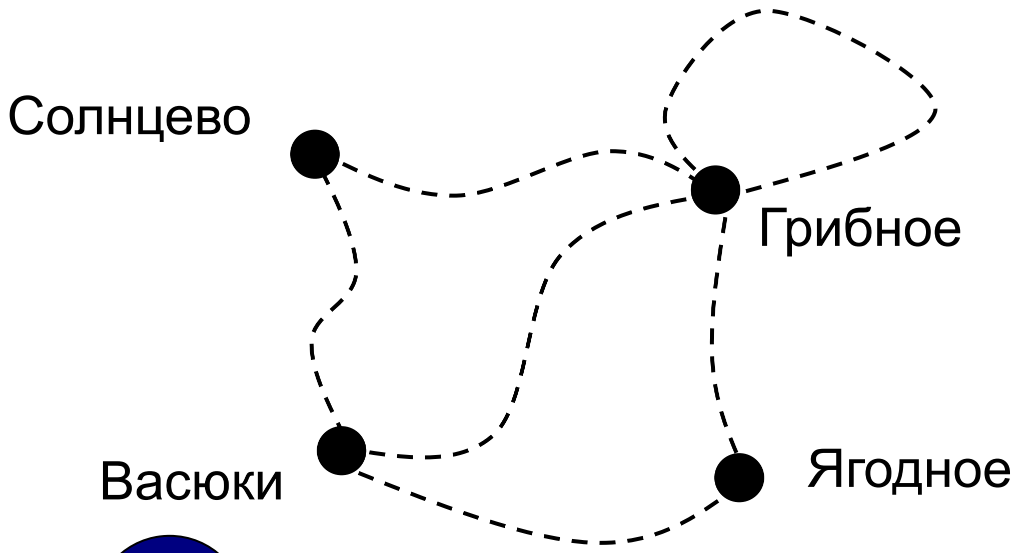
Графы

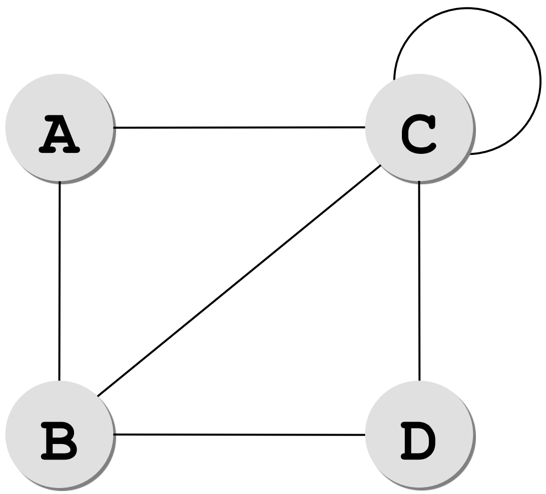
Графы

«От посёлка Васюки три дороги идут в посёлки Солнцево, Грибное и Ягодное. Между Солнцевым и Грибным и между Грибным и Ягодным также есть дороги. Кроме того, есть дорога, которая идет из Грибного в лес и возвращается обратно в Грибное».

? Как структурировать?

Графы





!

Граф – это конечная совокупность вершин и связей между ними (рёбер).

Мультиграф – граф в котором пара вершин соединена несколькими рёбрами

Граф (англ. *graph*) — совокупность непустого множества вершин и наборов пар вершин (связей между вершинами); основной объект изучения математической теории графов.

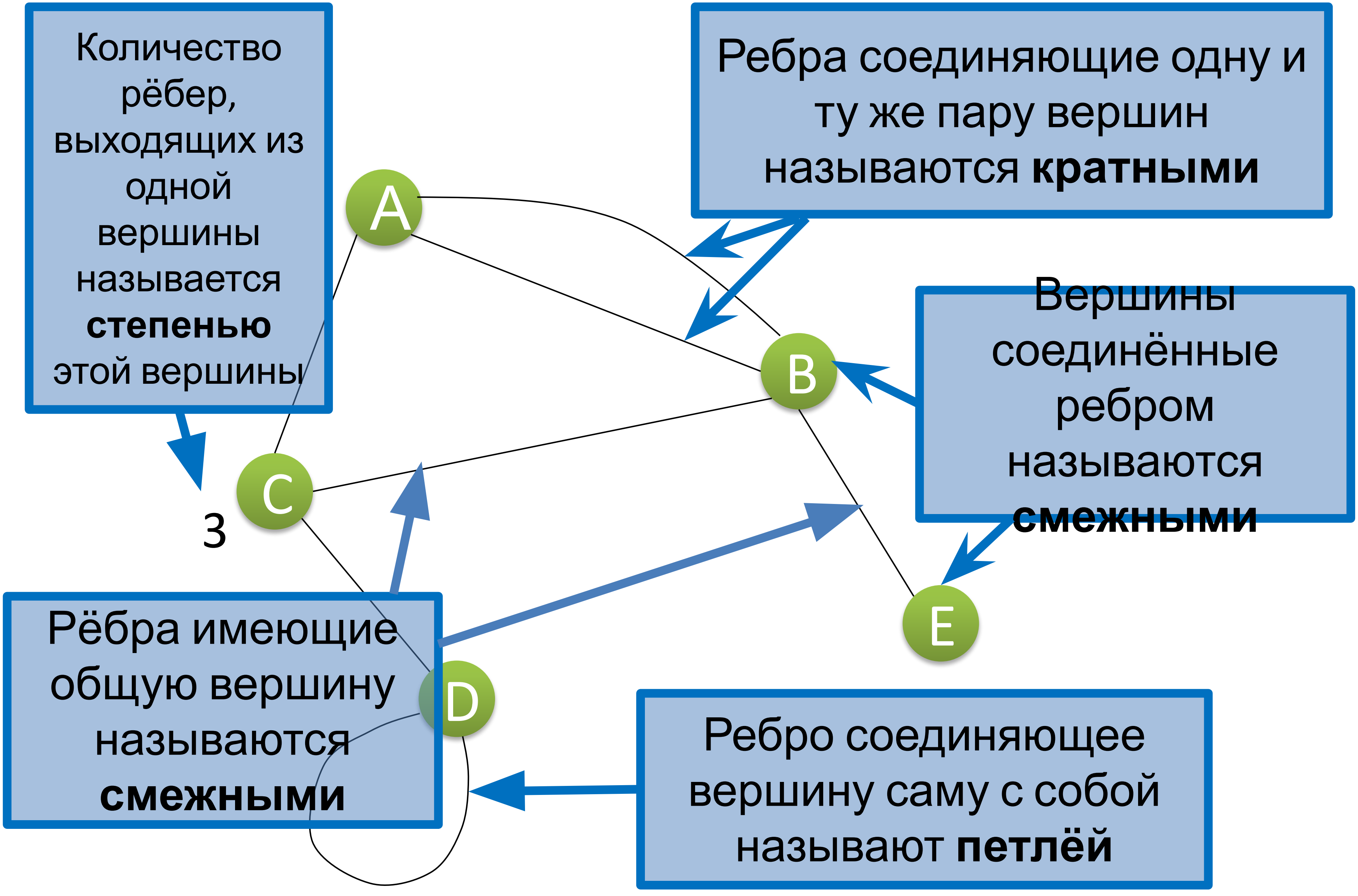
От греч. γράφω «царапаю, черчу, пишу»:

Граф (математика) — объект, состоящий из вершин и соединяющих их рёбер.

- **Граф**, или **неориентированный граф** G— это упорядоченная пара G:=(V,E), где V — это непустое множество **вершин** или **узлов**, а E — множество пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) вершин, называемых **рёбрами**.
- V (а значит и E), обычно считаются конечными множествами. Многие результаты, полученные для конечных графов, неверны (или каким-либо образом отличаются) для *бесконечных графов*, поскольку не все утверждения, имеющие место для конечных совокупностей, выполняются в случае бесконечных множеств.

- Вершины и рёбра графа называются также **элементами** графа,
- число вершин в графе |V| — **порядком**,
- число рёбер |E| — **размером** графа.
- Вершины u и v называются **концевыми** вершинами (или просто **концами**) ребра e={u,v}. Ребро, в свою очередь, **соединяет** эти вершины. Две концевые вершины одного и того же ребра называются **соседними**.
- Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую концевую вершину.

- Два ребра называются **кратными**, если множества их концевых вершин совпадают.
- Ребро называется **петлёй**, если его концы совпадают, то есть $e=\{v,v\}$.
- **Степенью** $\deg V$ вершины V называют количество инцидентных ей рёбер (при этом петли считают дважды).
- Вершина называется **изолированной**, если она не является концом ни для одного ребра;
- Вершина называется **висячей** (или **листом**), если она является концом ровно одного ребра.



