Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

Решение уравнений с одной переменной.

$$f(x) = 0$$

Алгебраическое уравнение в канонической форме

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Примеры трансцендентных уравнений:

$$x - 10\sin(x) = 0; \qquad 2^{x} - 2\cos(x) = 0; \qquad \lg(x + 5) = \cos(x).$$

Численные методы решения:

- Метод половинного деления
- Метод хорд
- Метод касательных (Ньютона)
- Метод простой итерации
- Метод Рыбакова.

Приближенное решение уравнений.

Поиск корней функции

1. Отделение корней

Теорема1. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$ то есть $f(a)\cdot f(b)<0$ то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень на уравнения $f(x)=0$.

То есть найдется хотя бы одно число $\xi \in (a, b)$ такое, что $f(\xi)=0$.

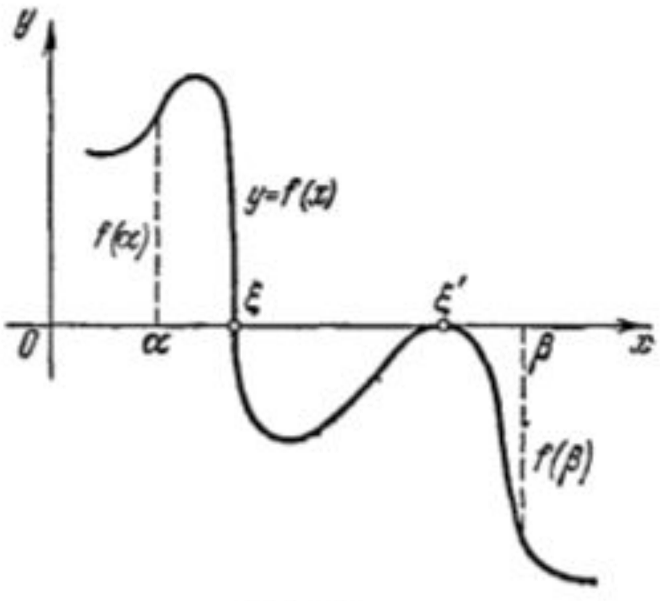


Рис.1

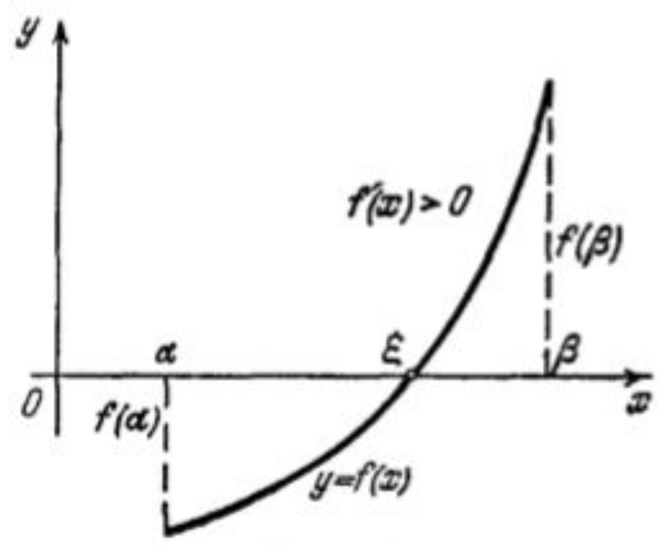


Рис.2

Приближенное решение уравнений.

Поиск корней функции

2. Получение приближенного значения корня. Оценка погрешности

Теорема 2. Пусть ξ – точный, а $\bar{x}$ - приближенный корни уравнения $f(x)=0$, находящиеся на одном и том же отрезке $[a,b]$, причем $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ при $a \leq x \leq b$. Тогда справедлива оценка:

$$|\bar{x}-\xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} \qquad (2)$$

// доказательство на доске

Пример. Приближенным корнем уравнения $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0$ является $\bar{x} = 1{,}22$. Оценить абсолютную погрешность этого корня.

Приближенное решение уравнений.

