

В.Б. Тарасов

МГТУ им. Н.Э.Баумана,

**Кафедра «Компьютерные системы автоматизации
производства»**

e-mail: tarasov@rk9.bmstu.ru

**ЛЕКЦИЯ 4. СИСТЕМЫ МОДАЛЬНОСТЕЙ И
НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕРЫ В
ИСКУССТВЕННОМ ИНТЕЛЛЕКТЕ**

ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА АГЕНТА: ЕДИНСТВО ОПИСАНИЙ И ПРЕДПИСАНИЙ

Функционирование любого агента опирается как на *описания*, так и на *предписания*. Описания содержат информацию о состояниях среды, воспринимаемых агентом, а предписания – о возможных действиях агента на эту среду.



Истинность: соответствие между объектом и его описанием (**первичен объект**)

Полезность: соответствие между предписанием и его объектом (**первично предписание**)

СИСТЕМЫ МОДАЛЬНОСТЕЙ: ЕДИНЫЙ ПОДХОД К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ СИСТЕМ МОДАЛЬНОСТЕЙ НА БАЗЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИК

ВИДЫ МОДАЛЬНОСТЕЙ	Сильная положительная SPM	Слабая положительная WPM	Слабая отрицательная WNM	Сильная отрицательная SNM
Алетические: ОНТОЛОГИИ	Необходимость N	Возможность M	Случайность Q	Невозможность Y
Доксастические: мнения	Уверенность BEL	Предположение HYP	Сомнение DBT	Отвержение DEN
Эпистемические: знания	Верификация	Подтверждение	Неразрешимость	Фальсификация
Деонтические: нормы	Обязанность O	Разрешение P	Безразличие B	Запрещение Z
Эротетические: вопросы	Корректность C	Амбивалентность A ³	Нерелевантность IR	Некорректность NC

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ НОРМЫ

Нормы – это социальные запреты и ограничения, накладываемые сообществом (организацией) на отдельного агента.

С одной стороны, нормы есть частный случай оценок: их можно рассматривать как общественно апробированные и закреплённые оценки.

Средством, превращающим оценку в норму, является угроза наказания, т.е. стандартизация норм осуществляется с помощью санкций.

Ещё К.Менгер установил прямую связь между предписанием и санкцией: **• p («обязательно p ») и «если не p , то наказание или ухудшение».**

С другой стороны, формирование норм предполагает согласование мнений по этим нормам

РОЛЬ ОБРАЗЦОВ, ОЦЕНОК, НОРМ В ТЕОРИИ АГЕНТОВ

У агентов прагматические суждения оценочного характера опираются на **стандарты, образцы, эталоны** и т.п.

При этом **образец** принципиально отличается от **примера**.

Пример говорит о том, что имеет место в действительности, а *образец* – о том, что должно быть.

Примеры используются для поддержки описательных высказываний, а ссылки на образцы служат обоснованием предписаний и требований.

Легко понять, что в теории агентов центральное место занимает именно формализация **предписаний, оценок, норм**.

Реализация агентом нормативного поведения предполагает наличие, по крайней мере, двух элементов:

нормы, обязательной для выполнения в данной ситуации, и **оценки степени выполнения** ее предписаний.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ НОРМЫ

Норму как предписание к действию можно выразить четверкой

$$NR = \langle A, act, M_4, W \rangle,$$

где A – множество агентов, которым адресована норма;
 $act \in ACT$ – действие, являющееся объектом нормативной регуляции (содержание нормы);

W – множество миров, в которых применима норма (условия приложения, обстоятельства, в которых должно или не должно выполняться действие);

$M_4 = \{O, P, B, Z\}$ – множество базовых модальностей, связанных с действием act : здесь O – «обязательно»,
 P – «разрешено», B – «безразлично» (необязательно),
 Z – «запрещено».

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ

Основными характеристиками любого множества являются его границы и мера.

Понятие *меры* есть одно из важнейших математических понятий, как, впрочем, и понятие интеграла, соответствующего данной мере. Оно является естественным обобщением понятия длины отрезка, площади плоской фигуры, объема пространственной фигуры. Классические меры удовлетворяют условию **аддитивности**.

Пусть A и B – некоторые события, а X – полное множество событий.