Количество рёбер, выходящих из одной вершины называется **степенью** этой вершины
Ребра соединяющие одну и ту же пару вершин называются **кратными**
Вершины соединённые ребром называются **смежными**
Рёбра имеющие общую вершину называются **смежными**
Ребро соединяющее вершину саму с собой называют **петлёй**
A
B
C
D
E
3

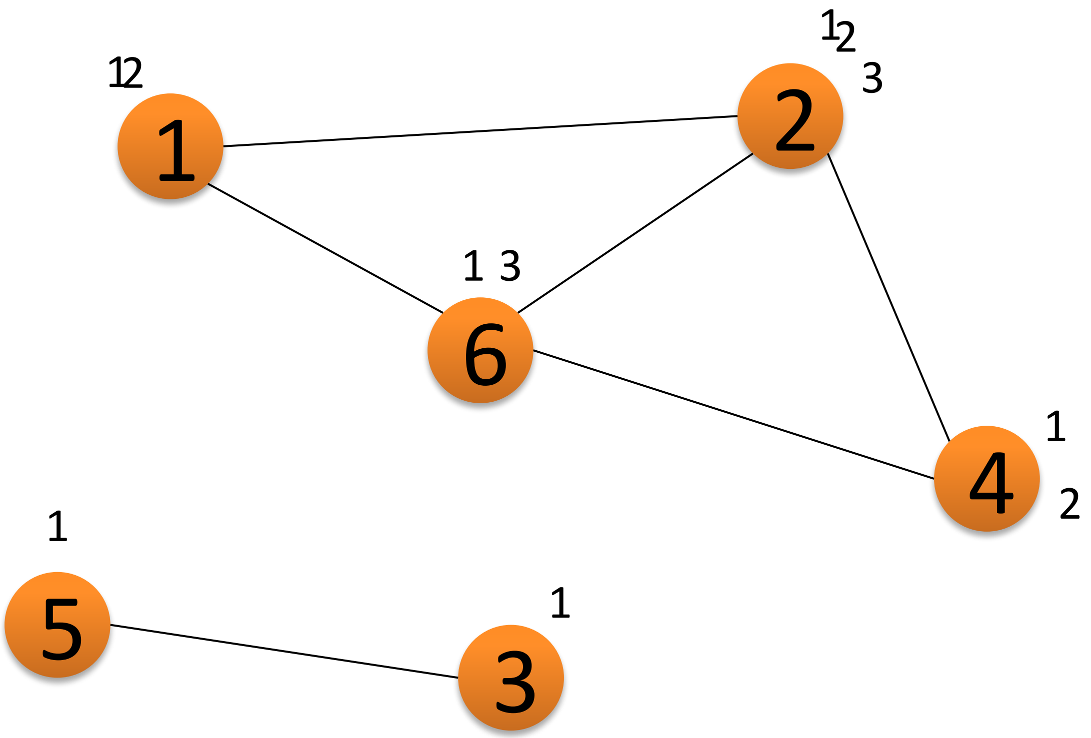
Теорема о сумме степеней вершин графа

для неориентированного графа

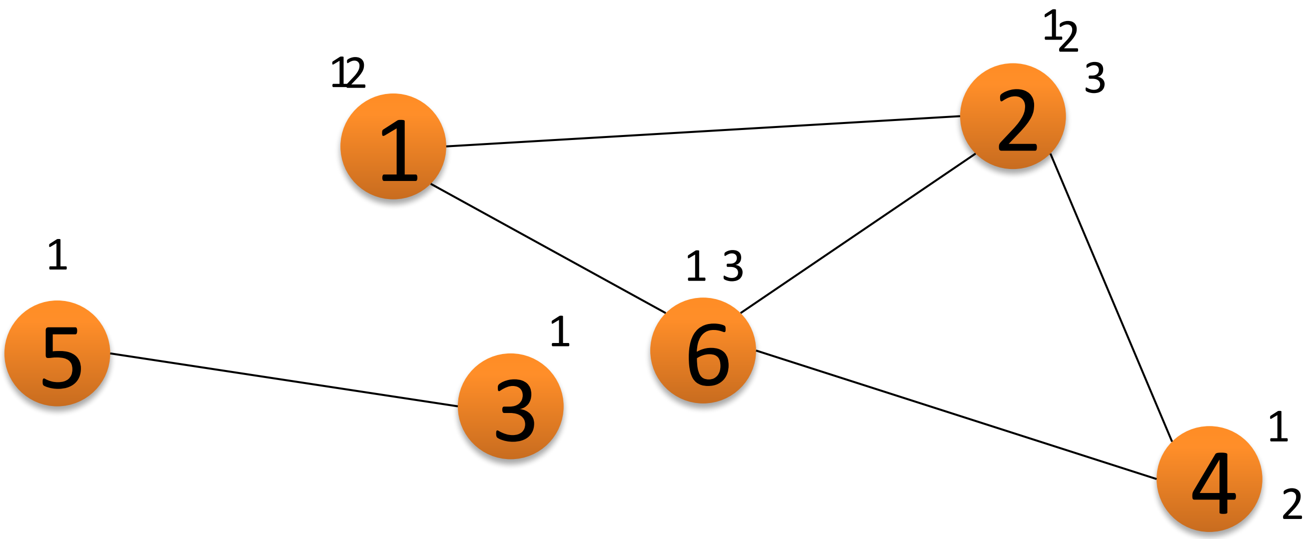
Сумма степеней всех вершин графа (или мультиграфа без петель) — равна удвоенному числу рёбер

1. Если взять вершины, вообще не связанные друг с другом, то сумма степеней этих вершин равна нулю.
2. Прибавляя любое ребро, которое связывает две вершины, увеличиваем сумму всех степеней на 2 единицы.
3. Таким образом, сумма всех степеней вершин четна и равна удвоенному количеству рёбер.

Доказательство



Доказательство



$$\deg(1) + \deg(2) = 1 + 1 = 2$$

$$\deg(1) + \deg(2) + \deg(4) = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$\deg(1) + \deg(2) + \deg(4) + \deg(6) = 2 + 2 + 1 + 1 = 6$$

$$\deg(1) + \deg(2) + \deg(4) + \deg(6) = 2 + 3 + 2 + 3 = 10$$

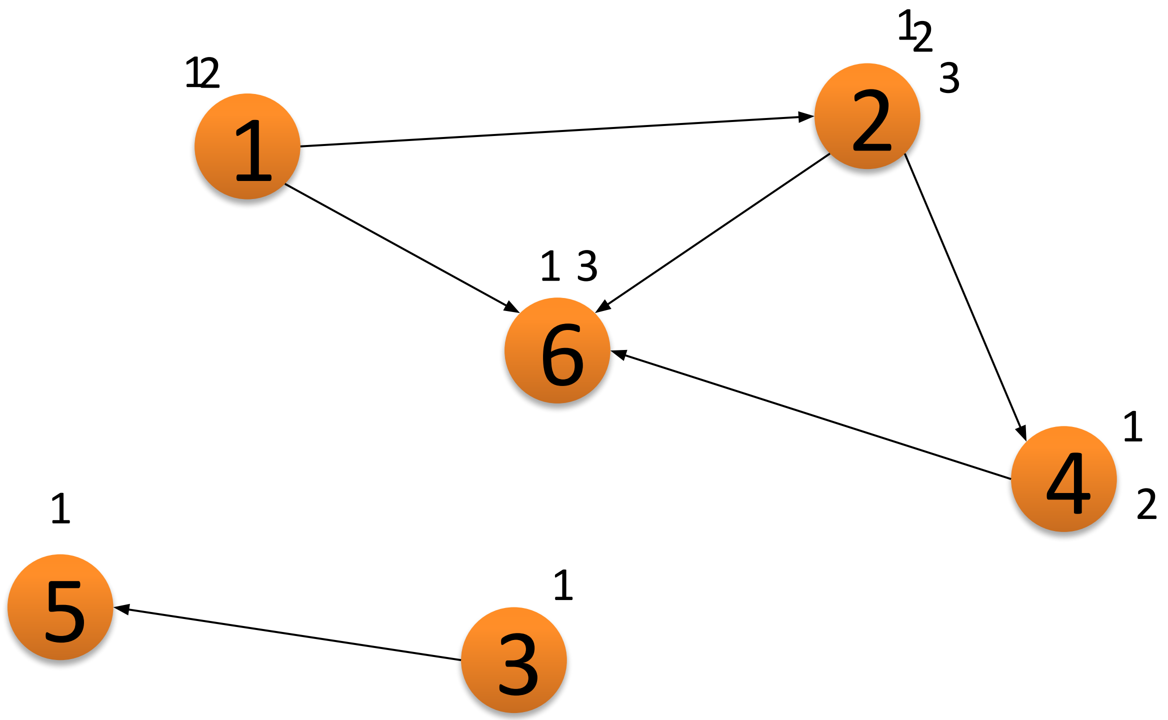
$$\deg(1) + \deg(2) + \deg(4) + \deg(6) + (\deg(5) + \deg(3)) = 10 + 1 + 1 = 12$$

для ориентированного графа:

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа — равна удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^{-} v + \deg^{+} v = 2 \cdot |E(G)|$$

Доказательство



Лемма о рукопожатиях

В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

1. Сумма степеней всех вершин в графе (или мультиграфе без петель) должна быть четной.
2. Удаляя из этой суммы степени четных вершин, получим, что сумма степеней нечетных вершин, должна быть четной.
3. Значит, само число таких вершин должно быть четным.

Лемма доказана.

В любой момент времени количество людей, сделавших нечетное число рукопожатий,

чётно

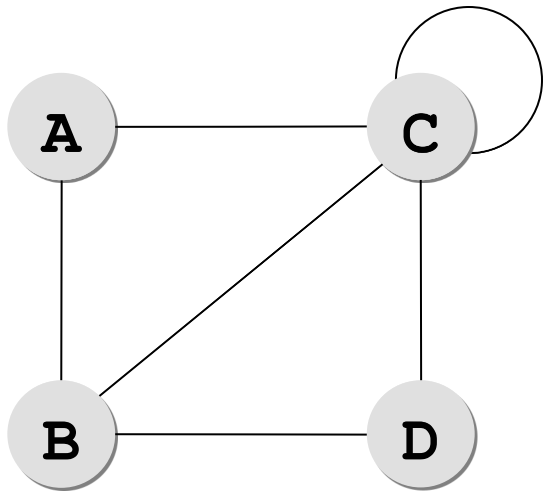
Теорема о существовании вершин одинаковой степени

В любом графе есть по крайней мере две вершины, имеющие одинаковую степень.

