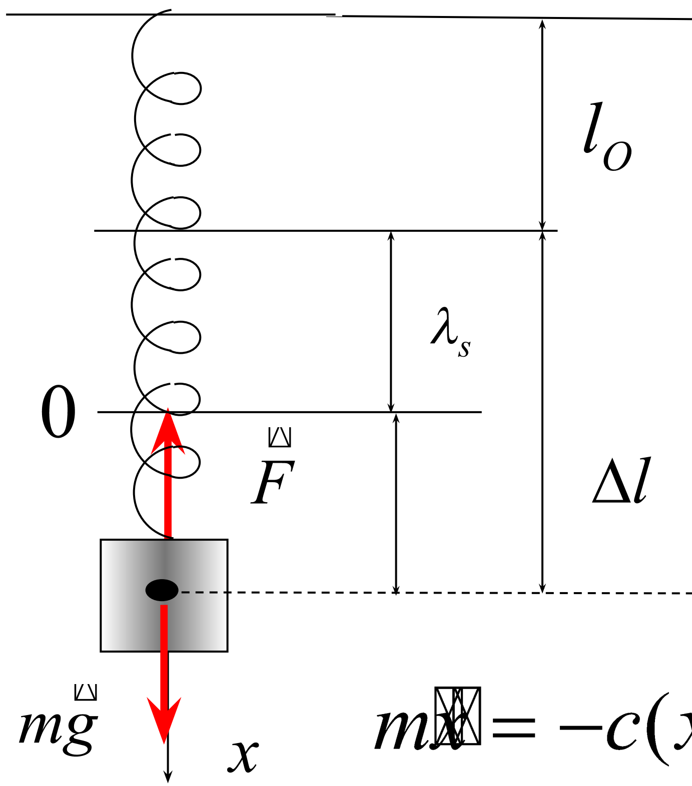
1. ***Амплитуда*** и ***начальная фаза*** колебаний ***зависят*** от ***начальных условий*** задачи

$$A = \sqrt{x_0^2 + \mathrm{v}_0^2 / k^2}, \quad tg\alpha = kx_0/\mathrm{v}_0$$

2. ***Частота*** и ***период колебаний не зависят*** от ***начальных условий*** задачи и полностью определяются параметрами самой колебательной системы

$$k = \sqrt{c/m} \qquad T = 2\pi / k$$

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СИЛОЙ



Рассматриваем прямолинейное движение точки массой ***m*.**

Силу тяжести учитываем.

Условие равновесия

$$mg - c\lambda_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_s = mg / c$$

$$F_x = -c(x + \lambda_s)$$

$$m\ddot{x} = -c(x + \lambda_s) + mg \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -cx$$

Постоянная сила, не изменяя характер колебаний, смещает центр колебаний в сторону ее действия на величину статической деформации