ИНФОРМАТИКА

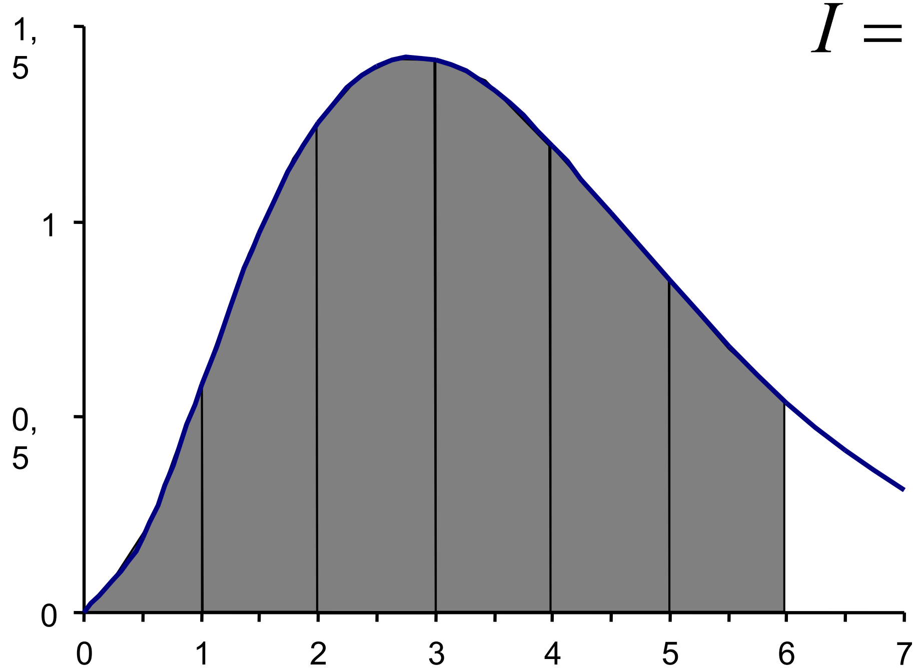
Тема 6.

Численные методы решения задач.

6.4. Численное интегрирование

Задача численного интегрирования сводится к нахождению численного значения I

$$I = \int_a^b f(x)dx$$



$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt$$

$$\Phi(6)$$

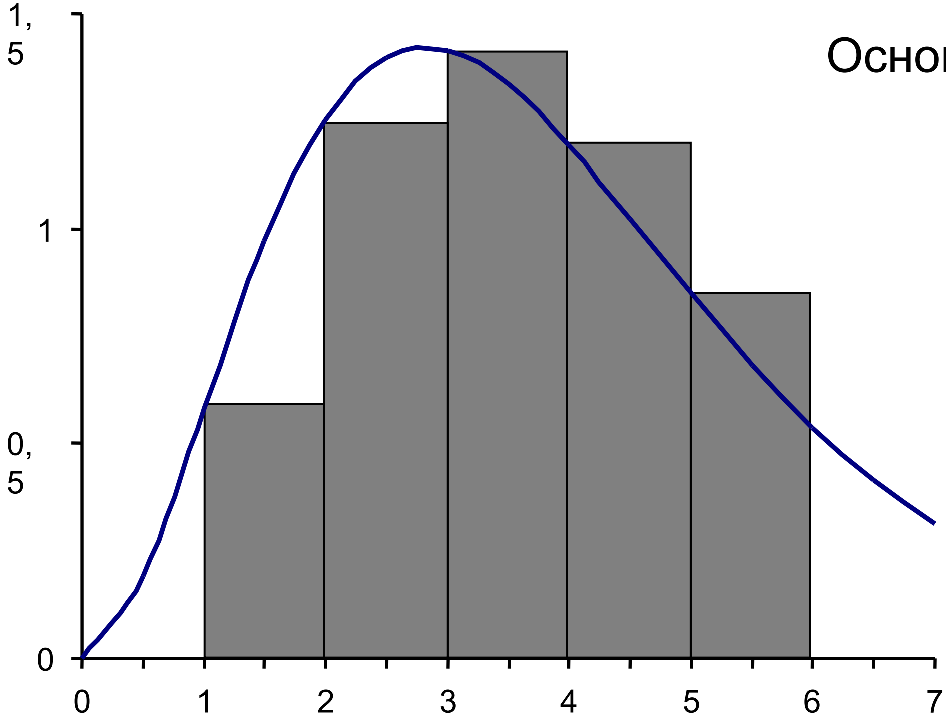
Численное интегрирование основано на аппроксимации подынтегральной функции другой функцией, для которой существует аналитическое решение определенного интеграла.

Аппроксимация – замена одних математических объектов другими в том или ином смысле близкими к исходным.

6.4.1. Метод прямоугольников

Численное интегрирование методом прямоугольников имеет три разновидности: метод **левых прямоугольников**, метод **правых прямоугольников** и метод **центральных прямоугольников**.

При вычислении интеграла методом **левых прямоугольников криволинейная трапеция** заменяется **прямоугольниками**, высоты которых равны значению функции в **левых точках интервалов**.



Основания всех прямоугольников равны

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Метод левых прямоугольников

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad [a;b] \qquad n = 6$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

$$S_1 = h \cdot f(a) \qquad S_2 = h \cdot f(a+h) \qquad S_3 = h \cdot f(a+2h)$$

$$S_4 = h \cdot f(a+3h) \qquad S_5 = h \cdot f(a+4h) \qquad S_6 = h \cdot f(a+5h)$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 =$$
$$= h \cdot f(a) + h \cdot f(a+h) + h \cdot f(a+2h) + h \cdot f(a+3h) + h \cdot f(a+4h) + h \cdot f(a+5h) =$$
$$= h \cdot \left(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + f(a+4h) + f(a+5h) \right)$$

Формула вычисления интеграла методом левых прямоугольников

$$I_{ЛП} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot h) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Метод левых прямоугольников

Пример. Вычислить интеграл методом левых прямоугольников

$$I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$a = 0 \qquad b = 6 \qquad f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