Теорема о существовании вершин одинаковой степени

Число рёбер в полном графе $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Матрица и список смежности



Матрица смежности

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	1	1
D	0	1	1	0

петля

Список смежности

```
(  A (B, C),
   B (A, C, D),
   C (A, B, C, D),
   D (B, C)   )
```

Способы представления графа в информатике

Матрица смежности - бинарная матрица каждой ячейке которой записывается число, определяющее наличие связи от вершины-строки к вершине-столбцу (либо наоборот).

- Это наиболее удобный способ представления **плотных графов**.
- Недостатком являются требования к памяти, прямо пропорциональные квадрату количества вершин.

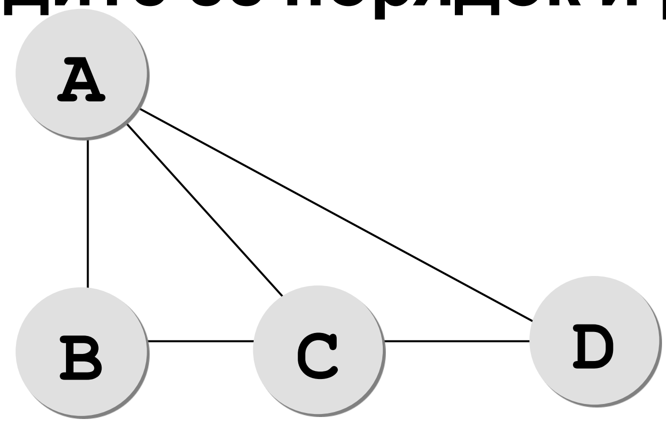
Способы представления графа в информатике

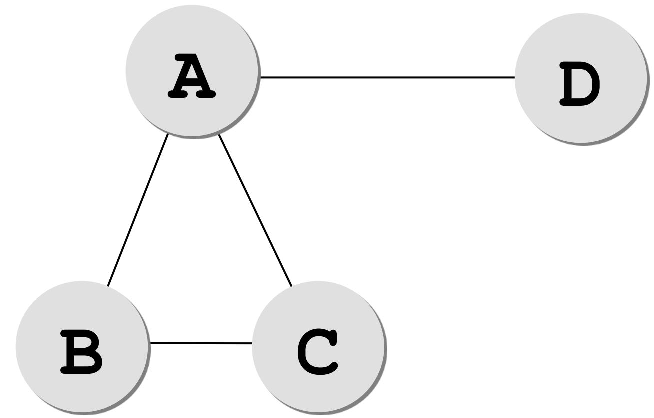
Список смежности —каждой вершине графа соответствует список, состоящий из "соседей" этой вершины.

- Реализация предложенная Гвидо ван Россумом использует хэш-таблицу для ассоциации каждой вершины со списком смежных вершин. Нет явного представления рёбер в этой структуре
- Кормен и другие предложили реализацию в которой вершины представлены числовым индексом в массиве, в котором каждая ячейка массива ссылается на однонаправленный связанный список соседних вершин.
- Объектно ориентированный список смежности, предложенный Гудричем и Таммасией, содержит специальные классы вершин и рёбер. Каждый объект вершины содержит ссылку на коллекцию рёбер. Каждый объект ребра содержит ссылки на исходящую и входящую вершины.

- **Маршрутом** в графе называют конечную последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершиной ребром.
- **Цепью** называется маршрут без повторяющихся рёбер.
- **Ориентированным маршрутом** (или **путём**) в орграфе называют конечную последовательность вершин и дуг, в которой каждый элемент инцидентен предыдущему и последующему.
- **Циклом** называют цепь, в которой первая и последняя вершины совпадают. При этом **длиной** пути (или цикла) называют число составляющих его *рёбер*.
- Путь (или цикл) называют **простым**, если рёбра в нём не повторяются; **элементарным**, если он простой и вершины в нём не повторяются.

Постройте матрицу смежности, найдите её порядок и размер

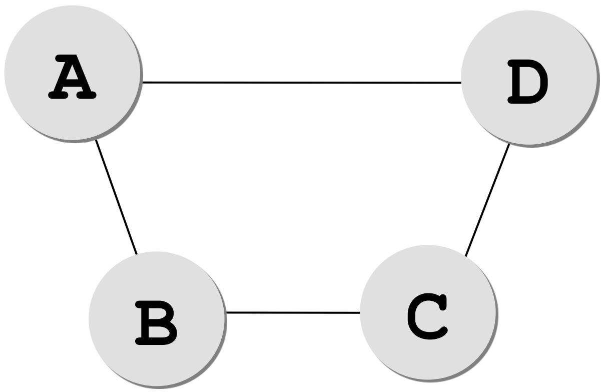


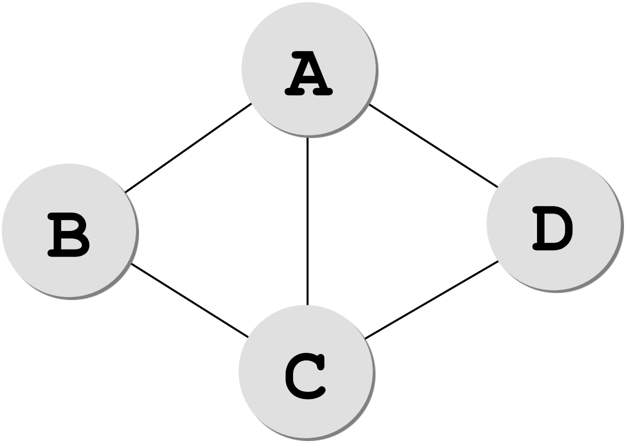


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Постройте матрицу смежности





	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Нарисуйте граф

	A	B	C	D
A		0	1	1
B	0		1	0
C	1	1		0
D	1	0	0	

	A	B	C	D
A		1	0	1
B	1		1	0
C	0	1		1
D	1	0	1	

Нарисуйте граф

	A	B	C	D	E
A		0	1	1	0
B	0		1	0	1
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	0	1	1	0	

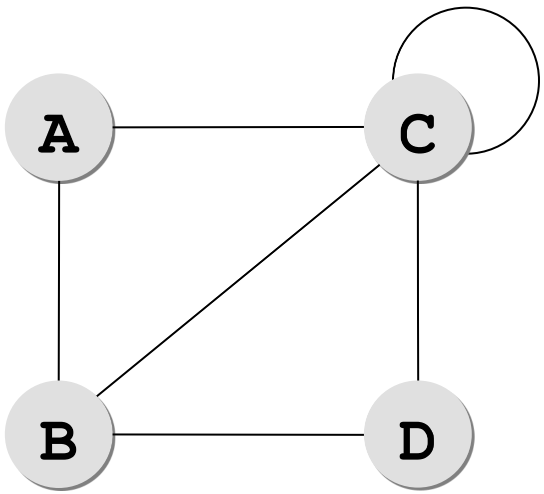
	A	B	C	D	E
A		0	1	1	1
B	0		1	0	0
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	1	0	1	0	

Нарисуйте граф

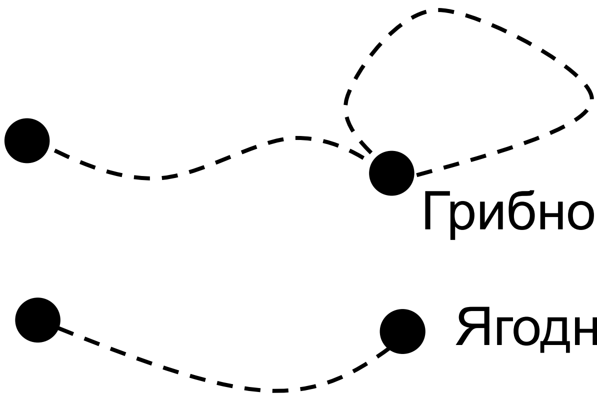
	A	B	C	D	E
A		0	1	1	1
B	0		1	0	1
C	1	1		0	1
D	1	0	0		0
E	1	1	1	0	

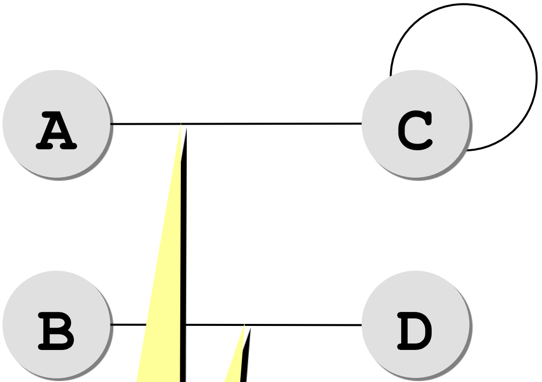
	A	B	C	D	E
A		0	0	1	0
B	0		1	0	1
C	0	1		1	1
D	1	0	1		0
E	0	1	1	0	

Связность графа



! **Связный граф** – это граф, между любыми вершинами которого существует путь.

