

Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия № , г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Скалярное произведение векторов

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

Угол между векторами

A

$\vec{a}$

B

$\vec{b}$

$\vec{b}$

$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$

α

• O

Лучи OA и OB образуют угол AOB.

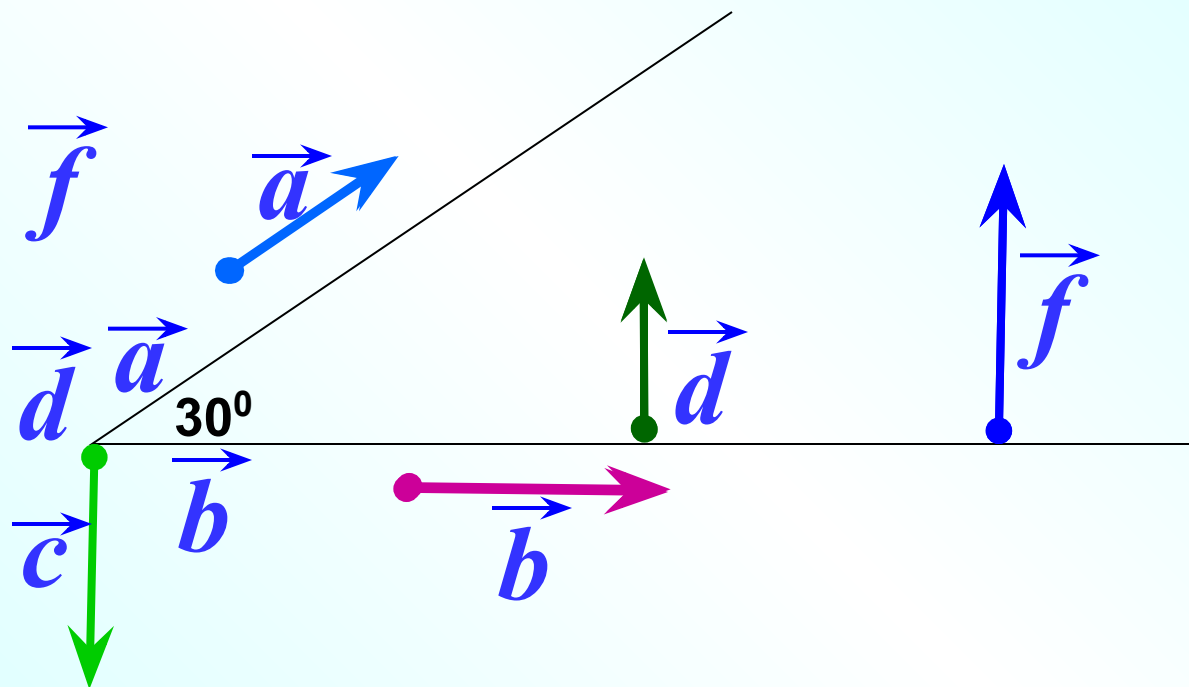
Градусную меру этого угла
обозначим буквой α

Угол между векторами
равен α

$\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a}$

Найти углы между векторами.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = 30^\circ$