Поиск корней функции

Замечание.

$$\left|f\left(\overline{x}\right)\right| =$$

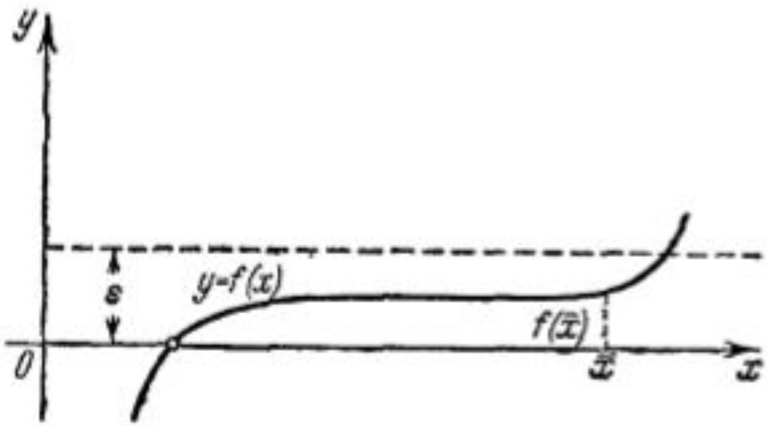


Рис. 11.

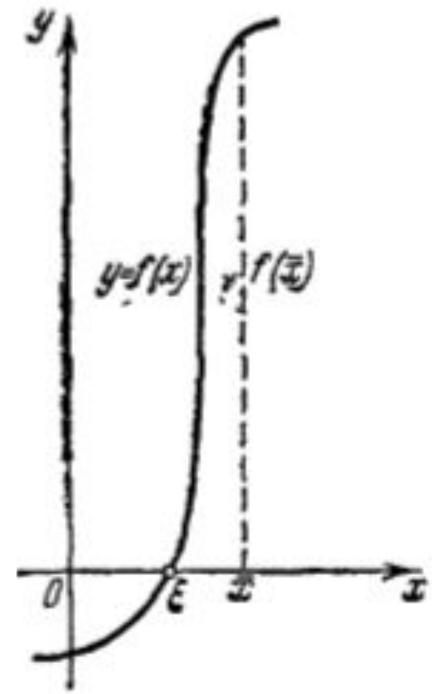


Рис. 12.

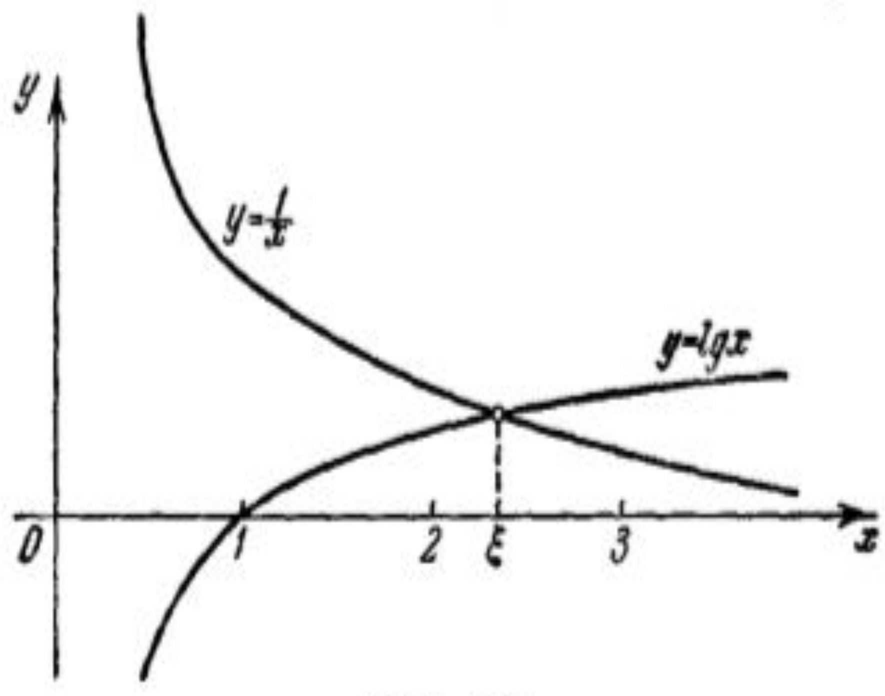
Приближенное решение уравнений.

Графический метод поиска корней

$$f(x)=0 \qquad \varphi(x)=\psi(x)$$

Пример. Графически решить уравнение $x \cdot \lg(x)=1$.

Решение. Запишем заданное уравнение в виде $\lg(x)=\dfrac{1}{x}$



Приближенное решение уравнений.