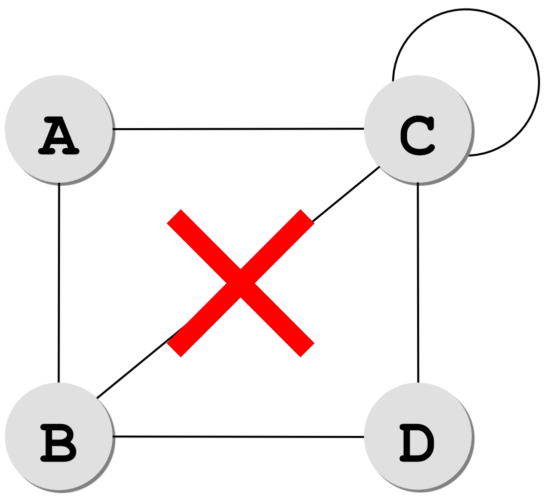




компоненты связности

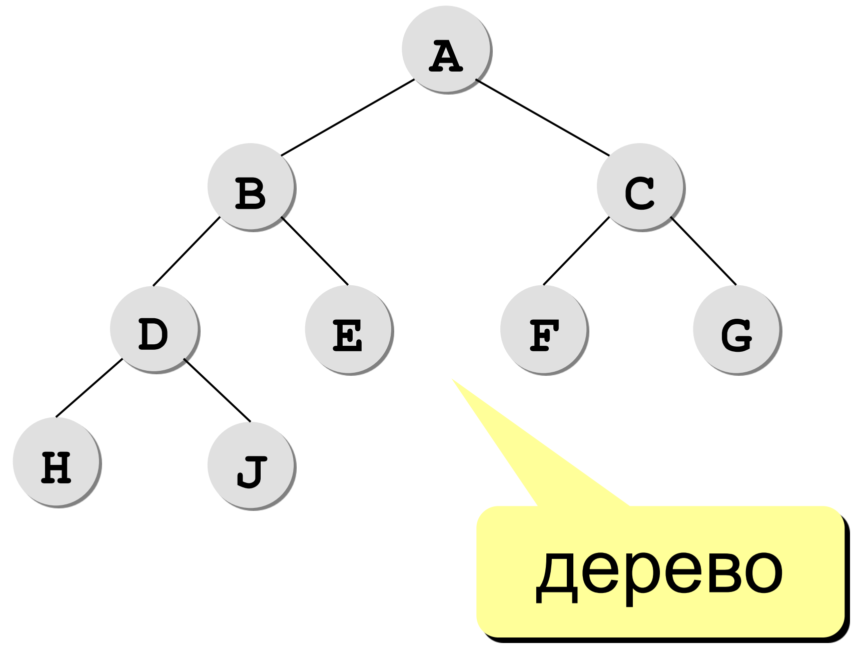
Дерево – это граф?

! **Дерево** – это связный граф без циклов (замкнутых путей).

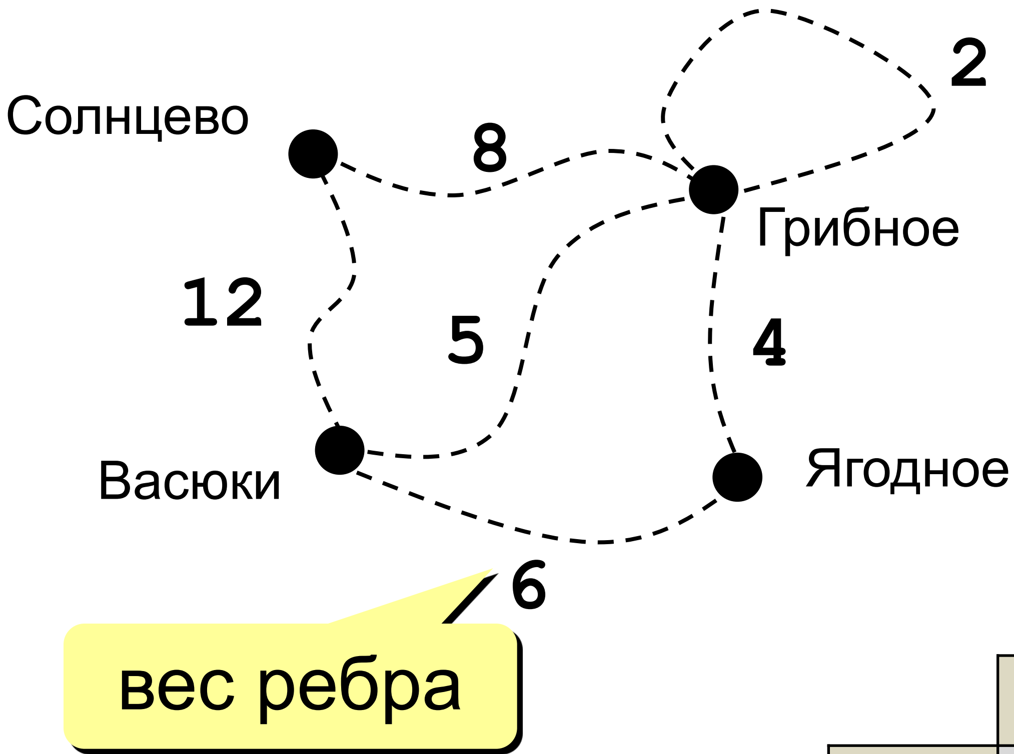


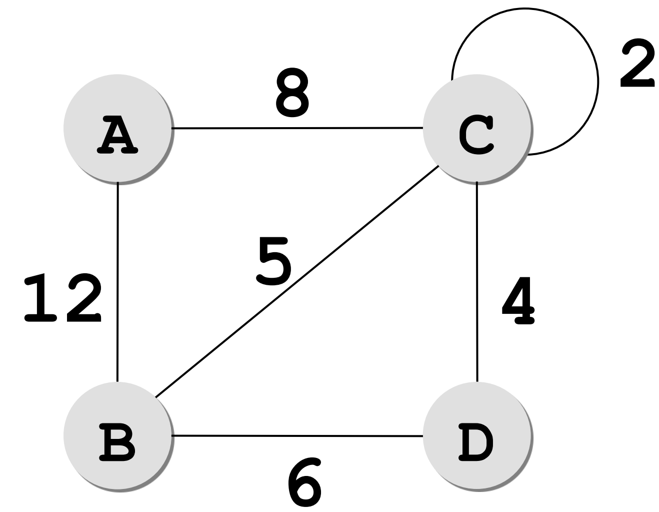
ABC ABDC

BCD CCC…



Взвешенные графы

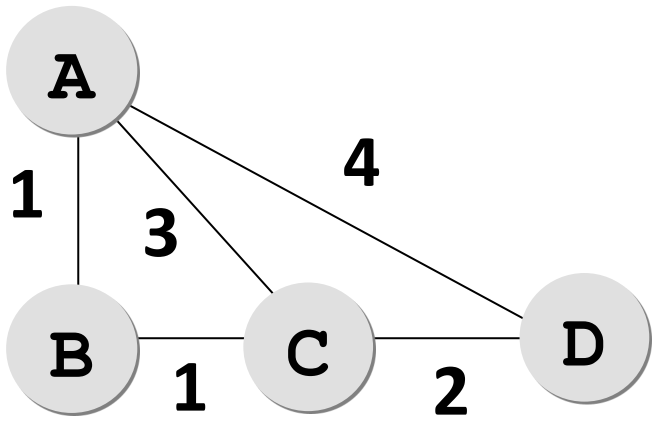


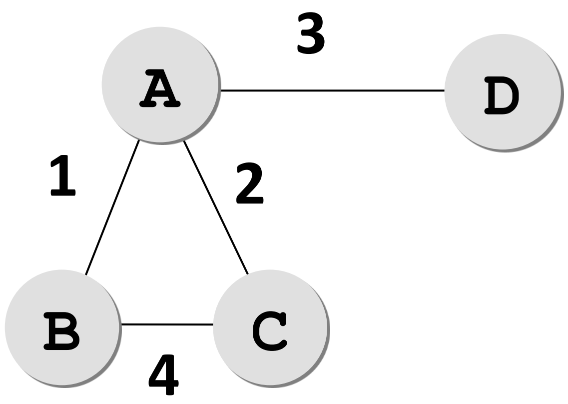


Весовая матрица:

	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C	8	5	2	4
D		6	4	

Постройте весовую матрицу

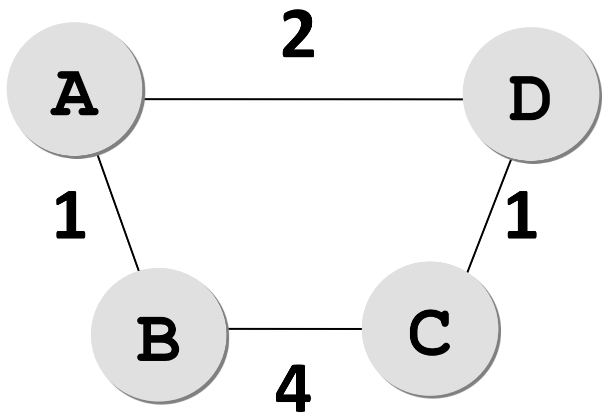


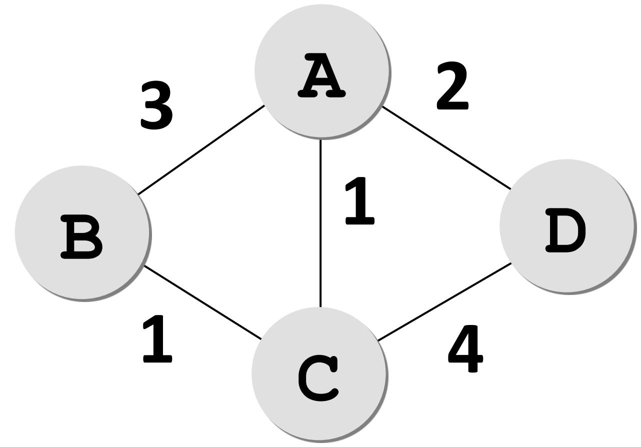


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Постройте весовую матрицу





	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Нарисуйте граф

	A	B	C	D
A		4	3	
B	4			2
C	3			6
D		2	6	

	A	B	C	D
A			2	3
B				4
C	2			5
D	3	4	5	

Нарисуйте граф

	A	B	C	D	E
A		4	3		7
B	4			2	
C	3			6	
D		2	6		1
E	7			1	

	A	B	C	D	E
A		2	5		6
B	2			3	
C	5				
D		3			1
E	6			1	

Нарисуйте граф

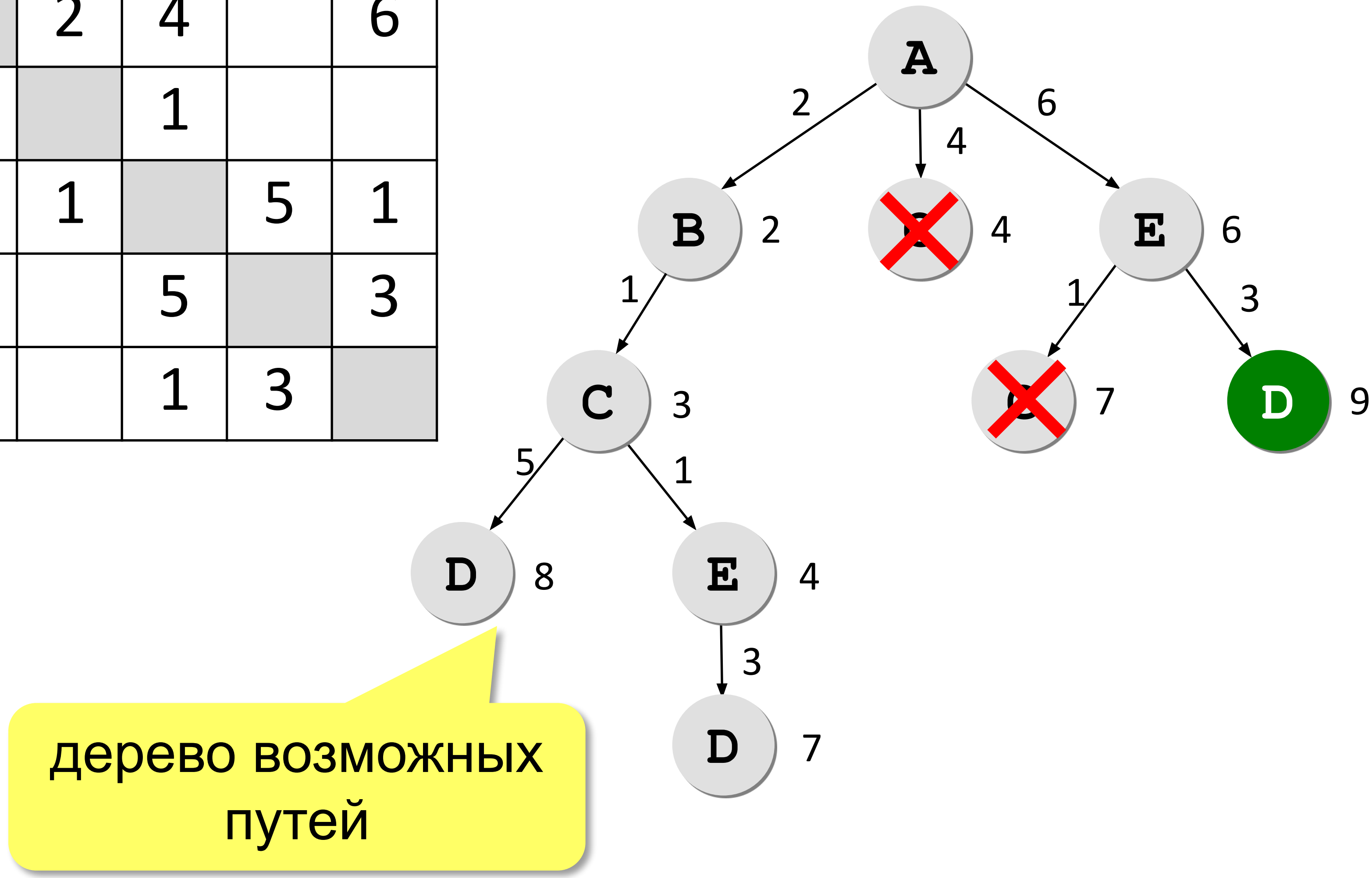
	A	B	C	D	E
A			2	2	6
B				2	
C	2			2	
D	2	2	2		
E	6				

	A	B	C	D	E
A		5	2		6
B	5			5	
C	2			2	
D		5	2		3
E	6			3	

Кратчайший путь (перебор)

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2		1		
C	4	1		5	1
D			5		3
E	6		1	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и D.



Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A		2	4		
B	2		1		7
C	4	1		3	5
D			3		3
E		7	5	3	

Определите кратчайший путь между пунктами A и E.

Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

Определите кратчайший путь между пунктами A и B.

Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A			3	1	1
B			4		
C	3	4			2
D	1				
E	1		2		

Определите кратчайший путь между пунктами A и B.

Кратчайший путь

	A	B	C	D	E
A			3	1	4
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E	4	2	2		

Определите кратчайший путь между пунктами A и B.

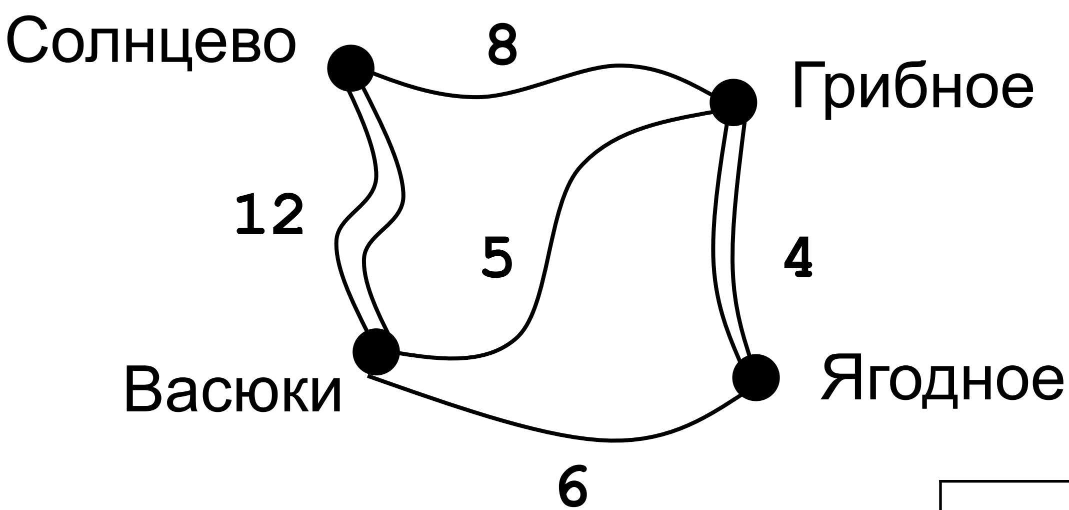
Кратчайший путь

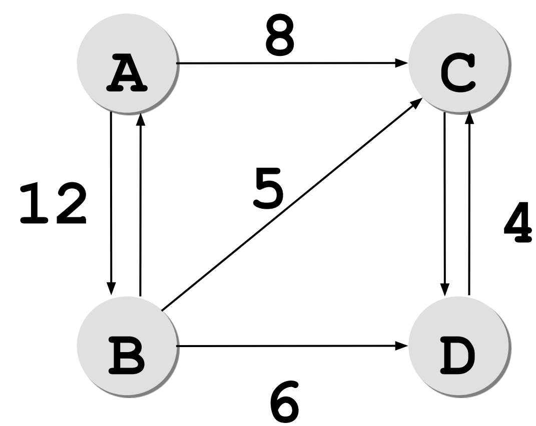
	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C		4		4	2
D	1		4		
E		1	2		

Определите кратчайший путь между пунктами A и B.

Ориентированные графы (орграфы)

Рёбра имеют направление (начало и конец), рёбра называю **дугами**.





	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C				4
D			4	

! Весовая матрица может быть несимметрична!

Нарисуйте орграф

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B	2		4		2
C	3				
D	1				
E			2		