$\angle a + \angle c = 120^\circ$

$\vec{b} \perp \vec{c} = 90^\circ$

$\vec{d} \quad \vec{c} = 180^\circ$

$$\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{f} = 0^0$$

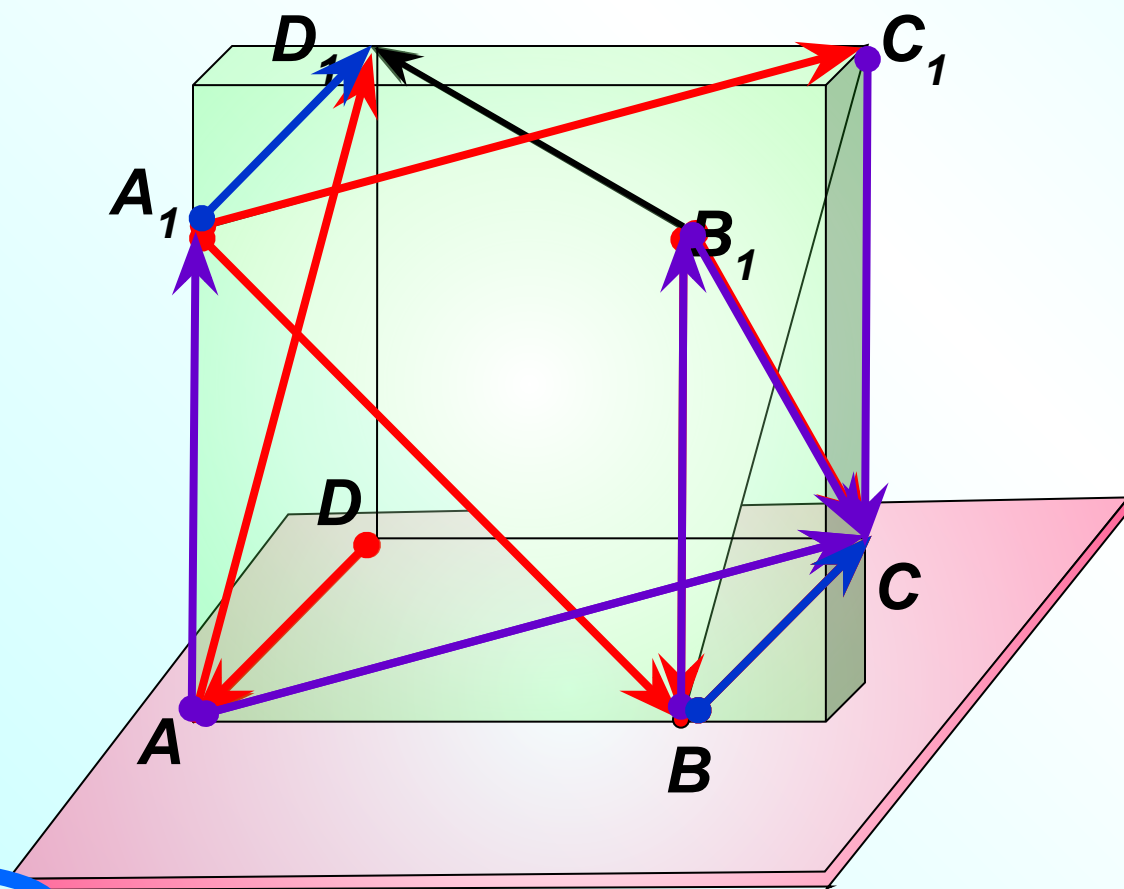
Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \perp \vec{f}$$

№ 441 ABCDA₁B₁C₁D₁ – куб.
Найдите угол между векторами.



$$\overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{B_1C} = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{B_1D_1} = 135^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1B} = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AD_1} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{BC} = 0^\circ$$