Мерой называется функция множества

$$m: 2^X \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{R}^+ = [0, \infty),$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\forall A \in 2^X, A \subseteq X \Rightarrow m(A) \geq 0$;
- 2) $m(\emptyset) = 0$;
- 3) $\forall A, B \in 2^X, m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МЕРА И МЕРА ДИРАКА

Наиболее известным случаем классической меры является *нормальная мера* или *вероятностная мера* А.Н.Колмогорова

$$P: 2^X \rightarrow [0,1],$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $P(\emptyset) = 0, P(X) = 1$ (ограниченность)
- 2) $\forall A, B \in 2^X, A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (монотонность)
- 3) $\forall A, B \in 2^X, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (аддитивность)

В общем случае, берется σ -алгебра множеств, $\sigma \subseteq 2^X$ и аксиома аддитивности записывается в форме $\forall A_i \in \sigma, \bigcap A_i = \emptyset \Rightarrow P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$.

С вероятностной мерой связана статистика средних значений.

Пусть x_0 есть заданный элемент в X . Частным случаем вероятностной меры является примитивный класс мер Дирака m_D , определяемый соотношением:

$$\forall A \in 2^X,$$

$$m_D(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in A \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мера Дирака есть частный случай вероятностной меры, соответствующий детерминированной сингулярной информации (мера полной уверенности).



Академик Андрей
Николаевич
Колмогоров
(1903-1987)

КРИТИКА АКСИОМЫ АДДИТИВНОСТИ

Требование аддитивности меры является слишком жестким и ограничительным для многих практических задач информатики, в частности, для процедур экспертного оценивания и формирования мнений.

Существует гипотеза о том, что неаддитивность есть одно из фундаментальных отличий процедур оценивания от процедур измерения.

Тогда в качестве базы для оценивания предлагается пространство с предмерой $\Gamma = (X, \sigma, \mu)$, где предмера μ удовлетворяет лишь условиям ограниченности и монотонности

Таким образом, произвольная **псевдомера**, называемая также **неклассической (неаддитивной) мерой**, строится как однопараметрическое расширение обычной меры путем замены стандартной аксиомы аддитивности каким-либо более общим условием.

МЕРЫ СУГЕНО

Мерой Сугено называется функция множества

$$g: 2^X \rightarrow [0,1],$$

для которой выполняются следующие условия

1) $g(\emptyset) = 0, g(X) = 1$ (ограниченность)

2) $\forall A, B \in 2^X, A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$ (монотонность)

3°) $\forall A, B \in 2^X, A \cap B = \emptyset \Rightarrow g(A \cup B) = g(A) + g(B) + \lambda g(A)g(B)$ (λ -правило)
 $-1 \leq \lambda < \infty$.

4) $\forall A_n \in 2^X, n=1,2,\dots$ если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, или $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, то
 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$ (непрерывность)

В общем случае λ -правило записывается в виде

$$g_\lambda(\cup A_i) = \sum g(A_i) + \lambda \prod g(A_i), \quad -1 \leq \lambda < \infty.$$

Это правило получается из уравнения $\lambda + 1 = \prod(1 + \lambda_i)$.

В результате при $\lambda > 0$ получаем семейство субаддитивных мер:

$$\forall A, B \in 2^X, g_\lambda(A \cup B) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B),$$

а при $-1 \leq \lambda < 0$ – семейство супераддитивных (синергетических) мер

$$\forall A, B \in 2^X, g_\lambda(A \cup B) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B).$$

При $\lambda = 0$ мера Сугено превращается в обычную аддитивную (вероятностную) меру.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СВИДЕТЕЛЬСТВ: МЕРЫ ДОВЕРИЯ И ПРАВДОПОДОБИЯ

Одними из первых ученых, предложивших применять неклассические меры (псевдомеры) в интересах описания экспертных суждений (свидетельств), стали А.Демпстер и Дж. Шейфер.

Так Демпстер ввел функции верхних и нижних вероятностей, индуцируемых многозначными отображениями.

В свою очередь, Шейфер построил теорию свидетельств на основе двух классов монотонных неаддитивных мер – мер доверия и мер правдоподобия.

Мерой доверия называется монотонная функция множества

$$b: 2^X \rightarrow [0,1],$$

удовлетворяющая следующим условиям:

(а) $b(\emptyset) = 0$, $b(X) = 1$

(б) $\forall A, B \in 2^X$, $b(A \cup B) \geq b(A) + b(B)$.