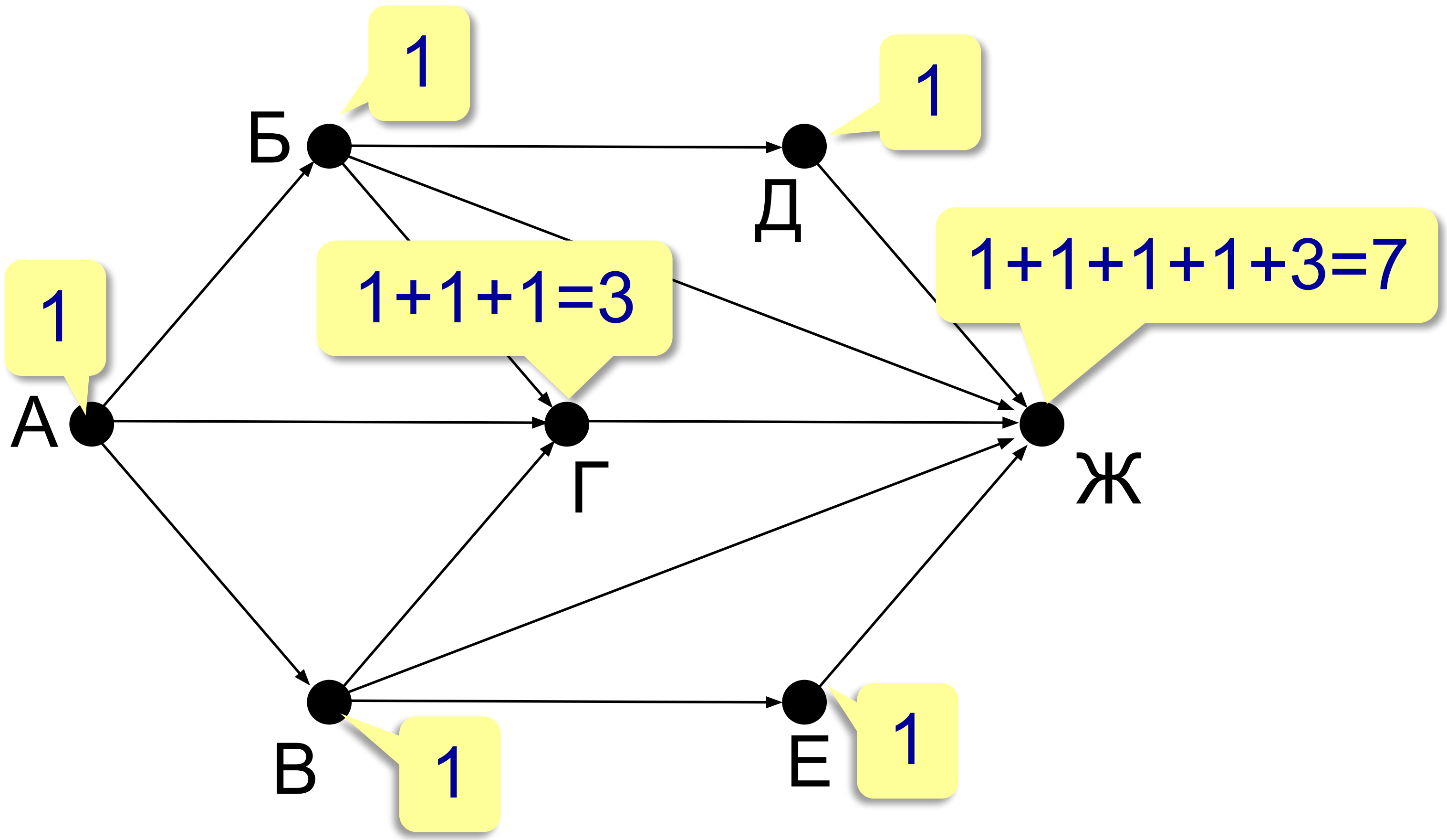
	A	B	C	D	E
A			5	1	
B			6	4	
C	3	4			3
D		2			
E			3		

Нарисуйте орграф

	A	B	C	D	E
A			3	1	4
B			4		2
C		4			2
D					
E	4		2		

	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C	3	4		4	2
D	1	2	4		
E	1	1	2		

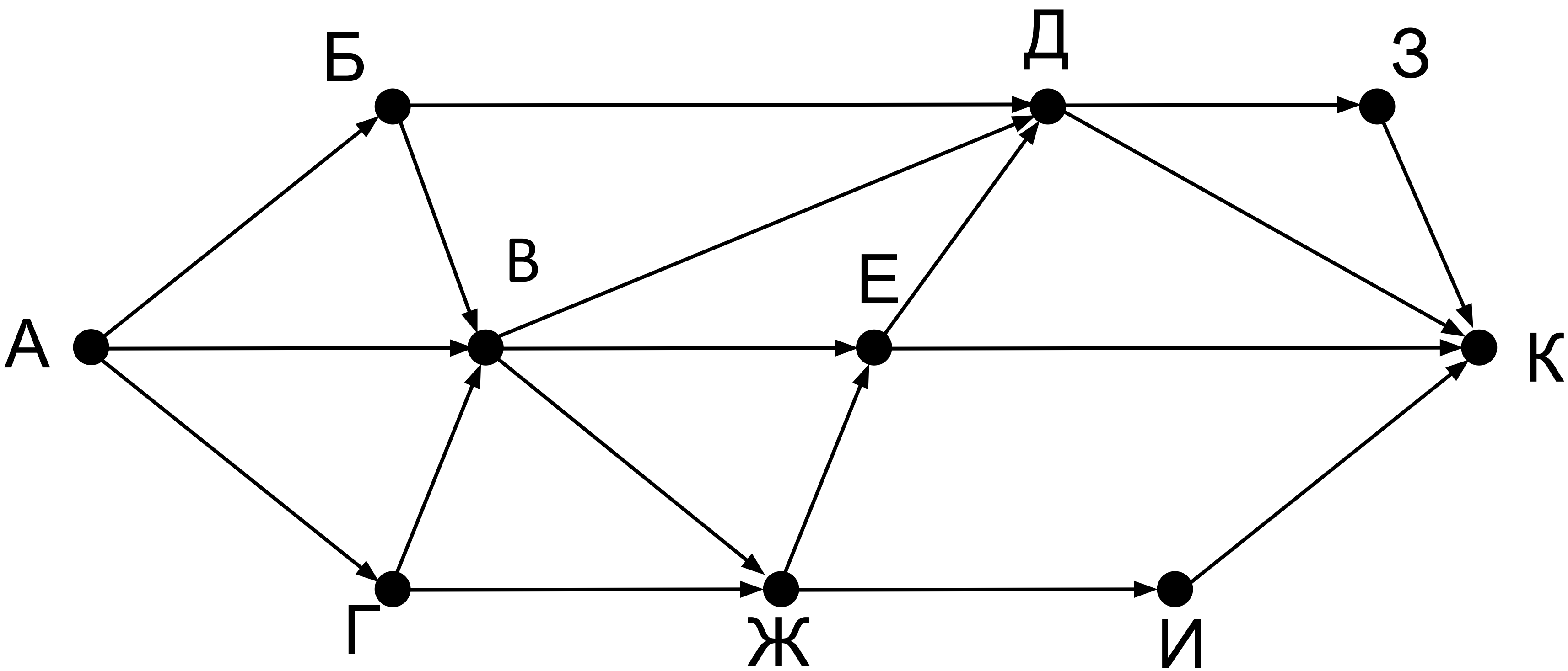
Количество путей из А в Ж



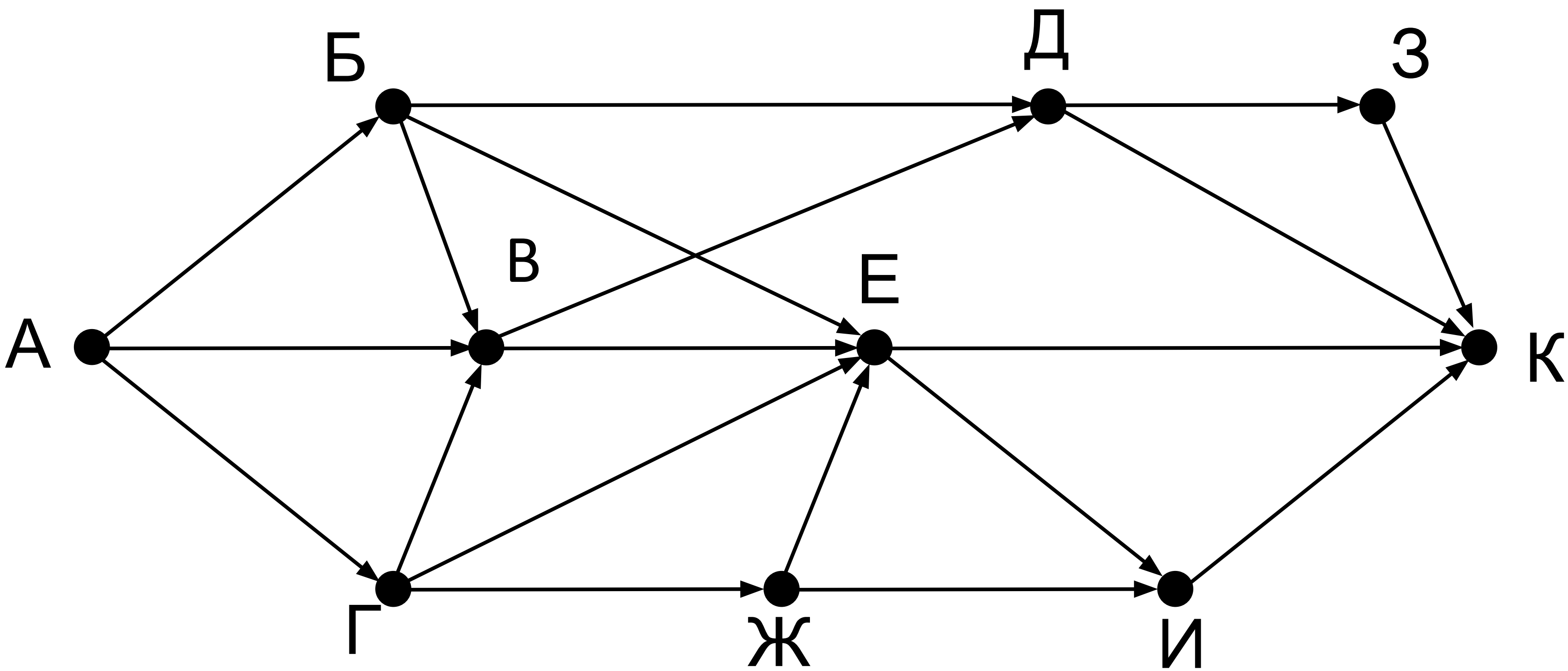
!