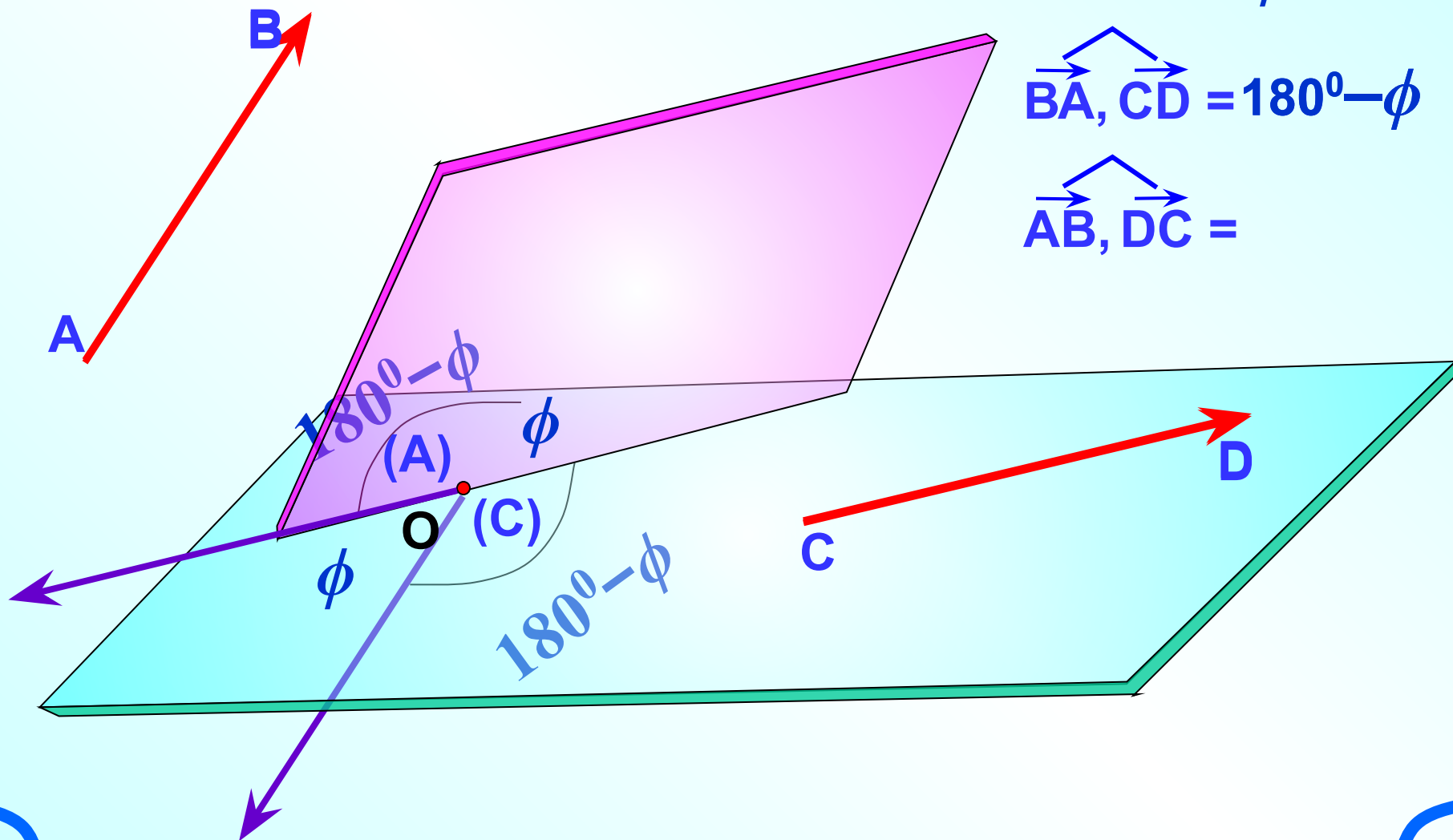
$$\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1C} = 180^\circ$$

№ 442 Угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ равен ϕ .
Найдите углы между векторами

$$\widehat{\vec{BA}, \vec{DC}} = \phi$$

$$\widehat{\vec{BA}, \vec{CD}} = 180^\circ - \phi$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DC}} =$$



Сумма векторов – вектор.

Разность векторов – вектор.

Произведение вектора на число – вектор.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

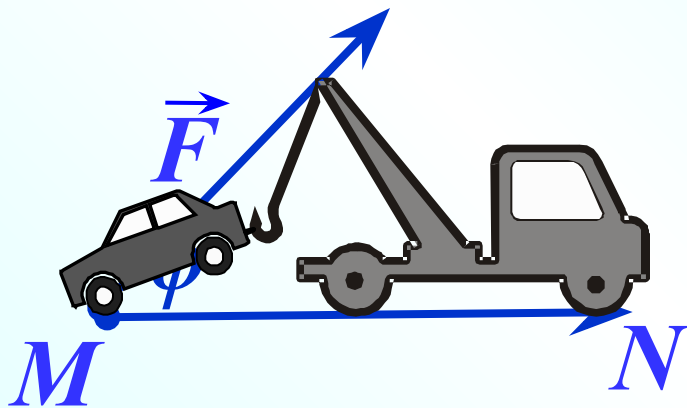
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скаляр – лат. *scale* — лестница, шкала.

Ввел в 1845г. У. Гамильтон, английский математик.

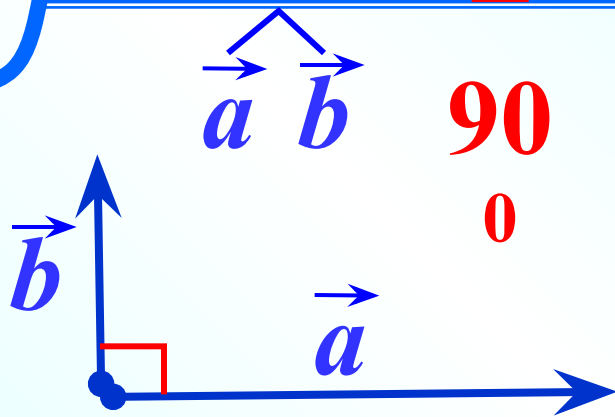
Скалярное произведение в физике



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении тела из точки M в точку N равна произведению силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{MN}$ на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \phi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$



