Числовые последовательности

Числовая последовательность

- **Рассмотрим ряд натуральных чисел N:**
- **1, 2, 3, …, n – 1, n, п + 1, …**
- **Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ или $\{y_n\}$.**

- **Величина y_n называется общим членом последовательности.**

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой yn = f(n), позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n; эта формула называется формулой общего члена.

Способы задания последовательностей

- **Перечислением членов последовательности (словесно).**

Последовательность простых чисел:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; …

- **Заданием аналитической формулы.**

Арифметическая прогрессия:

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

- **Заданием рекуррентной формулы.**

Геометрическая прогрессия:

$b_{n+1} = b_n \cdot q$

Числовая последовательность задана формулой

$a_n = 2n+3$

заполните таблицу

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

Числовая последовательность задана формулой

$a_n = n(n-2)$

заполните таблицу

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

Числовая последовательность задана рекуррентной формулой

$a_{n+1} = 4a_n - 1$

заполните таблицу

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 8, 27, 64, 125, … – ряд кубов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... – ряд вида 1/n, где $n \in N$;

и т.д.

Еще одна последовательность

- Дана вот такая нехитрая последовательность чисел:
  4, 3, 3, 5, 4, 4, 3, 5...
  Какое следующее число в этом ряду и по какому принципу расположены числа?

- **Ответ:** Запишем числа, начиная с нуля, на английском языке:
  zero 4
  one 3
  two 3
  three 5
  four 4
  five 4
  six 3
  seven 5
  Количество букв в этих словах и образует данную последовательность.
  Следующее число 5 (eight)

Нижний ряд

- Какое число должно стоять вместо вопросительного знака? По какому принципу расположены числа в нижнем ряду?
  4 5 6 7 8 9
  61 52 63 94 46 ?

- **Ответ:** 18. Числа нижнего ряда являются квадратами чисел верхнего ряда с переставленными цифрами.

Детская задачка

- Если 736 - 1
  308 - 3
  144 - 0
  240 - 1
  835 - 2,
  то что тогда 688 - ?

- **Ответ:** 5. Считаем число колечек в цифрах:
  736 - 1 колечко: 6
  308 - 3 колечка: 08
  144 - 0 колечек
  240 - 1 колечко: 0
  835 - 2 колечка: 8
  ...
  688 - 5 колечек: 688

Задача для первоклассников

- При поступлении в школу детям дают задачку:
- КОРОВА - 2
  ОВЦА - 2
  СВИНЬЯ - 3
  СОБАКА - 3
  КОШКА - 3
  УТКА - 3
  КУКУШКА - 4
  ЛОШАДЬ - 5
  ПЕТУХ - 8
- Что тогда ОСЛИК?

- **Ответ:** 2. Посчитайте количество букв в звуках, издаваемых животными

Проверить закономерность

- Посмотрите на таблицу:
 1 = 12
 1 + 3 = 4 = 22
 1 + 3 + 5 = 9 = 32
 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 42

 Может быть, эта закономерность (сумма подряд стоящих нечетных чисел начиная с единицы равна квадрату их числа) сохраняется и дальше? Как это проверить?

- **Ответ:** Нам нужно найти сумму всех нечетных чисел от 1 до 2n-1 и убедиться, что она равна n2. Это можно сделать разными способами. Мы предпочли геометрический. Возьмем квадрат из n2 клеток и закрасим клетки так, как это сделано на рисунке для n = 6. Квадрат при этом распадается на чередующиеся по цвету участки. Сосчитаем количество клеток в них, начиная с левого верхнего угла. Первый участок состоит из одной клетки, второй - из трех клеток, третий - из пяти и т. д., последний n-й участок состоит из 2n-1 клеток. Следовательно, число клеток в квадрате равно

 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n-1

 Это убеждает нас, что нужное равенство выполнено всегда.

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной сверху, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна сверху, если существует число М такое, что для любого п выполняется неравенство

$$y_n \leq M$$

Число М называют верхней границей последовательности.

Пример: $-1, -4, -9, -16, \ldots, -n^2, \ldots$ - ограничена сверху 0.

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна снизу, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \geq m$$

Число m называют нижней границей последовательности.

Пример: 1, 4, 9, 16, …, n^2, … - ограничена снизу 1.

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют ограниченной последовательностью.

Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют возрастающей последовательностью, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots$$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, 2п-1, … - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$$

Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2п–1), … - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют монотонными