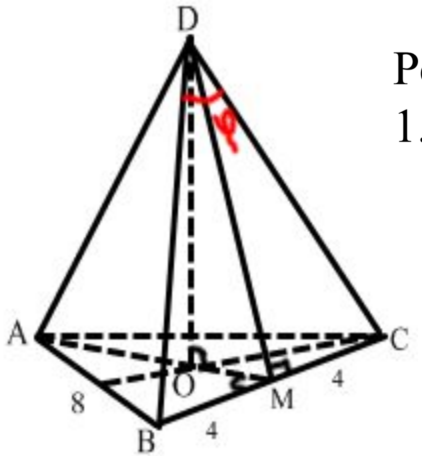
УРОК-ПРАКТИКУМ
В 10 КЛАССЕ

# Пирамида. Решение задач по теме «Пирамида».

№ 255 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ найдите высоту пирамиды.




Решение:

1. Из ΔBCD найдем боковое ребро DC по теореме косинусов: получим

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cdot \cos\varphi$$

$$64 = 2 \cdot BD^2 - 2 \cdot BD^2 \cos\varphi$$

$$64 = 4 \cdot BD^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$BD = \frac{4}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

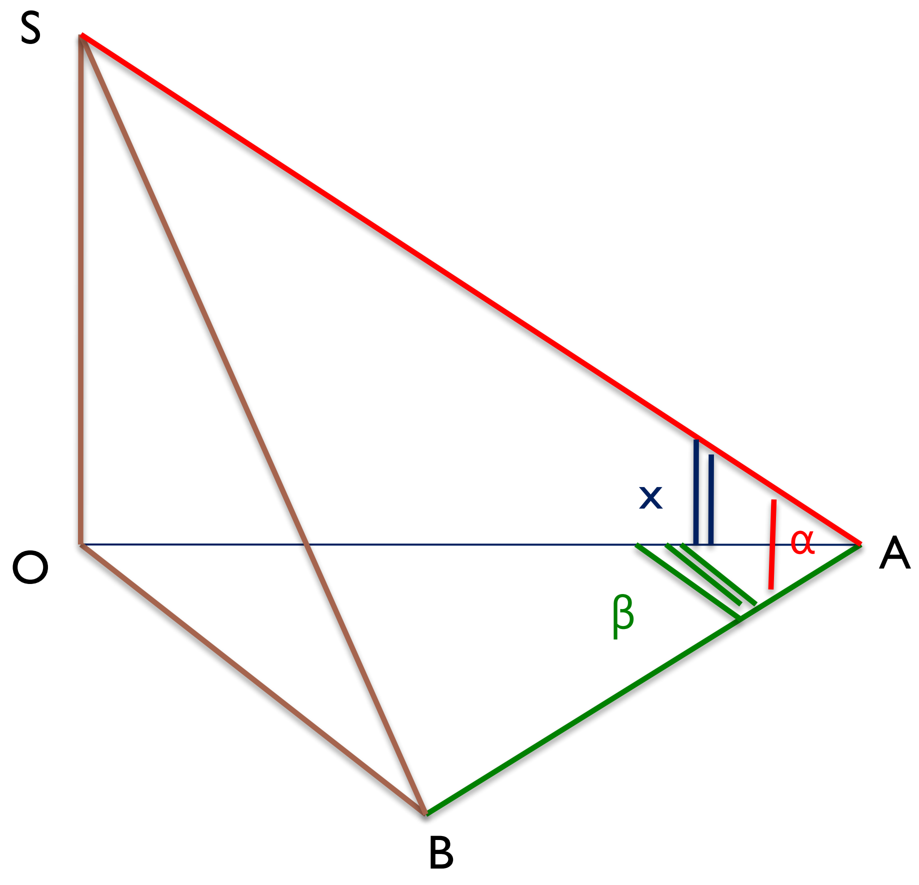
2. Из ΔCDO определим высоту пирамиды DO=H= $\sqrt{DC^2 - OC^2}$ , где OC – радиус окружности, описанной около основания ΔABC.

3. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin 60^0} = 2OC$ , OC= $\frac{8}{\sqrt{3}}$

4. $H = \sqrt{\frac{16}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{64}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{4}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}}{3 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{3\sin^2\frac{\varphi}{2}}} =$

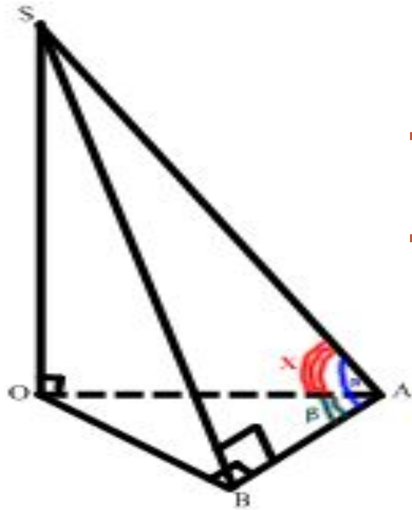
$= 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$