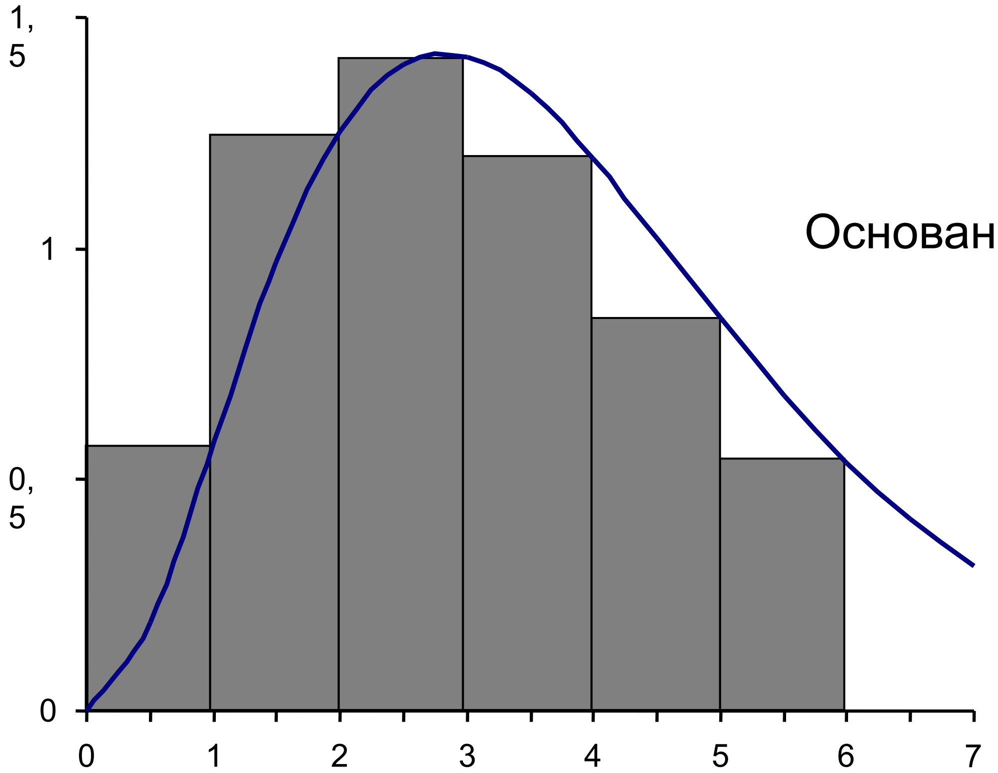
$$n = 6 \qquad h = \frac{6-0}{6} = 1$$

$$I_{ЛП} = 1 \cdot \left(\frac{0^3}{e^0 - 1} + \frac{1^3}{e^1 - 1} + \frac{2^3}{e^2 - 1} + \frac{3^3}{e^3 - 1} + \frac{4^3}{e^4 - 1} + \frac{5^3}{e^5 - 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{e-1} + \frac{8}{e^2 - 1} + \frac{27}{e^3 - 1} + \frac{64}{e^4 - 1} + \frac{125}{e^5 - 1} = 0,582 + 1,252 + 1,415 + 1,194 + 0,848 = 5,291$$

Метод правых прямоугольников

При вычислении интеграла методом **правых прямоугольников криволинейная трапеция** заменяется **прямоугольниками**, высоты которых равны значению функции в **правых точках интервалов**.



Основания всех прямоугольников равны

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Метод правых прямоугольников

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad [a;b] \qquad n = 6$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

$$S_1 = h \cdot f(a+h) \qquad S_2 = h \cdot f(a+2h) \qquad S_3 = h \cdot f(a+3h)$$

$$S_4 = h \cdot f(a+4h) \qquad S_5 = h \cdot f(a+5h) \qquad S_6 = h \cdot f(a+6h)$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 =$$
$$= h \cdot f(a+h) + h \cdot f(a+2h) + h \cdot f(a+3h) + h \cdot f(a+4h) + h \cdot f(a+5h) + h \cdot f(a+6h) =$$
$$= h \cdot \left(f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + f(a+4h) + f(a+5h) + f(a+6h) \right)$$

Формула вычисления интеграла методом правых прямоугольников

$$I_{ПП} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(a + i \cdot h) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Метод правых прямоугольников

Пример. Вычислить интеграл методом правых прямоугольников

$$I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$a = 0 \qquad b = 6 \qquad f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$n = 6 \qquad h = \frac{6-0}{6} = 1$$

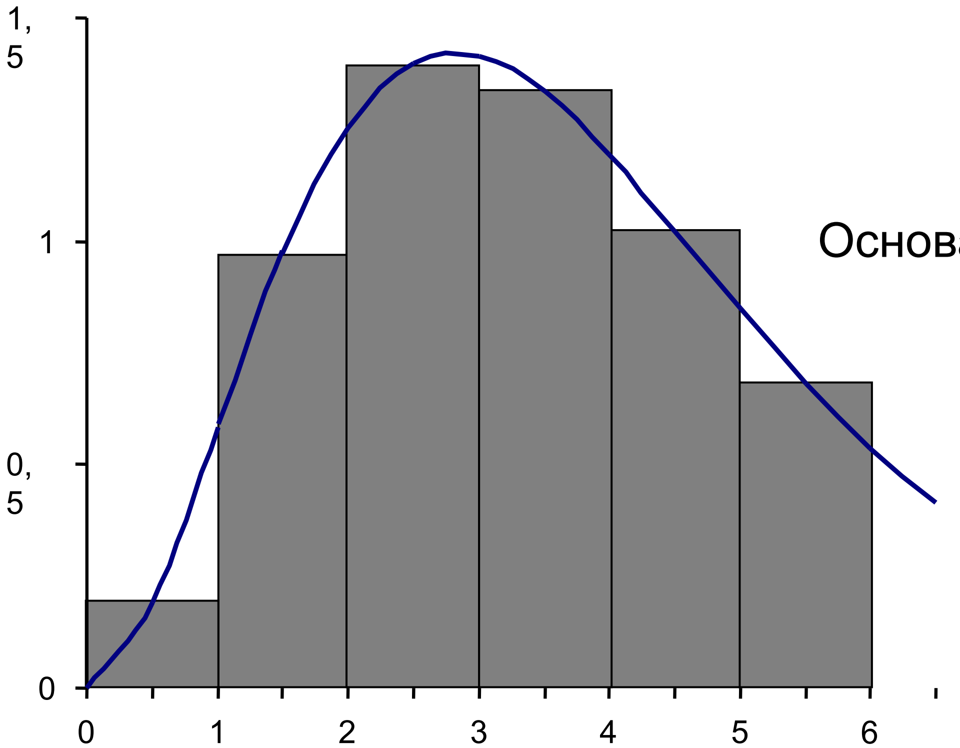
$$I_{ПП} = 1 \cdot \left(\frac{1^3}{e^1 - 1} + \frac{2^3}{e^2 - 1} + \frac{3^3}{e^3 - 1} + \frac{4^3}{e^4 - 1} + \frac{5^3}{e^5 - 1} + \frac{6^3}{e^6 - 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{e - 1} + \frac{8}{e^2 - 1} + \frac{27}{e^3 - 1} + \frac{64}{e^4 - 1} + \frac{125}{e^5 - 1} + \frac{216}{e^6 - 1} =$$