Здесь условие (б) определяет свойство *супераддитивности*.

Пусть A' есть дополнение A . Из определения меры доверия вытекает ее важное свойство $b(A) + b(A') \leq 1$ (субкомплементарность).

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СВИДЕТЕЛЬСТВ: МЕРЫ ДОВЕРИЯ И ПРАВДОПОДОБИЯ (продолжение)

Если задана мера доверия, то двойственную к ней меру правдоподобия можно определить следующим образом

$$PI(A) = 1 - b(A), \quad \forall A \in 2^X$$

Монотонная мера правдоподобия PI удовлетворяет следующим аксиомам:

(а) $PI(\emptyset) = 0, PI(X) = 1$

(б') $\forall A, B \in 2^X, PI(A \cup B) \leq PI(A) + PI(B)$.

Аксиома (б') определяет условие *субаддитивности*.

Для меры PI выполняется также условие *суперкомплементарности*

$$PI(A) + PI(A') \geq 1.$$

Пусть \wp - множество высказываний. Введем функцию $m_p: \wp \rightarrow [0, 1]$, причем:

1) $m_p(\emptyset) = 0$; 2) $\sum_{p \in \wp} m_p(p) = 1$.

Тогда для любых высказываний $p, q \in \wp$ по Шейферу получаем

$$v(q) = b(q) = \sum_{p \text{ влечет за собой } q} m_p(p).$$

Аналогично имеем

$$PI(q) = \sum_{p \text{ не влечет за собой } q} m_p(p)$$

Легко определить также меру недоверия $nb(A) = 1 - b(A)$ и меру отвержения (неправдоподобности) $nPI(A) = 1 - PI(A)$.

МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ

Из аксиомы монотонности для любой предмеры непосредственно вытекают два важных неравенства, характеризующие два фундаментальных класса псевдомер

- $g(A \cup B) \geq \max \{g(A), g(B)\}$
- $g(A \cap B) \leq \min \{g(A), g(B)\}$.

Тогда в граничных случаях определяются **мера возможности** Π Л.Заде как **минимальная мера правдоподобия** и **мера необходимости** N Дюбуа-Прада как **максимальная мера доверия**.

Мера возможности есть функция множества

$$\Pi: 2^X \rightarrow [0,1],$$

для которой справедливы условия:

1. $\Pi(\emptyset) = 0, \Pi(X) = 1$ (ограниченность)
2. $\forall A, B \in 2^X, A \subseteq B \Rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$ (монотонность)
3. $\forall A, B \in 2^X, \Pi(A \cup B) = \max \{\Pi(A), \Pi(B)\}$ («либо-либо»-условие)

Меру Π можно задать на множестве высказываний \wp . Пусть $p, q \in \wp$.

Тогда условие $\Pi(p \vee q) = \max\{\Pi(p), \Pi(q)\}$ можно интерпретировать следующим образом: истинность дизъюнкции двух суждений определяется возможностью появления хотя бы одного из них.

В свою очередь, **нечеткое множество** может пониматься как функция (плотность) распределения возможности

$$\pi: X \rightarrow [0,1]$$

удовлетворяющая условию нормировки $\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) = 1$.



МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ (продолжение)

Мера необходимости есть функция множества

$$N: 2^X \rightarrow [0, 1],$$

для которой выполняются требования:

1. $N(\emptyset) = 0, N(X) = 1$ (ограниченность)
2. $\forall A, B \in 2^X, A \subseteq B \Rightarrow N(A) \leq N(B)$ (монотонность)
- 3*. $\forall A, B \in 2^X, N(A \cap B) = \min \{N(A), N(B)\}$ («и-и» условие).

Если определить меру N на множестве высказываний \mathfrak{A} , то условие $N(p \wedge q) = \min \{N(p), N(q)\}$ означает, что истинность конъюнкции двух суждений определяется необходимостью их одновременного выполнения.

Для мер необходимости и возможности справедливо равенство

$$N(A) = 1 - \Pi(A'), \quad \forall A \in 2^X$$

Это условие можно записать и в более общей форме

$$N(A) = n(\Pi(A')),$$

где n – некоторая функция отрицания.