Метод дихотомии (половинного деления)

$$f(x)=0$$

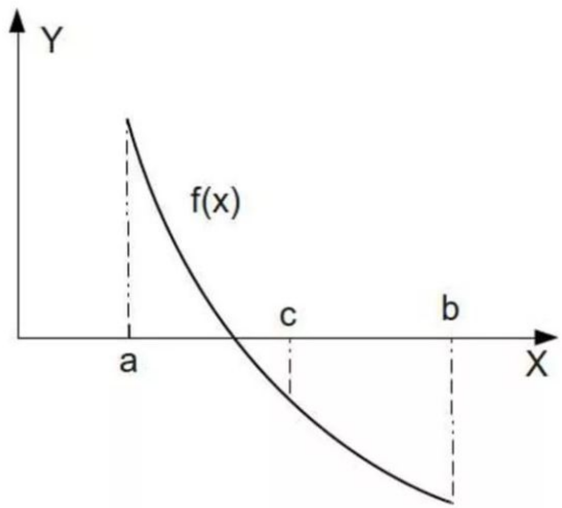
Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [*a*,*b*] и имеет единственный корень на этом интервале.

Разделим отрезок [*a*,*b*] пополам точкой $c=\dfrac{a+b}{2}$.

Выполняется одно из условий:

$$f(a)\cdot f(c)<0 \qquad \text{или} \qquad f(c)\cdot f(b)<0$$

$[a,c]$ $\qquad\qquad$ $[c,b]$



Выбираем тот из отрезков, на котором функция меняет знак.

Получаем бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков

Таких, что $\quad [a,\, b]\supset[a_1,\, b_1]\supset[a_2,\, b_2]\supset \ldots \supset[a_n,\, b_n]\ldots$

$$f(a_n)\cdot f(b_n)<0 \quad (n=1,\, 2,\, \ldots) \qquad \text{и} \qquad b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$$

Приближенное решение уравнений.

Метод дихотомии (половинного деления)

$a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ - монотонно неубывающая ограниченная последовательность.

Следовательно, существует $\bar{\xi}$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \bar{\xi}$.

$b_1, b_2, \dots, b_n \dots$ - монотонно невозрастающая ограниченная последовательность.

Тогда в силу равенства $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$ существует общий предел

$$\bar{\xi} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$:

$$\left[f(\bar{\xi})\right]^2 \le 0$$

Отсюда $f(\bar{\xi}) = 0$, то есть $\bar{\xi}$ - корень уравнения $f(x) = 0$.

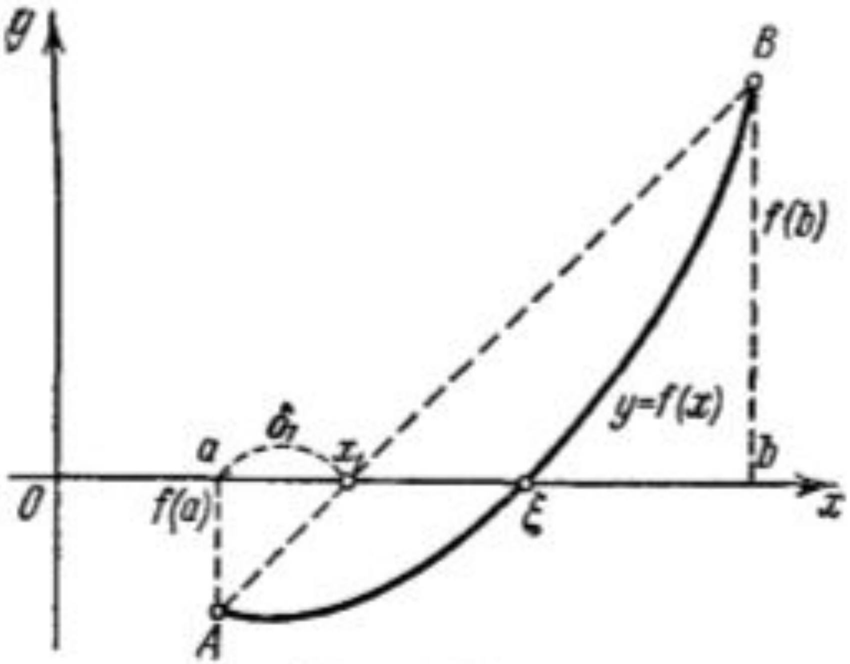
Причём

$$0 \le \bar{\xi} - a_n \le \frac{1}{2^n}(b-a)$$

То есть погрешность метода не больше $\frac{b-a}{2^n}$

Приближенное решение уравнений.