$$= 0,582 + 1,252 + 1,415 + 1,194 + 0,848 + 0,537 = 5,828$$

Метод центральных прямоугольников

При вычислении интеграла методом **правых прямоугольников криволинейная трапеция** заменяется **прямоугольниками**, высоты которых равны значению функции в **центрах интервалов**.



Основания всех прямоугольников равны

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Метод центральных прямоугольников

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad [a;b] \qquad n = 6$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

$$S_1 = h \cdot f\left(a + \frac{h}{2}\right) \qquad S_2 = h \cdot f\left(a + \frac{3h}{2}\right) \qquad S_3 = h \cdot f\left(a + \frac{5h}{2}\right)$$

$$S_4 = h \cdot f\left(a + \frac{7h}{2}\right) \qquad S_5 = h \cdot f\left(a + \frac{9h}{2}\right) \qquad S_6 = h \cdot f\left(a + \frac{11h}{2}\right)$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 =$$

$$= h \cdot f\left(a + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + h \cdot f\left(a + \frac{5h}{2}\right) + h \cdot f\left(a + \frac{7h}{2}\right) + h \cdot f\left(a + \frac{9h}{2}\right) + h \cdot f\left(a + \frac{11h}{2}\right) =$$

$$= h \cdot \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f\left(a + \frac{5h}{2}\right) + f\left(a + \frac{7h}{2}\right) + f\left(a + \frac{9h}{2}\right) + f\left(a + \frac{11h}{2}\right) \right]$$

Формула вычисления интеграла методом центральных прямоугольников

$$I_{ЦП} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{(2i-1) \cdot h}{2}\right) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Метод правых прямоугольников

Пример. Вычислить интеграл методом центральных прямоугольников

$$I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$a = 0 \qquad b = 6 \qquad f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$n = 6 \qquad h = \frac{6-0}{6} = 1$$

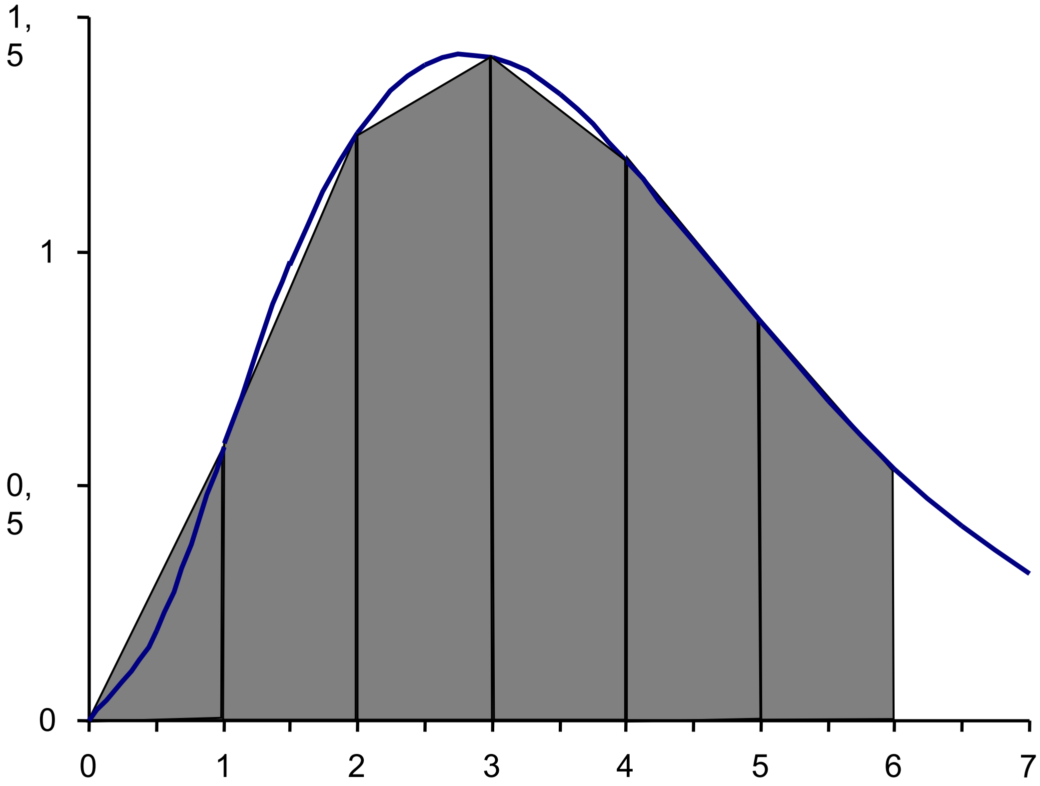
$$I_{ЦП} = 1 \cdot \left(\frac{0,5^3}{e^{0,5}-1} + \frac{1,5^3}{e^{1,5}-1} + \frac{2,5^3}{e^{2,5}-1} + \frac{3,5^3}{e^{3,5}-1} + \frac{4,5^3}{e^{4,5}-1} + \frac{5,5^3}{e^{5,5}-1} \right) =$$

$$= \frac{0,5^3}{e^{0,5}-1} + \frac{1,5^3}{e^{1,5}-1} + \frac{2,5^3}{e^{2,5}-1} + \frac{3,5^3}{e^{3,5}-1} + \frac{4,5^3}{e^{4,5}-1} + \frac{5,5^3}{e^{5,5}-1} =$$

$$= 0,193 + 0,969 + 1,397 + 1,335 + 1,024 + 0,683 = 5,601$$

6.4.2. Метод трапеций

При вычислении интеграла методом **трапеций криволинейная трапеция** заменяется **линейной функцией** на каждом элементарном отрезке.