Ответ: $\frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$



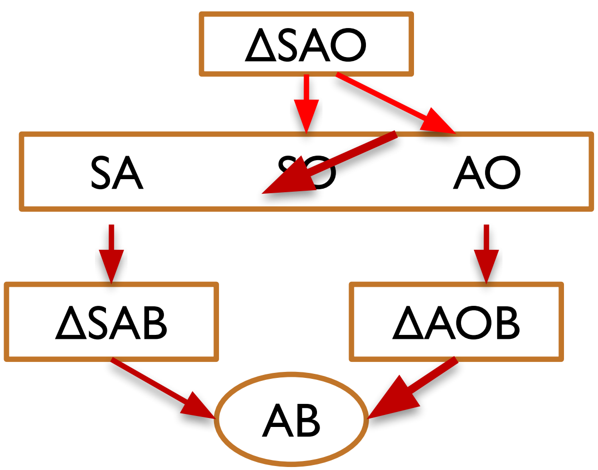
S
x
α
O
A
β
B

# Мнемонический прием:



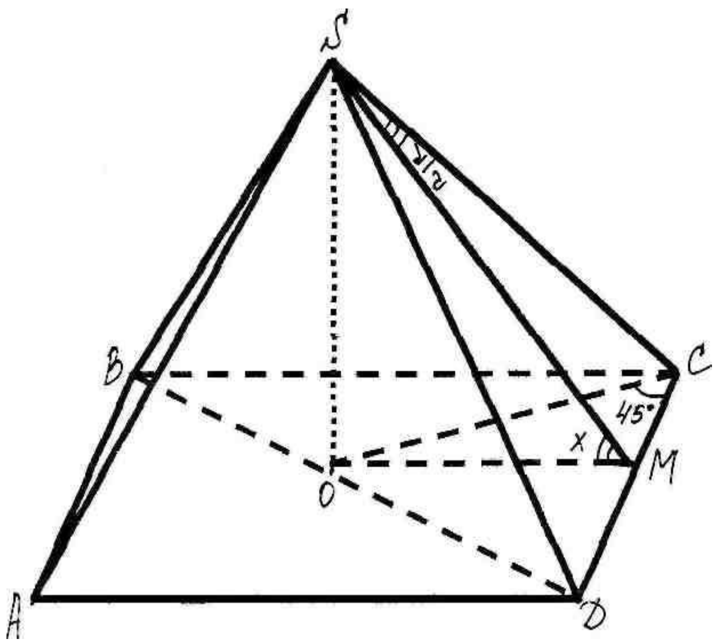

$$\cos x = \frac{AO}{SA}$$

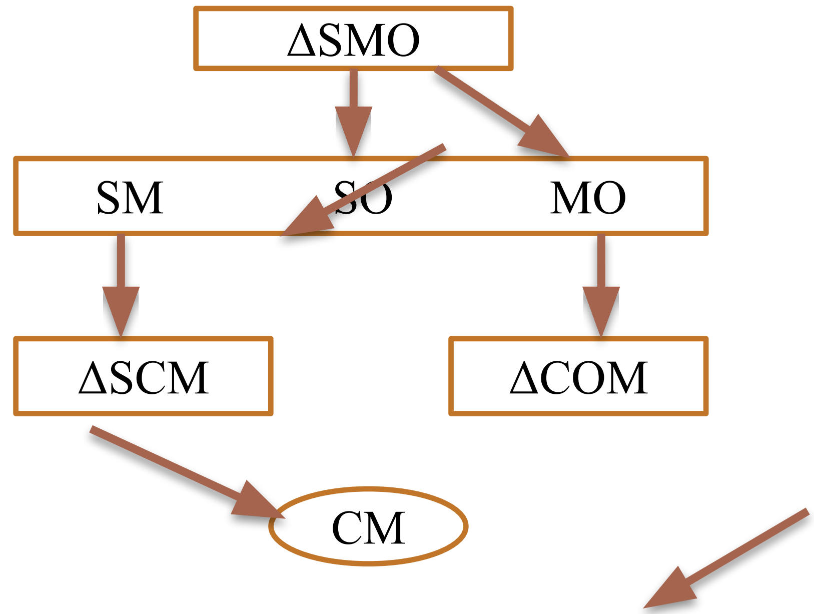
1. Запишем наименования треугольника, в котором находится искомый угол.
2. Из трех букв S, A, O составим различные пары. Получили три отрезка.
3. Зачеркнем тот, который не является общим для треугольников, имеющих данные углы.
4. Добавим по букве, чтобы получить наименование треугольника, включающего один из данных углов: α или β.
5. Найдем отрезок, состоящий из общих букв.
6. Для нахождения искомой зависимости разделим числитель и знаменатель на найденный отрезок.