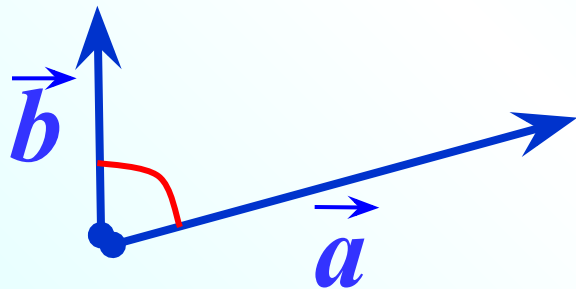
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$



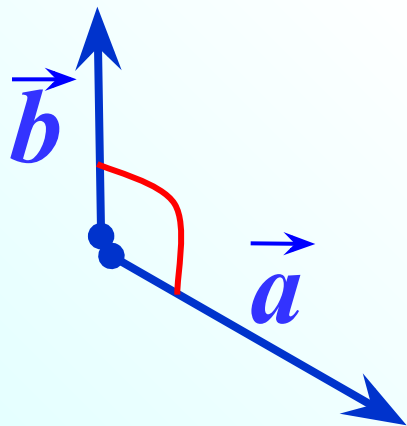
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

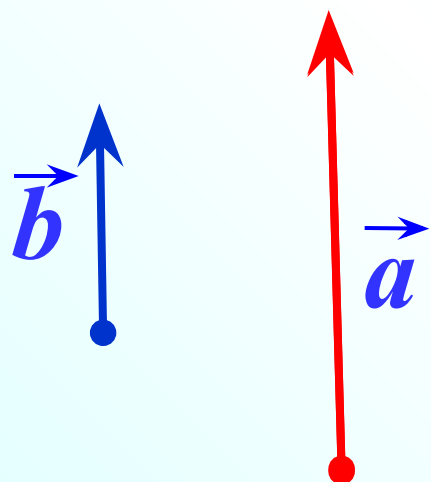
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{при } 90^\circ$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0 \quad \text{при } \alpha < 90^\circ$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

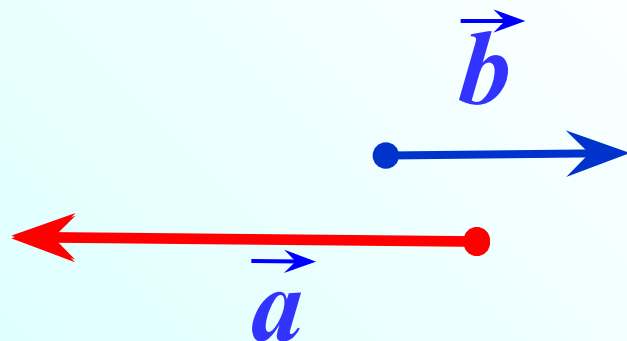
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \text{при } \alpha > 90^\circ$$



Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{1}{\cos} 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

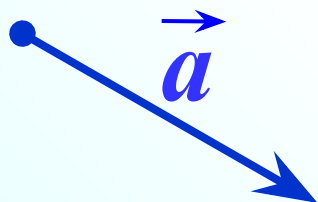


Если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{-1}{\cos} 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \overrightarrow{a} \quad \overrightarrow{a} \\ \searrow \end{array} = 0^0$$



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \overset{1}{\cos 0^0} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

Скалярное произведение $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ называется
скалярным квадратом вектора $\overrightarrow{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a}^2$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

№ 443 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Найдите скалярное произведение векторов

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1 C_1}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1 A_1}$$