Высоты всех трапеций равны

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Метод трапеций

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad [a;b] \qquad n = 6$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

$$S_1 = \frac{f(a) + f(a+h)}{2} \cdot h \qquad S_2 = \frac{f(a+h) + f(a+2h)}{2} \cdot h \qquad S_3 = \frac{f(a+2h) + f(a+3h)}{2} \cdot h$$

$$S_4 = \frac{f(a+3h) + f(a+4h)}{2} \cdot h \qquad S_5 = \frac{f(a+4h) + f(a+5h)}{2} \cdot h \qquad S_6 = \frac{f(a+5h) + f(b)}{2} \cdot h$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 =$$
$$= \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + 2f(a+3h) + 2f(a+4h) + 2f(a+5h) + f(b) \right]$$

Формула вычисления интеграла методом трапеций

$$I_{Tp} = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right] \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Метод трапеций

Пример. Вычислить интеграл методом трапеций

$$I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$a = 0 \qquad b = 6 \qquad f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

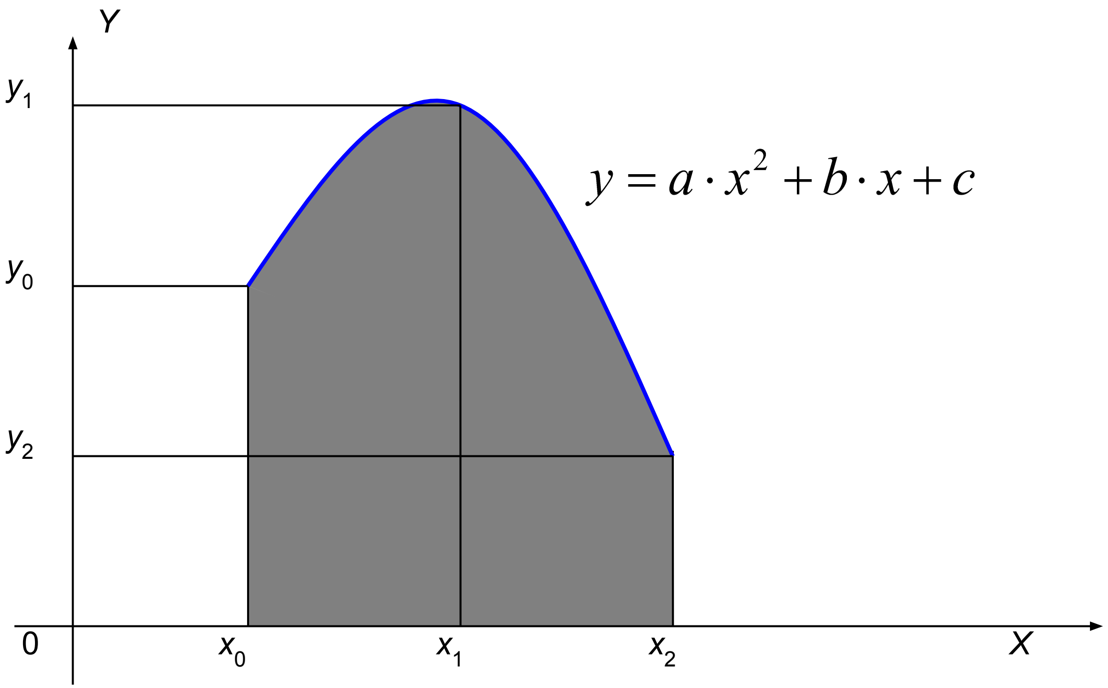
$$n = 6 \qquad h = \frac{6-0}{6} = 1$$

$$I_{Tp} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{0^3}{e^0 - 1} + \frac{6^3}{e^6 - 1} + 2 \cdot \left(\frac{1^3}{e^1 - 1} + \frac{2^3}{e^2 - 1} + \frac{3^3}{e^3 - 1} + \frac{4^3}{e^4 - 1} + \frac{5^3}{e^5 - 1} \right) \right] =$$

$$= 0,5 \cdot \left[0 + 0,537 + 2 \cdot 5,291 \right] = 0,5 \cdot 11,119 = 5,559$$

6.4.3. Метод парабол (Симпсона или Ньютона-Симпсона)

При вычислении интеграла методом **парабол криволинейная трапеция** заменяется **квадратичной функцией** $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ на каждом элементарном отрезке.



$$I = \int_{X_0}^{X_2} f(x)dx \approx \int_{X_0}^{X_2} (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)dx$$

Метод парабол

$$I = \int\limits_{X_0}^{X_2} f(x)dx = \int\limits_{X_0}^{X_2} \left[a \cdot x^2 + b \cdot x + c \right] dx = \frac{1}{3} a \cdot x^3 + \frac{1}{2} b \cdot x^2 + c \cdot x \Big|_{x_0}^{x_2} =$$

$$= \frac{1}{3} a \cdot x_2^3 + \frac{1}{2} b \cdot x_2^2 + c \cdot x_2 - \frac{1}{3} a \cdot x_0^3 - \frac{1}{2} b \cdot x_0^2 - c \cdot x_0$$

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2} \qquad x_0 = x_1 - h \quad x_2 = x_1 + h \quad y_0 = f(x_0) \quad y_1 = f(x_1) \quad y_2 = f(x_2)$$

$$I = \frac{1}{3} a \cdot x_2^3 + \frac{1}{2} b \cdot x_2^2 + c \cdot x_2 - \frac{1}{3} a \cdot x_0^3 - \frac{1}{2} b \cdot x_0^2 - c \cdot x_0 =$$

$$= \frac{a}{3} \cdot (x_1 + h)^3 + \frac{b}{2} \cdot (x_1 + h)^2 + c \cdot (x_1 + h) - \frac{a}{3} \cdot (x_1 - h)^3 - \frac{b}{2} \cdot (x_1 - h)^2 - c \cdot (x_1 - h) =$$

$$= \frac{a}{3} \cdot \left[(x_1 + h)^3 - (x_1 - h)^3 \right] + \frac{b}{2} \cdot \left[(x_1 + h)^2 - (x_1 - h)^2 \right] + c \cdot \left[(x_1 + h) - (x_1 - h) \right]$$