$$\cos x = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{AO}{AB}}{\frac{SA}{AB}} = \frac{\frac{1}{\cos\beta}}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

## Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания (четырехугольная пирамида)

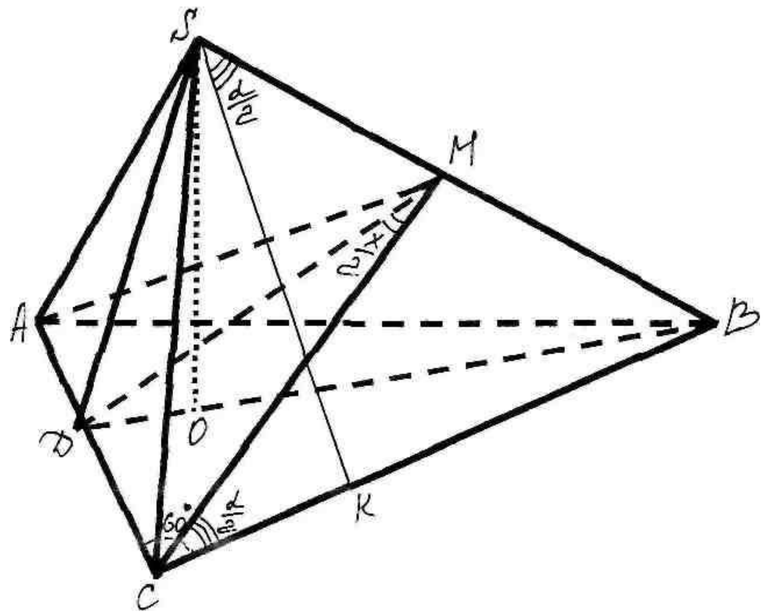


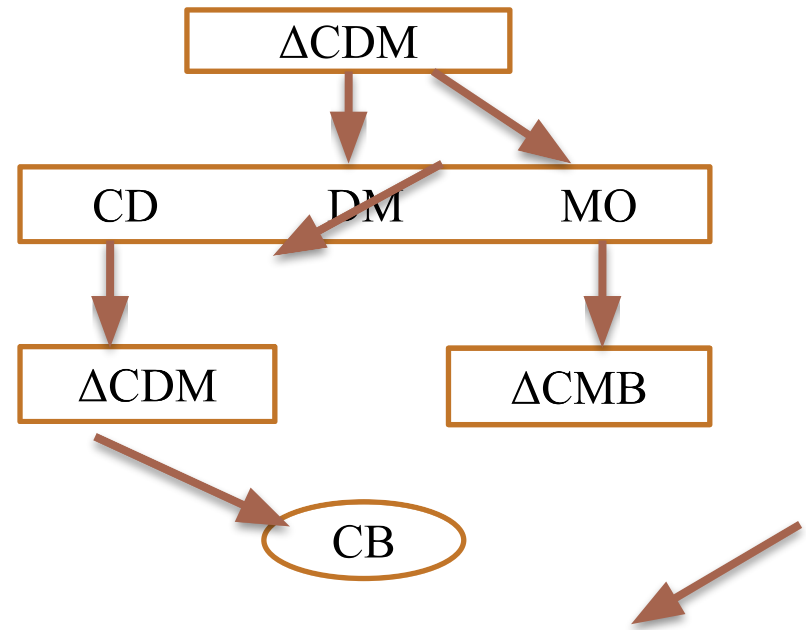




$$\cos x = \frac{MO}{SM} = \frac{\frac{MO}{CM}}{\frac{SM}{CM}} = \frac{tg 45^\circ}{ctg \frac{\alpha}{2}} = tg \frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos x = tg \frac{\alpha}{2}.$$

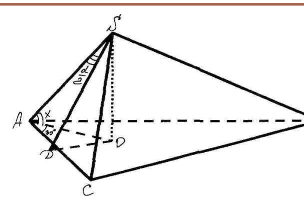
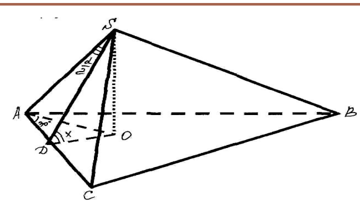
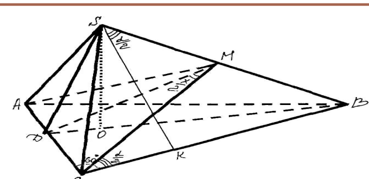
# Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре



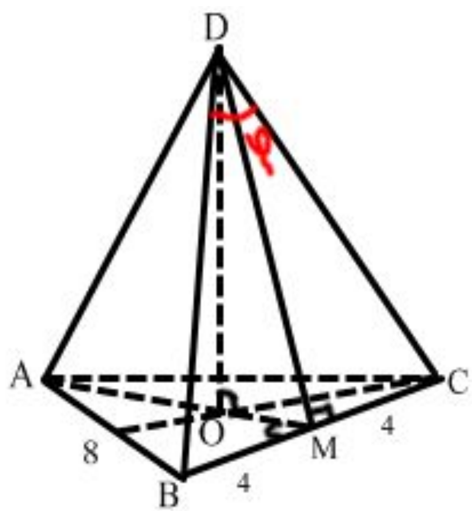

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{DC}{CM}=\frac{\frac{DC}{CB}}{\frac{CM}{CB}}=\frac{\cos 60^{\circ}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

| Переходы | N=3 | N=4 |
|---|---|---|
| Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом между боковым ребром и плоскостью основания | | |
|  Рис.8 | $\cos x = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$ | $\cos x = \sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ |
| Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания | | |
|  | $\cos x = \dfrac{tg\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$ | $\cos x = tg\dfrac{\alpha}{2}$ |
| Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре | | |
|  | $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ | $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ |

# Вернемся к задаче 255

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ найдите высоту пирамиды.




1. Из ΔABC найдем $OM = \frac{1}{2} \cdot CO = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

2. Применим формулу перехода для ∟DMO=X:

$$cosx = \frac{tg\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{MO}{DM}$$

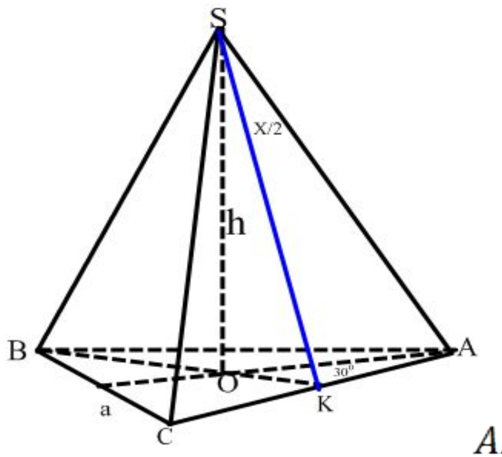
, отсюда $DM = \frac{OM}{cosx} = \frac{4}{tg\frac{\varphi}{2}}$ .

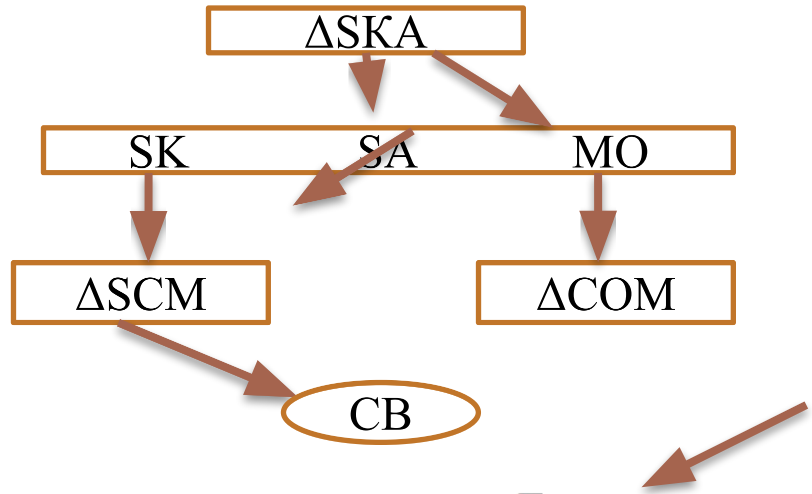
3. По теореме Пифагора DO= $\sqrt{\frac{16}{tg^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{16}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\tan^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}} =$

$$= \frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \tan^2\frac{\varphi}{2}}}{\tan\frac{\varphi}{2}} .$$

Ответ: $\frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \tan^2\frac{\varphi}{2}}}{\tan\frac{\varphi}{2}}$

№ 254 (б) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h. Найти плоский угол при вершине пирамиды.




Из ΔSKA: $sin\frac{x}{2}=\frac{AK}{SA}=\frac{\frac{AK}{KO}}{\frac{SA}{KO}}=\frac{tg60^0}{\frac{SA}{KO}}$, $SA=\sqrt{h^2+AO^2}$, где AO$=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, ОК $=\frac{1}{2}$АО $=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Тогда $sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}}}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{3a}{2\sqrt{9h^2+3a^2}}$ и отсюда $\frac{x}{2}=arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2+3a^2}}\right)$

Значит $x=2arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2+3a^2}}\right)$

Ответ: $x=2arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2+3a^2}}\right)$