$N_Ж = N_Д + N_Б + N_Г + N_В + N_Е$

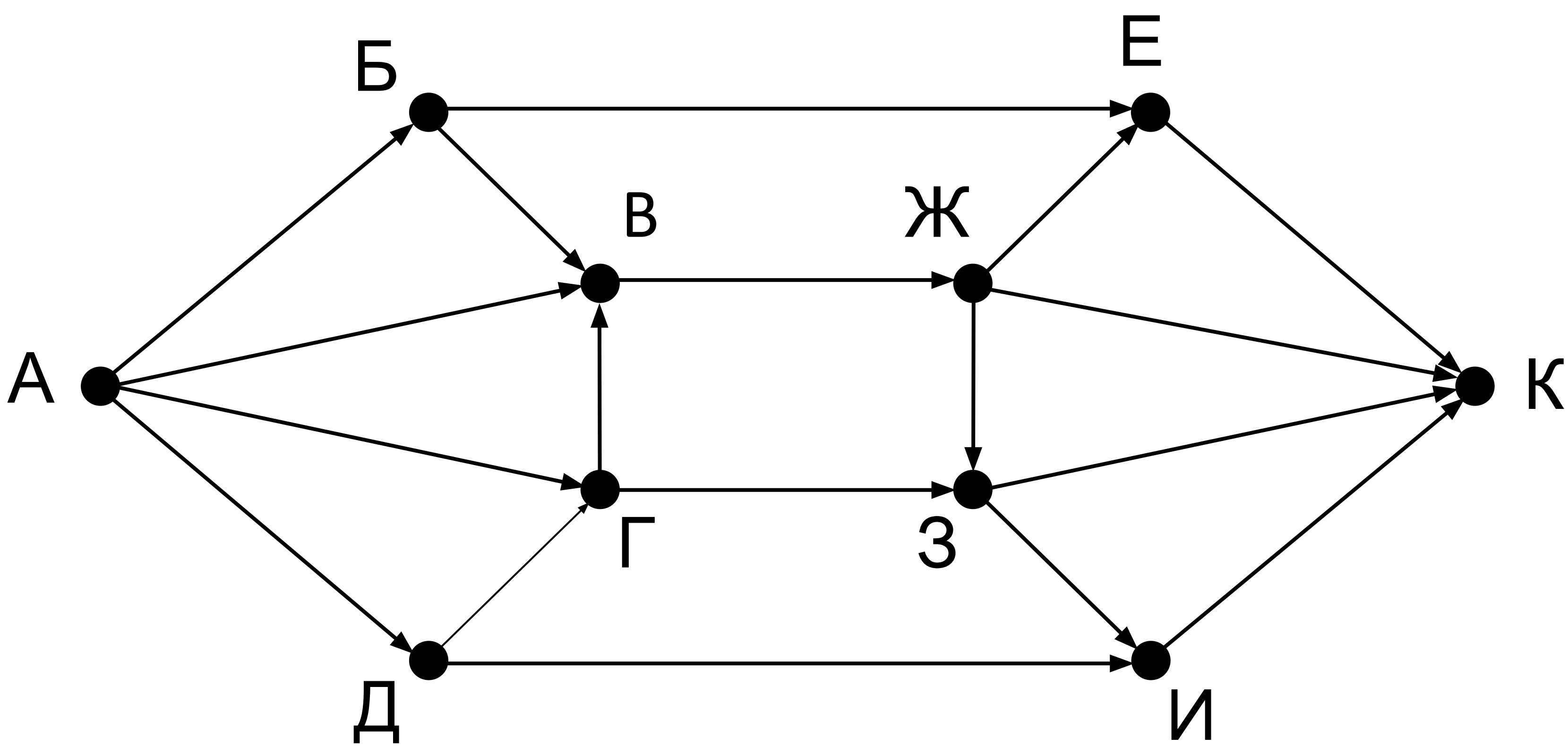
Количество путей из А в К



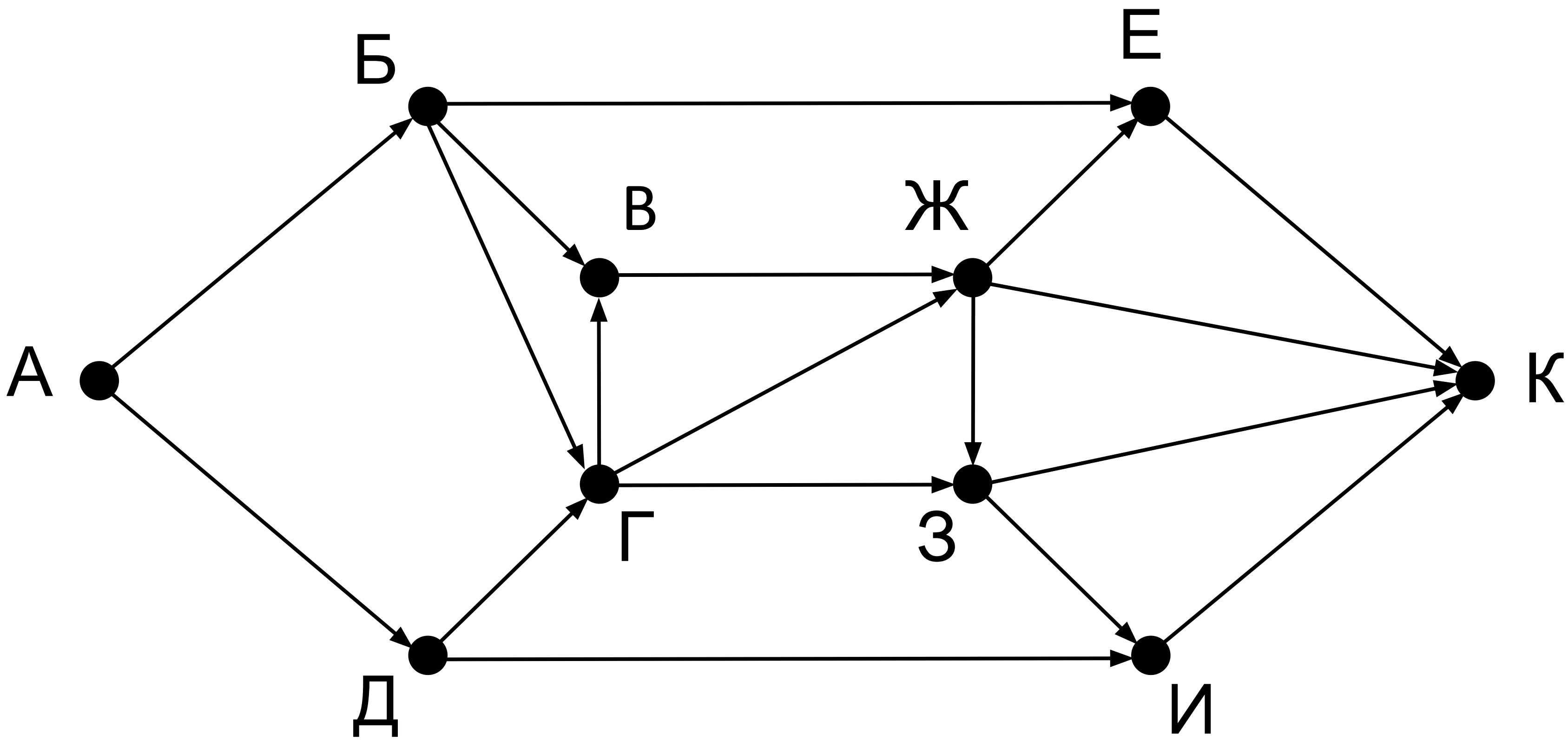
Количество путей из А в К



Количество путей из А в К

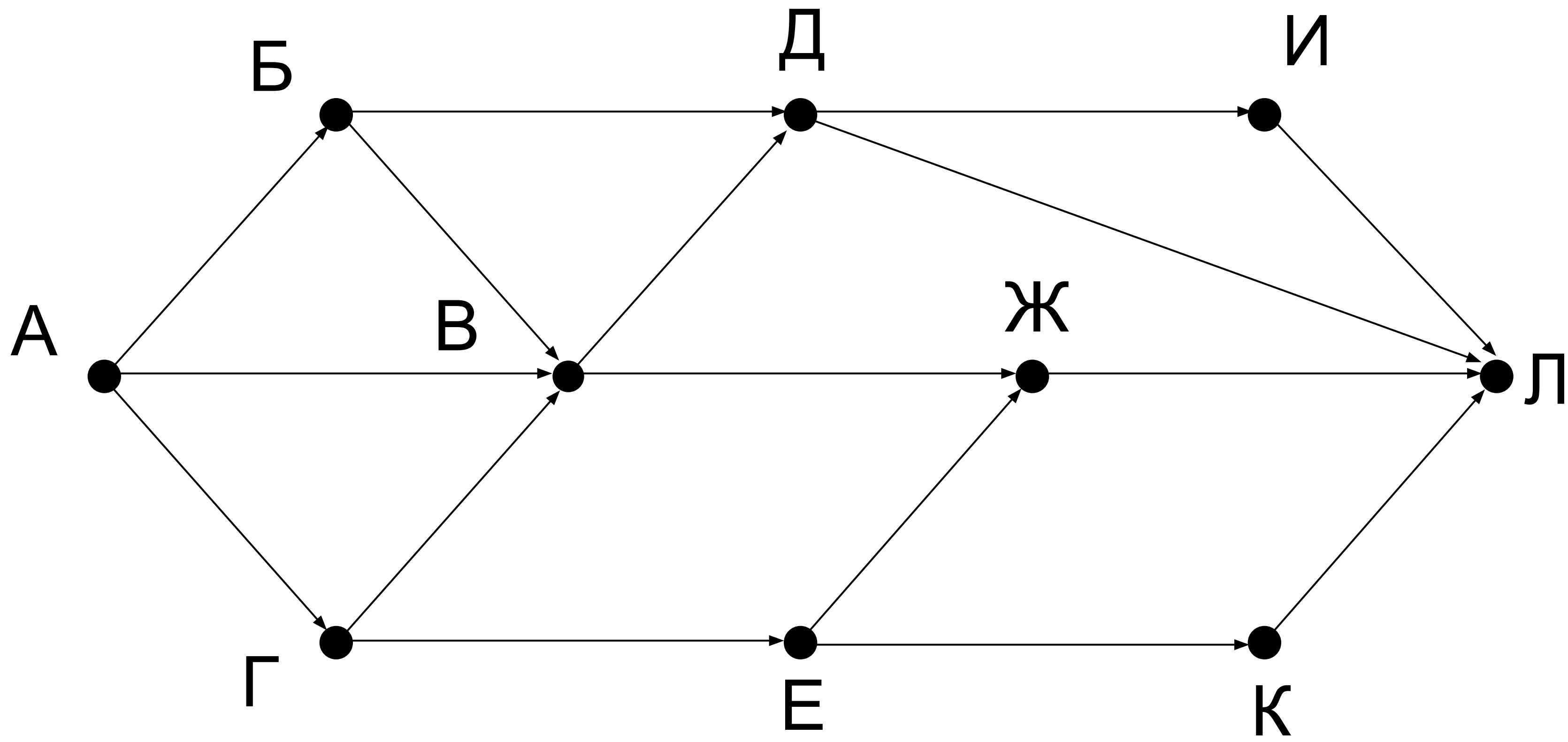


Количество путей из А в К



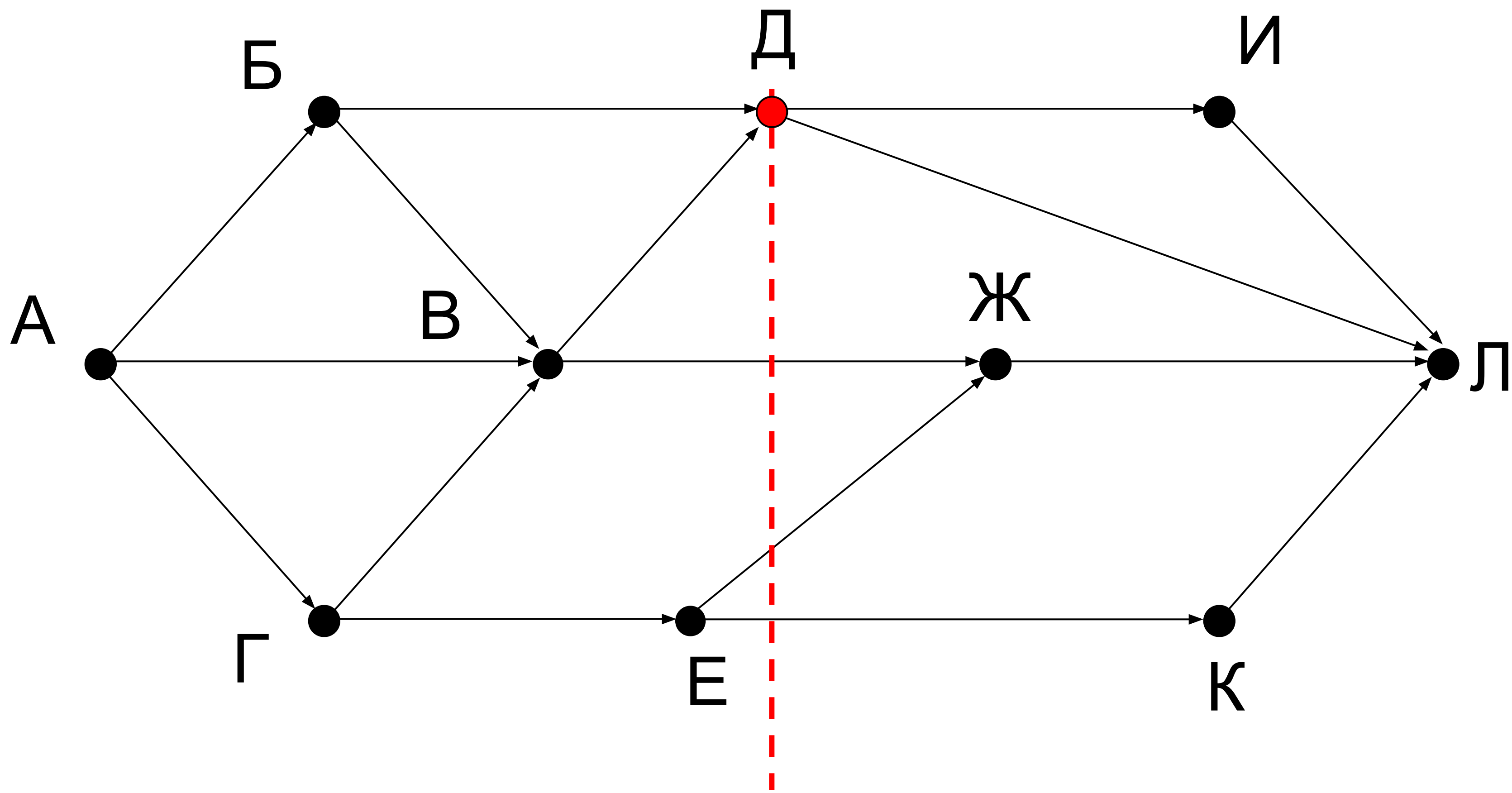
Количество путей из А в Л не через В

*Сколько существует различных путей из города А в город Л, **не проходящих** через В?*



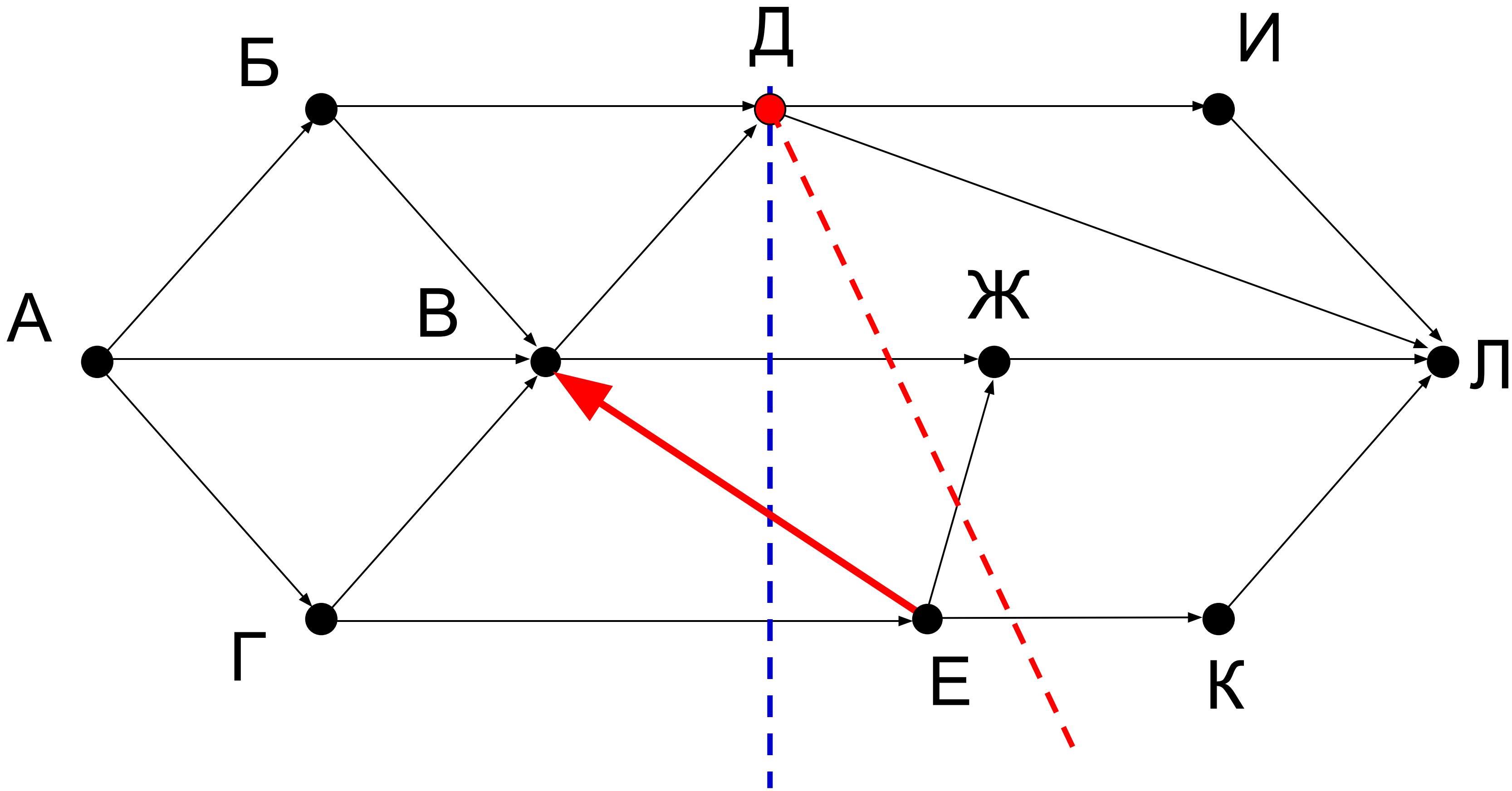
Количество путей из А в Л через Д

*Сколько существует различных путей из города А в город Л, **проходящих** через Д?*



Количество путей из А в Л через Д

Сколько существует различных путей из города А в город Л, ***проходящих*** *через Д?*



Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь
eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. http://overhealth.ru
2. https://ufhealth.org
3. http://wmposters.com
4. http://ozon.ru
5. http://www.bikeshot.ru
6. http://ru.wikipedia.org
7. http://salestores.com
8. http://gimp-werkstatt.de
9. http://frontal-cortex.tumblr.com
10. http://www.intermedia.kg
11. http://pc-azbuka.ru
12. авторские материалы