Метод парабол

$$I=\frac{1}{3}a\cdot x_2^3+\frac{1}{2}b\cdot x_2^2+c\cdot x_2-\frac{1}{3}a\cdot x_0^3-\frac{1}{2}b\cdot x_0^2-c\cdot x_0=$$

$$=\frac{a}{3}\cdot(x_1+h)^3+\frac{b}{2}\cdot(x_1+h)^2+c\cdot(x_1+h)-\frac{a}{3}\cdot(x_1-h)^3-\frac{b}{2}\cdot(x_1-h)^2-c\cdot(x_1-h)=$$

$$=\frac{a}{3}\cdot\left[(x_1+h)^3-(x_1-h)^3\right]+\frac{b}{2}\cdot\left[(x_1+h)^2-(x_1-h)^2\right]+c\cdot\left[(x_1+h)-(x_1-h)\right]$$

$$(x_1+h)-(x_1-h)=2h$$

$$(x_1+h)^2-(x_1-h)^2=\left[(x_1+h)+(x_1-h)\right]\cdot\left[(x_1+h)-(x_1-h)\right]=2x_1\cdot 2h$$

$$(x_1+h)^3-(x_1-h)^3=\left[(x_1+h)-(x_1-h)\right]\cdot\left[(x_1+h)^2+(x_1+h)(x_1-h)+(x_1-h)^2\right]=$$

$$=2h\cdot\left[x_1^2+2h\cdot x_1+h^2+x_1^2-h^2+x_1^2-2h\cdot x_1+h^2\right]=2h\cdot\left[3x_1^2+h^2\right]$$

$$I=2h\cdot\left[\frac{a}{3}\left(3x_1^2+h^2\right)+\frac{b}{2}\cdot 2x_1+c\right]$$

Коэффициенты параболы определяются из условия прохождения параболы через три точки $\{x_0; f(x_0)\}$ $\{x_1; f(x_1)\}$ $\{x_2; f(x_2)\}$

$$\begin{cases} a\cdot x_0^2 + b\cdot x_0 + c = y_0 \\ a\cdot x_1^2 + b\cdot x_1 + c = y_1 \\ a\cdot x_2^2 + b\cdot x_2 + c = y_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = x_1\cdot(x_1-h)^2 + (x_1-h)\cdot(x_1+h)^2 + x_1^2\cdot(x_1+h) -$$

$$-x_1\cdot(x_1+h)^2 - x_1^2\cdot(x_1-h) - (x_1-h)^2\cdot(x_1+h) =$$

$$= x_1^2\cdot 2h + 2h\cdot(x_1^2-h^2) - x_1^2\cdot 4h = 2h\cdot x_1^2 + 2h\cdot x_1^2 - 2h^3 - 4h\cdot x_1^2 = -2h^3$$

$$\Delta = -2h^3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & 1 \\ y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = -y_0 \cdot h - y_2 \cdot h + 2y_1 \cdot h = -h \cdot (y_0 + y_2 - 2y_1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_0^2 & y_0 & 1 \\ x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = -4h \cdot x_1 \cdot y_1 + 2h \cdot x_1 \cdot y_0 + h^2 \cdot y_0 + 2h \cdot x_1 \cdot y_2 - h^2 \cdot y_2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & y_0 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = h^2 \cdot x_1 \cdot (y_2 - y_0) - h \cdot x_1^2 \cdot (y_2 + y_0) + 2h \cdot x_1^2 \cdot y_1 - 2h^3 \cdot y_1$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-h \cdot (y_0 + y_2 - 2y_1)}{-2h^3} = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$$

$$b=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-4h\cdot x_1\cdot y_1+2h\cdot x_1\cdot y_0+h^2\cdot y_0+2h\cdot x_1\cdot y_2-h^2\cdot y_2}{-2h^3}=$$

$$=\frac{4\cdot x_1\cdot y_1-2\cdot x_1\cdot(y_0+y_2)+h\cdot(y_2-y_0)}{2h^2}$$

$$c=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{h^2\cdot x_1\cdot(y_2-y_0)-h\cdot x_1^2\cdot(y_2+y_0)+2h\cdot x_1^2\cdot y_1-2h^3\cdot y_1}{-2h^3}=$$

$$=\frac{-h\cdot x_1\cdot(y_2-y_0)+x_1^2\cdot(y_2+y_0)-2x_1^2\cdot y_1+2h^2\cdot y_1}{2h^2}$$

$$I=\frac{1}{h}\cdot\left[\frac{y_0-2y_1+y_2}{3}\left(3x_1^2+h^2\right)+\frac{4\cdot x_1\cdot y_1-2\cdot x_1\cdot(y_0+y_2)+h\cdot(y_2-y_0)}{2}\cdot 2x_1-\right.$$

$$\left.-h\cdot x_1\cdot(y_2-y_0)+x_1^2\cdot(y_2+y_0)-2x_1^2\cdot y_1+2h^2\cdot y_1\right]$$

$$I_{\Pi}=\frac{h}{3}\cdot\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

Метод парабол

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad [a;b] \qquad n = 6$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_1 = \frac{h}{3}\cdot\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] \qquad S_2 = \frac{h}{3}\cdot\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right] \qquad S_3 = \frac{h}{3}\cdot\left[y_4 + 4y_5 + y_6\right]$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{h}{3}\cdot\left[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\cdot\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6\right]$$

Формула вычисления интеграла методом парабол

$$I_\Pi = \frac{h}{3}\cdot\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$ (n кратно 2)

