

**\* Введение в теорию  
графов.**

**Способы представления  
ориентированных и  
неориентированных  
графов**

**Лекция 22**

# \* Основные понятия и определения

Граф  $G$  определяется двумя множествами - множеством вершин  $V$  и множеством пар вершин  $E$ . Пишут  $G=(V, E)$ . Будем также использовать обозначения  $|V| = n$  и  $|E| = m$ .

Если пара вершин неупорядочена, то ее принято называть *ребром*. Если упорядочена - *дугой*.

Граф, состоящий только из ребер называется *неориентированным графом*. Граф, содержащий только дуги - *ориентированным графом* или *орграфом*.

Две вершины  $x$  и  $y$ , соединенные ребром  $(x, y)$ , называют *смежными вершинами*. Если вершины соединены дугой  $(x,y)$ , то вершина  $x$  смежна вершине  $y$ , а обратной смежности нет.

Два ребра называют *смежными ребрами*, если они имеют общую вершину.

Ребро и любая из двух его вершин называются *инцидентными*.

Любому ребру или вершине графа может быть присвоен вес, такой граф называется *взвешенным*.

*Вес вершины* - число, которое характеризует вершину, *вес ребра* - число, характеризующее отношение между двумя вершинами.

Например, для графа автомобильных дорог вес ребра может означать длину дороги от одного города до другого.

Граф называется *связным*, если между любой парой вершин графа существует как минимум один путь.

# \* Способы представления графа в памяти

- Матрица инцидентности
- Матрица смежности
- Список пар вершин, соответствующих ребрам графа
- Списки инцидентности

В теории графов классическим способом представления графа служит **матрица инцидентности**.

Это матрица  $A$  с  $n$  строками, соответствующими вершинам, и  $m$  столбцами, соответствующими ребрам. Для ориентированного графа столбец, соответствующий дуге  $(x, y)$  содержит 1 в строке, соответствующей вершине  $x$ , -1 в строке, соответствующей вершине  $y$ , и нули во всех остальных строках. В случае неориентированного графа столбец, соответствующий ребру  $\{x, y\}$ , содержит 1 в строках, соответствующих  $x$  и  $y$ , и нули в остальных строках.

Этот способ один из самых худших способов представления графов с алгоритмической точки зрения. Он требует  $n \cdot m$  ячеек памяти, причем большинство этих ячеек занято нулями. Неудобен также доступ к информации.

Матрица инцидентности лучше всего подходит для операции «перечисление ребер, инцидентных вершине  $x$ ».

Лучшим способом представления графа является **матрица смежности**, определяемая как матрица  $V = [b_{ij}]$  размера  $n \times n$ , где  $b_{ij} = 1$ , если существует ребро, идущее из вершины  $x$  в вершину  $y$ ,  $b_{ij} = 0$  в противном случае. Если граф взвешенный, то вместо 1 в матрице ставится вес ребра, идущего из вершины  $i$  в вершину  $j$ .

Здесь мы подразумеваем, что ребро  $\{x, y\}$  неориентированного графа идет как от  $x$  к  $y$ , так и от  $y$  к  $x$ , так что матрица смежности такого графа всегда является симметричной.

Недостатком является тот факт, что независимо от числа ребер объем занятой памяти составляет  $n^2$ .

Этот способ хорош, когда нам надо проверять смежность или находить вес ребра по двум заданным вершинам.



Более экономным в отношении памяти (особенно в случае, неплотных графов, когда  $m$  гораздо меньше  $n^2$ ) является метод представления графа с помощью **списка пар, соответствующих его ребрам.**

Пара соответствует дуге  $\langle x, y \rangle$ , если граф ориентированный, и ребру  $\{x, y\}$  в случае неориентированного графа. Очевидно, что объем памяти в этом случае составляет  $2m$ .

Неудобством является большое число шагов, необходимое для получения множества вершин, к которым ведут ребра из данной вершины.

Ситуацию можно значительно улучшить, упорядочив множество пар лексикографически и применяя двоичный поиск, но лучшим решением во многих случаях оказывается структура данных, которая называется **СПИСКАМИ ИНЦИДЕНТНОСТИ**.

Она содержит для каждой вершины  $v$  список вершин  $u$ , таких, что  $v$  смежно с  $u$ . Каждый элемент такого списка является записью, содержащей вершину и указатель на следующую запись в списке.



# \* Домашнее задание

1. Составить опорный конспект лекции по теме «Введение в теорию графов. Способы представления ориентированных и неориентированных графов» на основе презентации.
2. Комбинаторика для программистов. Липский В. М.: «Мир», 1988, стр. 79-83.