Меру необходимости также можно определить по функции распределения возможности

$$N(A) = \inf_{x \in A} (1 - \pi(x))$$



МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ В НЕТРАДИЦИОННЫХ СЕМАНТИКАХ

Модализация истинностных значений (в стиле Н.Решера) на основе квазимер (неаддитивных мер) - мер возможности Заде Π и мер необходимости Дюбуа-Прада N , приводящая к нарушению принципа дополнительности, связана с формированием

ВОЗМОЖНОСТНЫХ СЕМАНТИК

$$2 \geq T(p) + F(p) \geq 1$$

и

НЕОБХОДИМОСТНЫХ СЕМАНТИК

$$T(p) + F(p) \leq 1.$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРОЯТНОСТЬЮ, ВОЗМОЖНОСТЬЮ И НЕОБХОДИМОСТЬЮ

Основное соотношение между возможностью и необходимостью записывается в виде:

$$П(A) \geq P(A) \geq N(A)$$

В отличие от выполняемого для вероятностной меры закона $P(A) + P(A') = 1$, $\forall A \in 2^X$, для меры возможности имеем условие

$$П(A) + П(A') \geq 1, \forall A \in 2^X,$$

а для меры необходимости выполняется

$$N(A) + N(A') \leq 1, \forall A \in 2^X$$

Кроме того, из $П(A) < 1$ следует $N(A) = 0$ (неполная возможность события A приводит к абсолютной неуверенности), а из $N(A) > 0$ вытекает $П(A) = 1$ (наличие некоторой уверенности в A означает его абсолютную возможность).

В свою очередь, такие понятия как невозможность $nП$ и проблематичность (ненеобходимость, случайность) nN легко описать с помощью обычного оператора отрицания на основе мер возможности и необходимости соответственно:

$$\begin{aligned} nП(A) &= 1 - П(A), \forall A \in 2^X \\ nN(A) &= 1 - N(A), \forall A \in 2^X \end{aligned}$$

КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕЧЕТКОСТИ

Идея построения сравнительных оценок возможности восходит к работам Д.Льюиса, который интерпретировал возможность как отношение сходства. Затем Дюбуа и Прад показали, что мера возможности индуцирует отношение \geq_{Π} между событиями: $A \geq_{\Pi} B$ тогда и только тогда, когда $\Pi(A) \geq \Pi(B)$. Здесь $A \geq_{\Pi} B$ означает, что возможность события A , по крайней мере, не меньше возможности события B .

Отношение \geq_{Π} обладает следующими свойствами:

- а) $T \geq_{\Pi} F$, где T и F – истина и ложь соответственно;
- б) $A \geq_{\Pi} B$ или $A \leq_{\Pi} B$ (сравнимость);
- в) $A \geq_{\Pi} B, B \geq_{\Pi} C \Rightarrow A \geq_{\Pi} C$ (транзитивность);
- г) если $B \geq_{\Pi} C$, то для любого A имеем $A \cup B \geq_{\Pi} A \cup C$.

В свою очередь, Трильяс и Альсина обобщили идею сравнительных оценок для произвольных неклассических мер, введя (рефлексивное и транзитивное) отношение предпорядка \geq_g . Здесь $A \geq_g B$ означает, что множество A обладает неким свойством в степени, не меньшей, чем множество B .

Отношение предпорядка по включению множеств позволяет с единых позиций описать не только расширения классических мер, определенные на 2^X , но и функции нечетких множеств, заданные на $[0, 1]^X$.

МЕРЫ НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ

Различные меры на нечетких множествах можно определить, вводя разные отношения порядка (или предпорядка) на интервале $[0, 1]$.

Здесь классическое отношение порядка (порядок вложенности нечетких множеств) задается в виде:

$$\mu \leq \nu \Leftrightarrow \mu(x) \leq \nu(x), \quad \forall x \in X.$$

Рассмотрим максимально нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu(x) = 0.5$. Тогда новое отношение порядка \leq' , называемое «порядком заострения», можно задать следующим образом:

$$\mu \leq' \nu \Leftrightarrow \mu(x) \leq' \nu(x), \quad \forall x \in X,$$

где $\mu(x) \leq' \nu(x)$ тогда и только тогда, когда $\mu(x) \leq \nu(x)$ при $\mu(x) \leq 0.5$ и $\mu(x) \geq \nu(x)$ при $\mu(x) \geq 0.5$.