Метод парабол

Пример. Вычислить интеграл методом парабол $$I=\int_0^6 \frac{x^3}{e^x-1}dx$$

$$x_0=0 \qquad x_6=6 \qquad f(x)=\frac{x^3}{e^x-1}$$

$$n=6 \qquad h=\frac{6-0}{6}=1$$

$$I_{\Pi}=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{0^3}{e^0-1}+4\cdot\frac{1^3}{e^1-1}+2\cdot\frac{2^3}{e^2-1}+4\cdot\frac{3^3}{e^3-1}+2\cdot\frac{4^3}{e^4-1}+4\cdot\frac{5^3}{e^5-1}+\frac{6^3}{e^6-1}\right]=$$

$$=\frac{0+4\cdot 0,582+2\cdot 1,252+4\cdot 1,415+2\cdot 1,194+4\cdot 0,848+0,537}{3}=\frac{16,809}{3}=5,603$$

6.4.4. Метод Симпсона 3/8

При вычислении интеграла методом **Симпсона 3/8 криволинейная трапеция** на каждом элементарном отрезке заменяется **полиномом третьей степени** $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$$I = \int_{X_0}^{X_2} f(x)dx \approx \int_{X_0}^{X_2} (a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d)dx$$

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8} \cdot \left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3 \right)$$

Формула вычисления интеграла методом Симпсона 3/8

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8} \cdot \left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + \ldots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n \right)$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$ (n кратно 3)

Метод парабол

Пример. Вычислить интеграл методом Симпсона 3/8

$$I = \int_0^6 \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$x_0 = 0 \qquad x_6 = 6 \qquad f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$n = 6 \qquad h = \frac{6-0}{6} = 1$$

$$I_П = \frac{3}{8} \cdot \left[\frac{0^3}{e^0 - 1} + 3 \cdot \frac{1^3}{e^1 - 1} + 3 \cdot \frac{2^3}{e^2 - 1} + 2 \cdot \frac{3^3}{e^3 - 1} + 3 \cdot \frac{4^3}{e^4 - 1} + 3 \cdot \frac{5^3}{e^5 - 1} + \frac{6^3}{e^6 - 1} \right] =$$

$$= \frac{3 \cdot (0 + 3 \cdot 0,582 + 3 \cdot 1,252 + 2 \cdot 1,415 + 3 \cdot 1,194 + 3 \cdot 0,848 + 0,537)}{8} = \frac{3 \cdot 14,995}{8} = 5,623$$

6.4.5. Метод Буля

При вычислении интеграла методом **Буля криволинейная трапеция** на каждом элементарном отрезке заменяется **полиномом четвертой степени**

$$y = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

$$I = \int_{X_0}^{X_4} f(x)dx \approx \int_{X_0}^{X_4} (a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e)dx$$

$$I_Б = \frac{2h}{45} \cdot \left(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4\right)$$

Формула вычисления интеграла методом Буля

$$I_Б = \frac{2h}{45} \cdot \left(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 14y_4 + 32y_5 + 12y_6 + 32y_7 + \ldots + 32y_{n-1} + 7y_n\right)$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$ (n кратно 4)

6.4.6. Сравнение различных методов по точности приближения

$$I = \int_a^b f(x)dx = Q(f) + E(f)$$

$Q(f)$ – численное значение интеграла, полученное тем или иным методом

$E(f)$ – ошибка интегрирования, которая зависит от вида функции $f(x)$ и шага h

Степенью точности называют такое целое **число** n, что для всех полиномов $P_i(x)$ степени $i \le n$ **приближенная формула** расчета значения интеграла **дает** абсолютно **точный** числовой **ответ**.

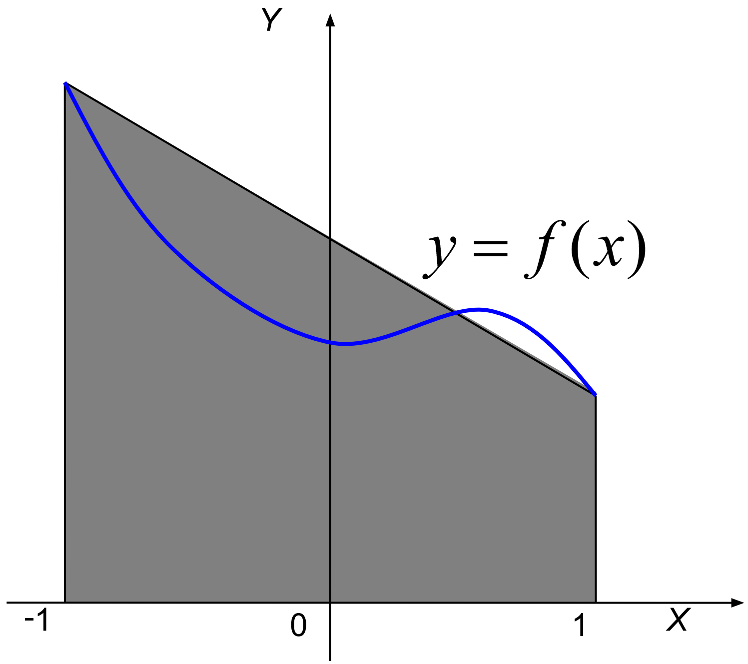
6.4.6. Сравнение различных методов по точности приближения

Метод	**Расчетная формула**	**Точность** $E(f)$
Левых прямоугольников	$h \cdot f_0$	$\dfrac{h^2 \cdot f'(c)}{2}$
Правых прямоугольников	$h \cdot f_1$	$\dfrac{h^2 \cdot f'(c)}{2}$
Центральных прямоугольников	$h \cdot f\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}\right)$	$\dfrac{h^3 \cdot f^{(2)}(c)}{24}$
Трапеций	$\dfrac{h}{2}(f_0 + f_1)$	$\dfrac{h^3 \cdot f^{(2)}(c)}{12}$
Симпсона	$\dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$\dfrac{h^5 \cdot f^{(4)}(c)}{90}$
Симпсона 3/8	$\dfrac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$\dfrac{3h^5 \cdot f^{(4)}(c)}{80}$
Буля	$\dfrac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$	$\dfrac{8h^7 \cdot f^{(6)}(c)}{945}$