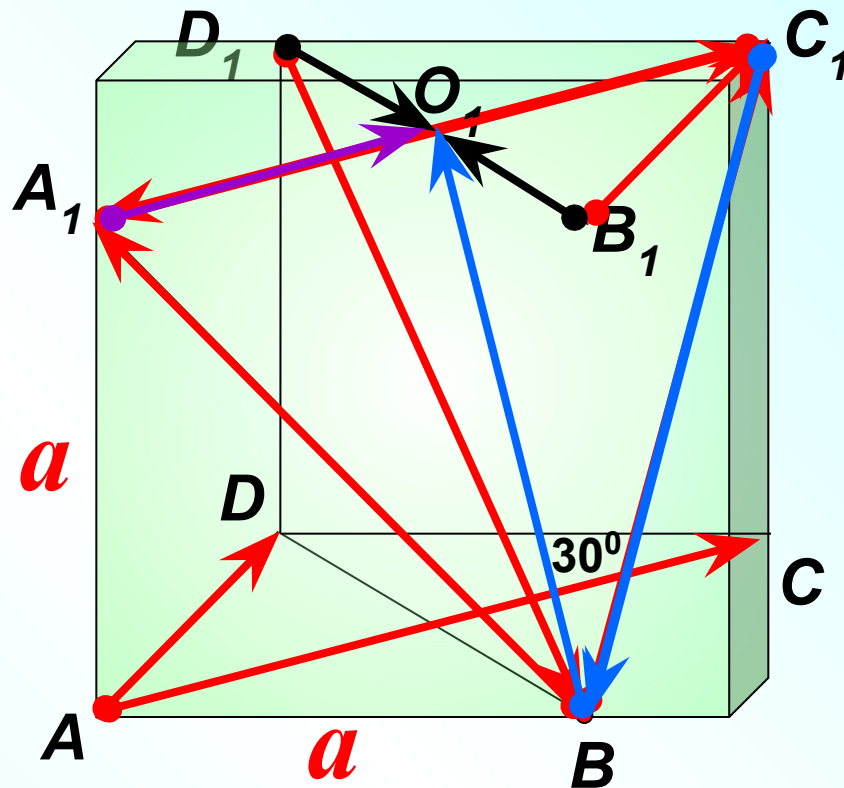
$$\overrightarrow{D_1 B} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$$

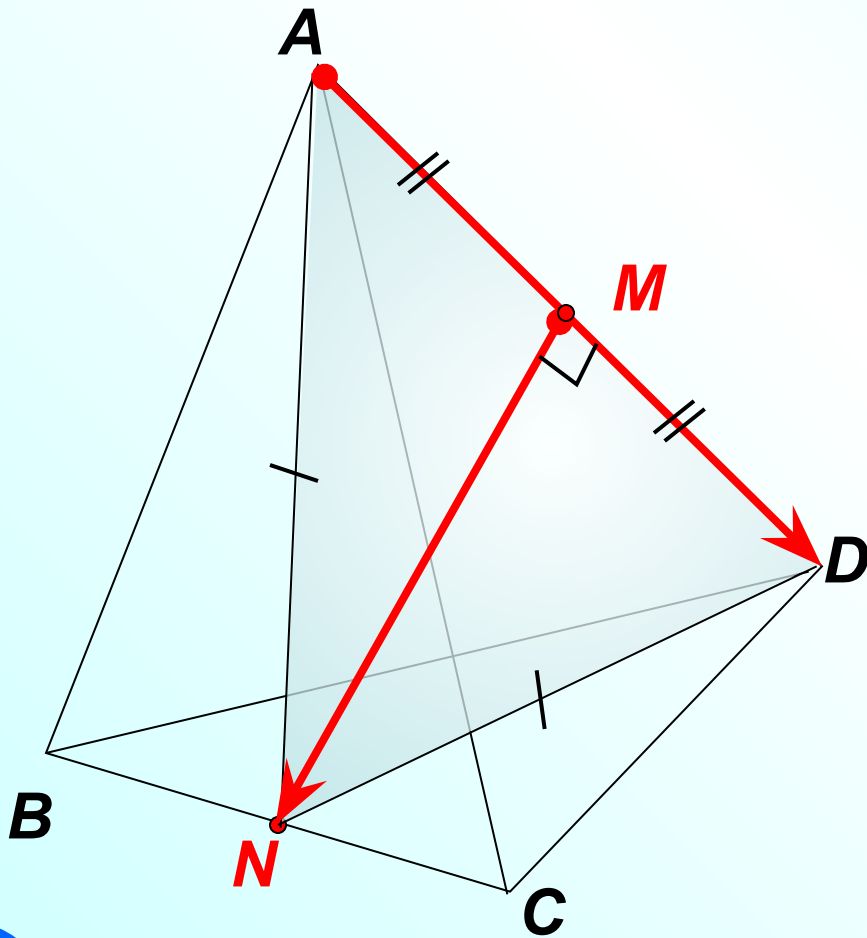
$$\overrightarrow{A_1 O_1} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1}$$

$$\overrightarrow{D_1 O_1} \cdot \overrightarrow{B_1 O_1}$$

$$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1 B}$$



Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$



Маленький тест

На каком расстоянии от плоскости xOy находится точка $A(2; -3; 5)$

1

2

ПОДУМАЙ

!