Отношениям порядка \leq и \leq' ставятся в соответствие два класса мер – **меры энергии** и **меры энтропии** нечетких множеств соответственно.

Пусть высказывание $p \in \mathcal{P}$. Как известно, противоречие в классической логике записывается в форме $p \wedge \neg p$. В обобщенном виде его можно выразить формулой $p T n(p)$, где T -треугольная норма, отвечающая лингвистической связке «И», а n – унарная операция отрицания в функционально-аксиоматической форме.

Введем отношение предпорядка, индицируемое отрицанием n , т.е. рефлексивное и транзитивное отношение \leq_n на $[0, 1]$

$$p \leq_n q \Leftrightarrow p T n(p) \leq q T n(q)$$

и будем рассматривать предупорядоченное множество $[0, 1]_n$.

Для наибольшей треугольной нормы $T = \min$ имеем $p \leq_n q \Leftrightarrow \min\{p, n(p)\} \leq \min\{q, n(q)\}$.

МЕРЫ ЭНЕРГИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ (ПОКАЗАТЕЛИ СИЛЫ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ)

Пусть X – базовое множество, на котором определено нечеткое множество $\mu: X \rightarrow [0,1]$, а $[0,1]^X = \{\mu \mid \mu: X \rightarrow [0,1]\}$ – множество всех нечетких подмножеств.

Обозначим через \mathbb{R}^+ множество всех неотрицательных действительных чисел \mathbb{R}^+ .

Мерой энергии нечеткого множества называется функция

$$e: [0,1]^X \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

удовлетворяющая следующим аксиомам:

- e1) $e(\mu)=0$ тогда и только тогда, когда $\mu(x)=0$ для всех x из X ;
- e2) $e(\mu)$ принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда $\mu(x)=1$ для всех x из X ;
- e3) $\forall \mu, \nu \in [0,1]^X, \mu(x) \leq \nu(x) \Rightarrow e(\mu) \leq e(\nu)$.

Примеры. 1. Мощность нечеткого множества μ $P(\mu) = \sum_i \mu(x_i)$

2. Информационная энергия нечеткого множества μ $IE(\mu) = \sum_i w_i \mu(x_i)$

МЕРЫ ЭНТРОПИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Пусть X – базовое множество, на котором определено нечеткое множество $\mu: X \rightarrow [0, 1]$, а $[0, 1]^X = \{\mu \mid \mu: X \rightarrow [0, 1]\}$ – множество нечетких подмножеств.

Мера энтропии определяется в виде функции

$$h: [0, 1]^X \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

удовлетворяющей следующим условиям:

h1) $h(\mu) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(x) = f(x) \in \{0, 1\}$, т.е. когда f – классическая характеристическая функция множества;

h2) $h(\mu) = h_{\max}$ тогда и только тогда, когда $\mu(x) = 0.5$ для всех $x \in X$;

h3) $\forall \mu, \nu \in [0, 1]^X, \mu(x) \leq \nu(x) \Rightarrow h(\mu) \leq h(\nu)$.

Примеры. 1. $h_0(\mu) = \sum_i \mu(x_i) (1 - \mu(x_i))$. 2. $h_{SH}(\mu) = \sum_i [\mu(x_i) \ln \mu(x_i) + (1 - \mu(x_i)) \ln (1 - \mu(x_i))]$

Известны и другие определения энтропии, в частности,

А) Энтропии по А.Кофману, как нормализованного расстояния до предельно нечеткого распределения $\mu(x) = 0.5, \forall x \in X$;

В) Энтропии как расстояния между нечетким множеством и его дополнением.

Согласно И.З.Батыршину, мера энтропии на алгебре может пониматься как мера ее небулевости.

В общем случае энтропию можно определить через отношение предпорядка \leq_n как функцию

$$h(\mu) = k \mathbf{S} \left\{ T(\mu(x), n(\mu(x))) \right\}_{x \in X},$$

где T и S – треугольная норма и конорма соответственно, n – операция отрицания, а k – константа (коэффициент нормализации).

МЕРЫ СПЕЦИФИЧНОСТИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Меры специфичности (неспецифичности) нечетких множеств тесно связаны с понятием гранулярности и показывают степень точности задания нечеткого множества

Пусть X – базовое множество, а $[0,1]^X = \{\mu \mid \mu: X \rightarrow [0,1]\}$ – множество всех нечетких подмножеств, определенных на X .