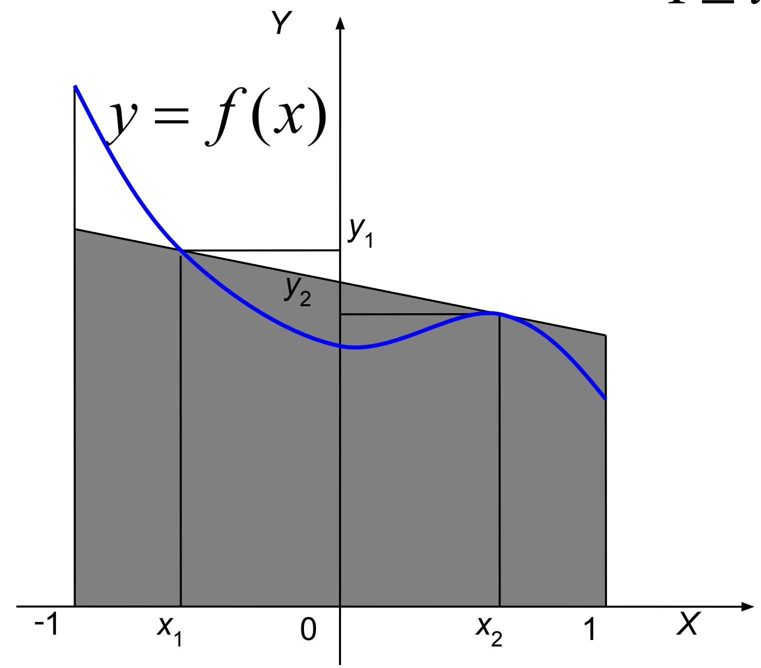
6.4.7. Метод Гаусса-Лежандра

Постановка задачи: требуется найти площадь под кривой $y = f(x)$

$$-1 \le x \le 1$$



а)



б)

$$y = f(x_1) + \frac{(x - x_1)\cdot(f(x_2) - f(x_1))}{x_2 - x_1}$$

$$S = \frac{2x_2}{x_2 - x_1} f(x_1) - \frac{2x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$S = \frac{2}{2} f(x_1) - \frac{-2}{2} f(x_2) = f(x_1) + f(x_2) = I_{Tp}$$

6.4.7. Метод Гаусса-Лежандра

Согласно методу Гаусса-Лежандра **приближенное значение** интеграла определяется с помощью **весового суммирования** значений функции в **двух точках** по формуле

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \omega_1 \cdot f(x_1) + \omega_2 \cdot f(x_2)$$

Значения абсцисс x_1 и x_2 и весов ω_1 и ω_2 выбираются из условия, что данная формула будет точной для четырех функций: $f(x)=1$, x, x^2, и x^3.

$$f(x)=1 \qquad \int_{-1}^{1} 1dx = 2 = \omega_1 + \omega_2$$

$$f(x)=x \qquad \int_{-1}^{1} xdx = 0 = \omega_1 \cdot x_1 + \omega_2 \cdot x_2$$

$$f(x)=x^2 \qquad \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = \omega_1 \cdot x_1^2 + \omega_2 \cdot x_2^2$$

$$f(x)=x^3 \qquad \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = \omega_1 \cdot x_1^3 + \omega_2 \cdot x_2^3$$

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 2 \\ \omega_1 \cdot x_1 + \omega_2 \cdot x_2 = 0 \\ \omega_1 \cdot x_1^2 + \omega_2 \cdot x_2^2 = \dfrac{2}{3} \\ \omega_1 \cdot x_1^3 + \omega_2 \cdot x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 2 \\ \omega_1 \cdot x_1 + \omega_2 \cdot x_2 = 0 \\ \omega_1 \cdot x_1^2 + \omega_2 \cdot x_2^2 = \dfrac{2}{3} \\ \omega_1 \cdot x_1^3 + \omega_2 \cdot x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_1 \cdot x_1 = -\omega_2 \cdot x_2$$

$$\omega_1 \cdot x_1^3 = -\omega_2 \cdot x_2^3$$

$$x_1^2 = x_2^2 \qquad x_1 = -x_2$$

$$\omega_1 = \omega_2 \qquad \omega_1 = \omega_2 = 1$$

$$\omega_1 \cdot x_1^2 + \omega_2 \cdot x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3} \qquad x_2^2 = \frac{1}{3} \qquad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + E_2(f) \qquad E_2(f) = \frac{f^{(4)}(c)}{135}$$

Метод Гаусса-Лежандра

Пример. Вычислить интеграл методом Гаусса-Лежандра по 2 точкам

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2}=\ln(x+2)\Big|_{-1}^{1}=\ln(3)-\ln(1)=\ln(3)\approx 1,09861$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2}=\frac{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{-1+2}+\frac{1}{1+2}\right)=1+0,33333\approx 1,33333$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{-1+2}+4\cdot\frac{1}{0+2}+\frac{1}{1+2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(1+2+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{9}\approx 1,11111$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2}=\frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{3}}+2}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+2}=0,70291+0,38800\approx 1,09091$$

Метод Гаусса-Лежандра

Если требуется вычислить значение интеграла на интервале $[a; b]$, то требуется выполнить замену переменной

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t \qquad dx = \frac{b-a}{2} \cdot dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \cdot \frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^2 6x^5 dx$ $\qquad a = 0 \quad b = 2 \quad f(x) = 6x^5$

$$x = \frac{0+2}{2} + \frac{2-0}{2} \cdot t = 1 + t \qquad dx = \frac{2-0}{2} \cdot dt = dt$$

$$\int_0^2 6x^5 dx = \int_{-1}^{1} 6 \cdot (1+t)^5 dt = 6 \cdot \left(1 + \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^5 + 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = 58,66667$$

Метод Гаусса-Лежандра

Если требуется вычислить значение интеграла на интервале $[a; b]$, то требуется выполнить замену переменной

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t \qquad dx = \frac{b-a}{2} \cdot dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \cdot \frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad a = 0 \qquad b = 1 \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$x = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \cdot t = \frac{1+t}{2} \qquad dx = \frac{1-0}{2} \cdot dt = \frac{1}{2}dt$$

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(\frac{1+t}{2}\right)}{\frac{1+t}{2}}dt = \int_{-1}^{1} \frac{\sin(0,5+0,5t)}{1+t}dt = 0,94604$$

При вычислении интеграла методом Гаусса-Лежандра по трем точкам **приближенное значение** определяется по формуле

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \omega_1 \cdot f(x_1) + \omega_2 \cdot f(x_2) + \omega_3 \cdot f(x_3)$$