Метод хорд
(метод пропорциональных частей)



Хорда: $A[a, f(a)]$

$B[b, f(b)]$

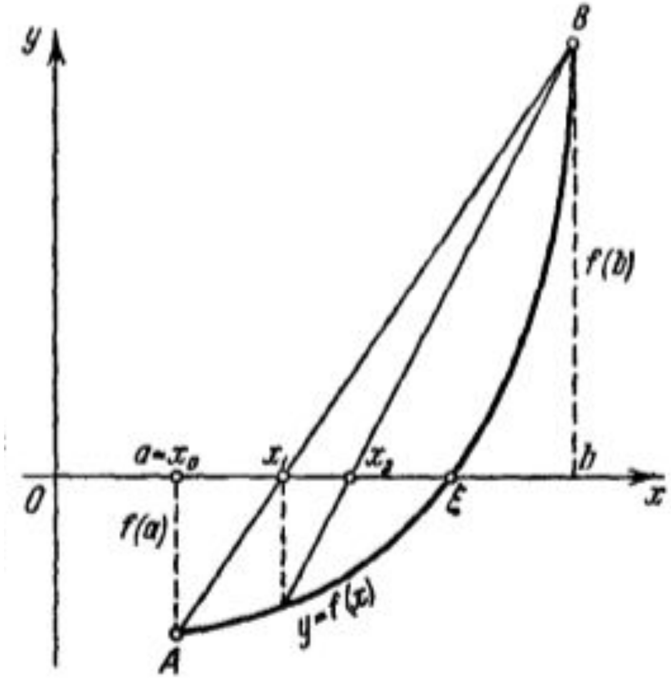
Полагая $x = x_1$ и $y = 0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

Приближенное решение уравнений.

Метод хорд

(метод пропорциональных частей)



$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1)$$

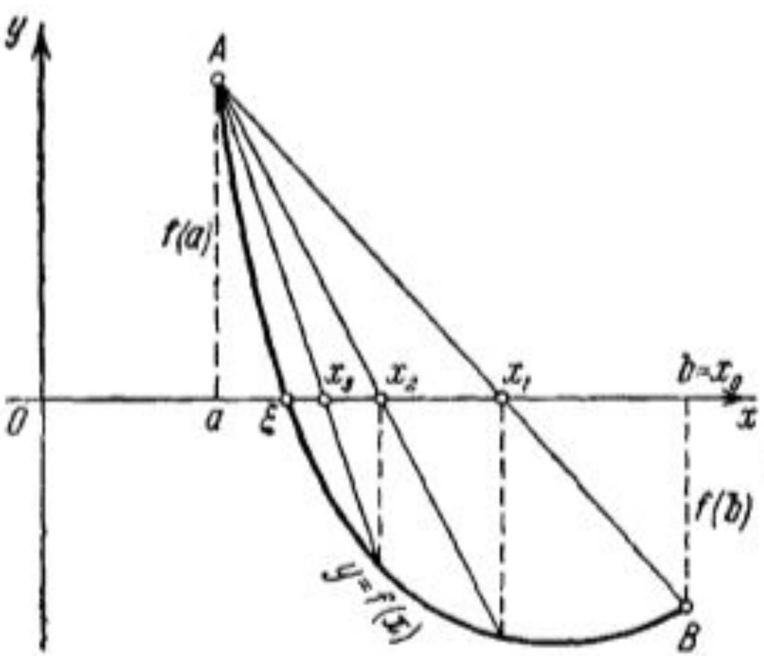
....

$$x_0 = a$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}(b - x_{n-1})$$

Приближенное решение уравнений.

Метод хорд
(метод пропорциональных частей)



$$x_0 = b$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}(x_{n-1} - a) \qquad (3)$$

$\{x_n\}$ ограничена и монотонна,

$$\bar{\xi} = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad (a < \bar{\xi} < b)$$

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f(\bar{\xi}) - f(a)}(\bar{\xi} - a)$$

$$f(\bar{\xi}) = 0$$

Приближенное решение уравнений.

Метод хорд

Оценка точности

Вариант оценки 1.

$$|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$, где $|f'(x)| \ge m_1$ при $a \le x \le b$

Вариант оценки 2. **//вывод на доске**

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|$$

$$|f'(x)| \ge m_1$$

$$|f'(x)| \le M_1$$

Вариант оценки 3.

Если $M_1 \le 2m_1$, то $|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|$