Мера специфичности по Р.Ягеру [15] есть нормализованная функция нечеткого множества .

$$sp: [0,1]^X \rightarrow [0,1],$$

такая что

sp1) $sp(\mu) = 1$ тогда и только тогда, когда μ есть одноточечное множество, $\mu = \{x_i\}$;

sp2) $sp(\mu) = 0$, если μ – пустое множество;

sp3) $\forall \mu, \nu \in [0,1]^X, \mu(x) \leq \nu(x) \Rightarrow sp(\mu) \leq sp(\nu)$.

ФОРМИРОВАНИЕ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛОГИКО-ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ СВЯЗОК: ФУНКЦИОНАЛЬНО-АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В современной теории нечетких множеств логико-лингвистические связки «И» и «ИЛИ» определяются в виде **треугольных норм** и **конорм**, т.е. двухместных действительных функций, задаваемых на интервале $[0, 1]$.

Треугольные нормы и конормы были введены в 1951 г. **К.Менгером** (Menger, 1951) в области **стохастической геометрии**, а именно с целью расширения неравенства треугольника в определении метрического пространства на случай вероятностных метрических пространств.

Они были подробно изучены Б.Швейцером и А.Скларом (см. [Schweizer and Sklar, 1960, 1963 и 1983]).

ТРЕУГОЛЬНЫЕ НОРМЫ И КОНОРМЫ В ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В теорию нечетких множеств **треугольные нормы** и **конормы** ввели **К.Альсина, Э.Трильяс и Л.Вальверде** (см. [Alsina et al., 1980 и 1983; Трильяс и др., 1986] в интересах развития концепции **плюрализма операций** над нечеткими множествами и построения единого **функционально-аксиоматического подхода** к определению операций **пересечения** и **объединения** нечетких множеств.

Треугольные нормы и **конормы** были подробно исследованы и использованы с целью **упорядочения по силе** различных видов **пересечения** и **объединения** нечетких множеств, а также в рамках построения **новых обобщенных параметризованных нечетких операторов** (семейства операторов Гамахера, Сугено, Ягера, Домби, Франка и др.). Появились меры неопределенности на базе **треугольных норм** и **конорм**, меры противоречивости и пр.

См. работы [Dubois and Prade, 1980 и 1982; Klement, 1982; Weber, 1983; Yager, 1980].

Понятие **треугольных полунорм** и **полуконом** предложили Suarez Garcia и Gil Alvarez [Suarez Garcia и Gil Alvarez, 1986].

Обобщение исходных понятий **треугольных норм** и **конорм** на случай **ограниченных упорядоченных множеств** предложено в работе [De Cooman and Kerre, 1994].

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ПОЛУНОРМЫ И ПОЛУКОНОРМЫ

Пусть L – решетка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1 .

Бинарная операция

$$T: L \times L \rightarrow L$$

$$S: L \times L \rightarrow L,$$

называется

треугольной полунормой, **треугольной полуконормой,**

если удовлетворяются следующие условия:

□ **ограниченность**

$$1) \quad T(0, 0) = 0, \quad T(x, 1) = T(1, x) = x, \quad 1') \quad S(1, 1) = 1, \quad S(x, 0) = S(0, x) = x, \\ \forall x \in L;$$

□ **монотонность**

$$2) \quad x \leq u, \quad y \leq v \Rightarrow T(x, y) \leq T(u, v), \quad 2') \quad x \leq u, \quad y \leq v \Rightarrow S(x, y) \leq S(u, v), \\ \forall x, y, u, v \in L.$$

ТРЕУГОЛЬНЫЕ НОРМЫ И КОНОРМЫ

Бинарная операция

$$T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

называется

треугольной нормой,

треугольной конормой,

если удовлетворяются следующие условия:

□ **ограниченность**

$$1) T(0, 0) = 0, T(x, 1) = T(1, x) = x, \quad 1') S(1, 1) = 1, S(x, 0) = S(0, x) = x, \\ \forall x \in [0,1];$$

□ **монотонность**

$$2) x \leq u, y \leq v \Rightarrow T(x, y) \leq T(u, v), \quad 2') x \leq u, y \leq v \Rightarrow S(x, y) \leq S(u, v), \\ \forall x, y, u, v \in [0,1];$$