Значения абсцисс x_1, x_2 и x_3 и весов ω_1, ω_2 и ω_3 выбираются из условия, что данная формула будет точной для шести функций: $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4$, и x^5.

$$x_1 = -\sqrt{0,6} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = \sqrt{0,6}$$

$$\omega_1 = \frac{5}{9} \qquad \omega_2 = \frac{8}{9} \qquad \omega_3 = \frac{5}{9}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} \cdot f(-\sqrt{0,6}) + \frac{8}{9} \cdot f(0) + \frac{5}{9} \cdot f(\sqrt{0,6}) \qquad E_3(f) = \frac{f^{(6)}(c)}{15750}$$

Метод Гаусса-Лежандра

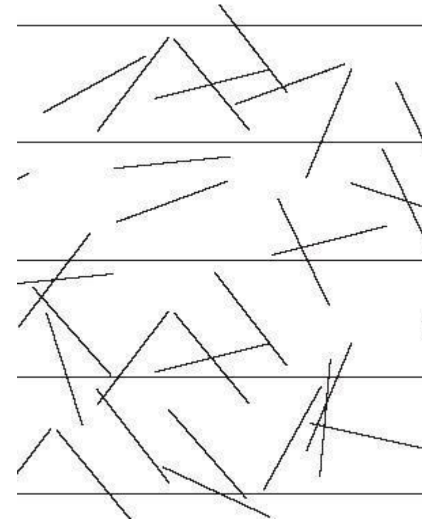
Число точек	**Абсциссы**	**Весовые коэффициенты**	**Точность**
2	$\pm 0,57735$	$1 \quad 1$	$\dfrac{f^{(4)}(c)}{135}$
3	$\pm 0,774597$ 0	$0,555556$ $0,888889$	$\dfrac{f^{(6)}(c)}{15750}$
4	$\pm 0,861136$ $\pm 0,339981$	$0,347855$ $0,652145$	$\dfrac{f^{(8)}(c)}{3472875}$
5	$\pm 0,9061798$ $\pm 0,538469$ 0	$0,236927$ $0,478629$ $0,568889$	$\dfrac{f^{(10)}(c)}{1237732650}$

6.4.8. Метод Монте-Карло

Жорж Луи Бюффон

$$p = \int_0^{\pi}\int_0^{l} \frac{1}{r\cdot\pi}\, dA\, d\theta$$

$$p = \frac{2\cdot L}{r\cdot\pi} \qquad r > L$$



Николас Константин Метрополис,
Станислав Мартин Улам –
– авторы статьи
«Метод Монте-Карло» (1950 г.)

6.4.8. Метод Монте-Карло

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

u – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[a;\, b]$

$$M[f(u)] = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)dx$$

$\varphi(x)$ – плотность распределения случайная величины u

$$\varphi(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$M[f(u)] = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot M[f(u)]$$

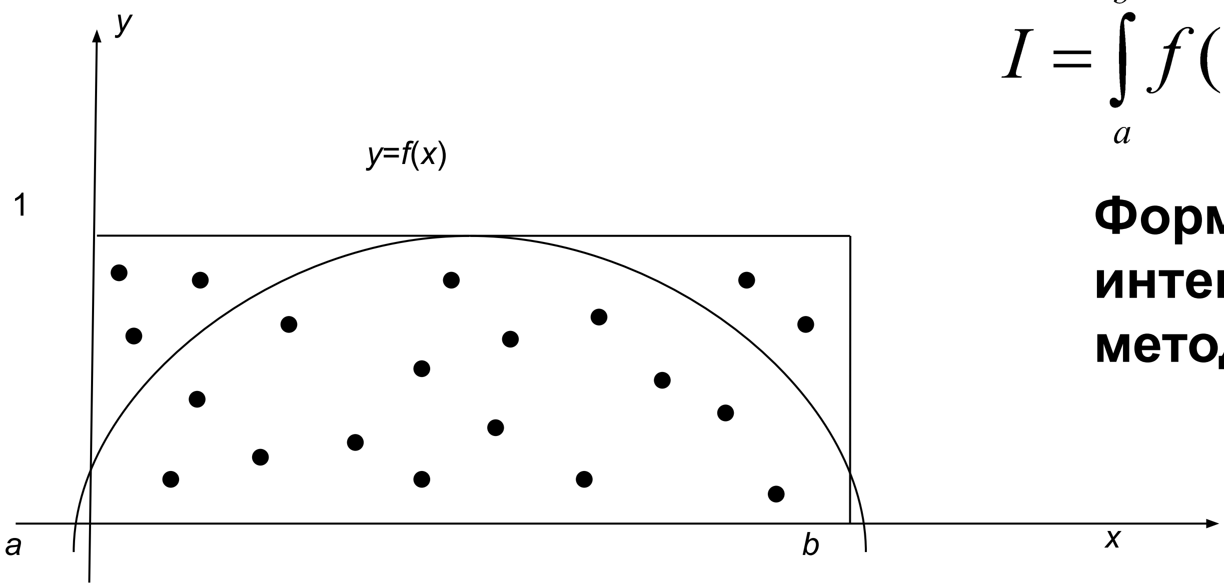
6.4.8. Метод Монте-Карло

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot M[f(u)]$$

Формула вычисления интеграла простейшим методом Монте-Карло

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} f(u_i)$$

Геометрический метод Монте-Карло



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Формула вычисления интеграла геометрическим методом Монте-Карло

$$S = S_{ПР} \cdot \frac{M}{N}$$

$$S = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

$$S_{ПР} = \pi$$

$$\pi = \frac{2 \cdot N}{M}$$

Достоинства метода Монте-Карло:

• простую структуру вычислительного алгоритма;

• вычисления значения интеграла можно прекратить в любой момент;

• погрешность вычислений не реагирует на размерность задачи;

• при вычислении многомерных интегралов метод Монте-Карло остается единственным, способным выдать приближенное значение за конечное время.

Недостатки метода Монте-Карло:

• при вычислении одномерных интегралов сходимость метода уступает регулярным методам;

• для уменьшения погрешности на порядок, необходимо увеличить количество испытаний на два порядка.

$$E \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Простейший метод всегда точнее геометрического.