□ **коммутативность**

$$3) T(x, y) = T(y, x), \quad 3') S(x, y) = S(y, x), \\ \forall x, y \in [0,1];$$

□ **ассоциативность**

$$4) T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z)), \quad 4') S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z)), \\ \forall x, y, z \in [0,1]$$

ПРИМЕРЫ ТРЕУГОЛЬНЫХ НОРМ И КОНОРМ

Треугольные нормы T	Треугольные конормы S
Каноническая (максимальная) треугольная норма $T_0(x,y) = \min\{x,y\}, \forall x,y \in L$	Каноническая (минимальная) треугольная конорма $S_0(x,y) = \max\{x,y\}, \forall x,y \in L$
Вероятностная треугольная норма $T_{pr}(x,y) = x \cdot y, \forall x,y \in L$	Вероятностная треугольная конорма $S_{pr}(x,y) = x + y - x \cdot y, \forall x,y \in L$
Треугольная норма Лукасевича (ограниченное произведение) $T_b(x,y) = \max\{0, x+y-1\}, \forall x,y \in L$	Треугольная конорма Лукасевича (ограниченная сумма) $S_b(x,y) = \min\{1, x+y\}, \forall x,y \in L$

ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЕ ТРЕУГОЛЬНЫЕ НОРМЫ И ОТРИЦАНИЯ

Примеры. **1. Семейство треугольных норм Гамахера T_H**

$$T_H(x,y) = x y / [\gamma + (1 - \gamma)(x+y - xy)], \quad 0 \leq \gamma < \infty$$

При $\gamma=1$ имеем $T_p(x,y)$.

2. Семейство треугольных норм Сугено T_S

$$T_S(x,y) = \max [0, x + y - 1 - \lambda(1-x)(1-y)], \quad -1 \leq \lambda < \infty$$

При $\lambda=0$ имеем $T_b(x,y)$.

3. Семейство треугольных норм Ягера T_Y

$$T_Y(x,y) = 1 - \min [1, (1-x)^q + (1-y)^q]^{1/q}, \quad 0 \leq q < \infty$$

При $q \rightarrow \infty$ имеем $T_z(x,y)$

УНИНОРМЫ

Унинормы в интервале $[0,1]$ были предложены **Р.Ягером** и **В.Рыбаловым** [Yager and Rybalov, 1996] и исследованы в работах **Я.Фодора, С.-К.Ху** и **З.-Ф.Ли**, **М.Маэс**. Структура унинорм подробно описана в [Fodor et al., 1997; Yager, 2001].

В общем случае **нейтральный элемент** e может отличаться от нуля или единицы. При $e = 0$ унинорма превращается в **t-норму**, а при $e = 1$ она становится **t-конормой**.

Унинормы ведут себя **поочередно** как **операции конъюнкции** и **дизъюнкции** в различных зонах области $[0, 1]^2$. Для n -арной операции берется область $[0, 1]^n$ или даже произвольный **гиперкуб** $[a,b]^n$. Тогда многие операции, применяемые в экспертных системах, оказываются унинормами (в частности, операции, использованные в системах MYCIN и PROSPECTOR, являются унинормами, например $x \oplus y = xy / [xy + (1-x)(1-y)]$).

Важный класс унинорм, называемый **представимыми унинормами**, обладает аддитивными генераторами: $g: [0,1] \rightarrow [-\infty, +\infty]$, $g(e) = 0$, $g(0) = -\infty$, $g(1) = +\infty$. При этом унинорма определяется выражением

$$f(x, y) = g^{-1}(g(x)+g(y))$$

УНИНОРМЫ

Обобщения t-норм и t-конорм – **униноормы** U .

Пусть L – решетка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1 .

Бинарная операция

$$U: L \times L \rightarrow L$$

называется **униноормой**, если выполняются следующие условия:

- **наличие нейтрального элемента**
 $e \in L$, такого, что $U(x, e) = U(e, x) = x, \forall x \in L$;
- **монотонность**
 $x \leq u, y \leq v \Rightarrow U(x, y) \leq U(u, v), \forall x, y, u, v \in L$;
- **коммутативность**
 $U(x, y) = U(y, x), \forall x, y \in L$;
- **ассоциативность**
 $U(U(x, y), z) = U(x, U(y, z)), \forall x, y, z \in L$.