2

5

ВЕРНО!

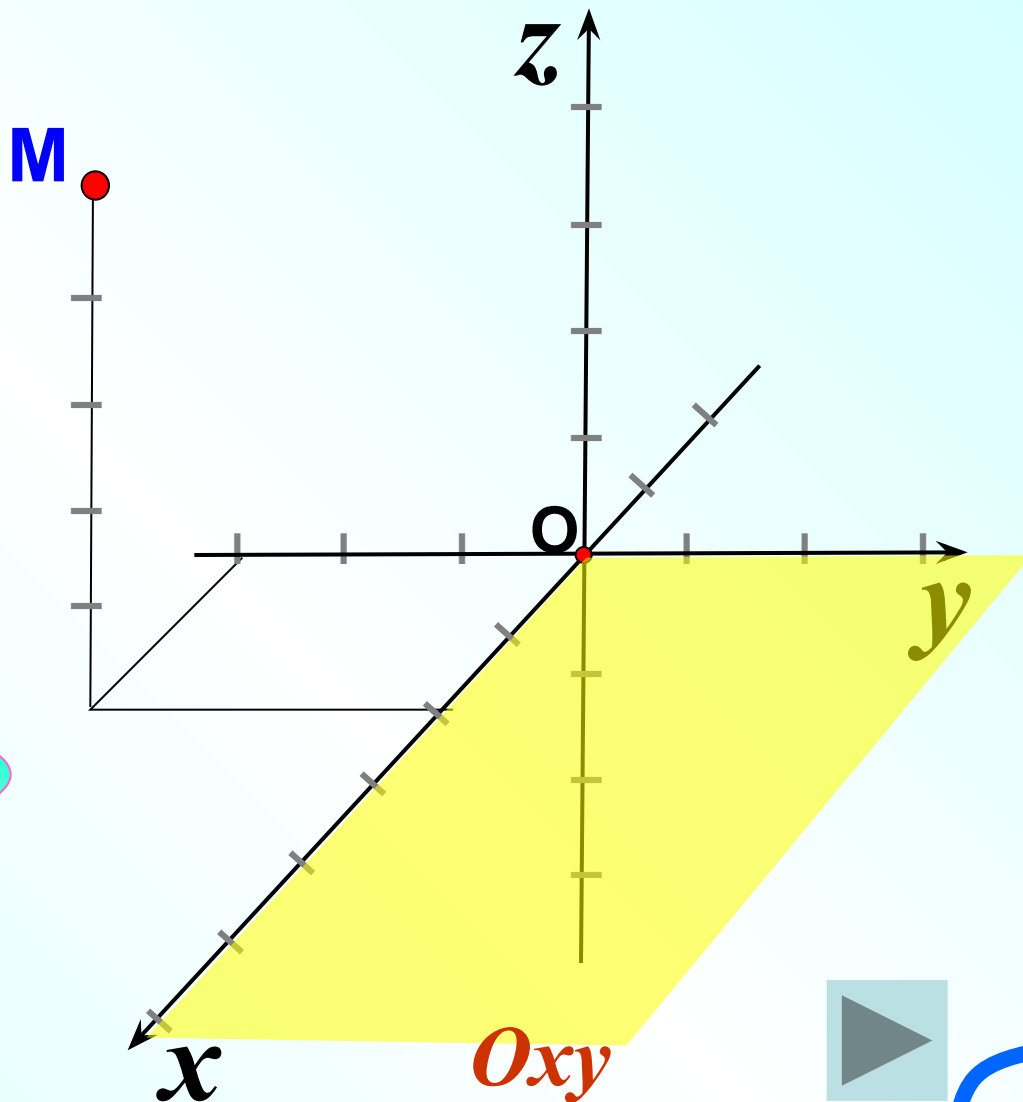
3

3

ПОДУМАЙ

!

Проверка



На каком расстоянии от начала координат находится точка $A(-3; 4; 0)$

1

5;

2

4;

3

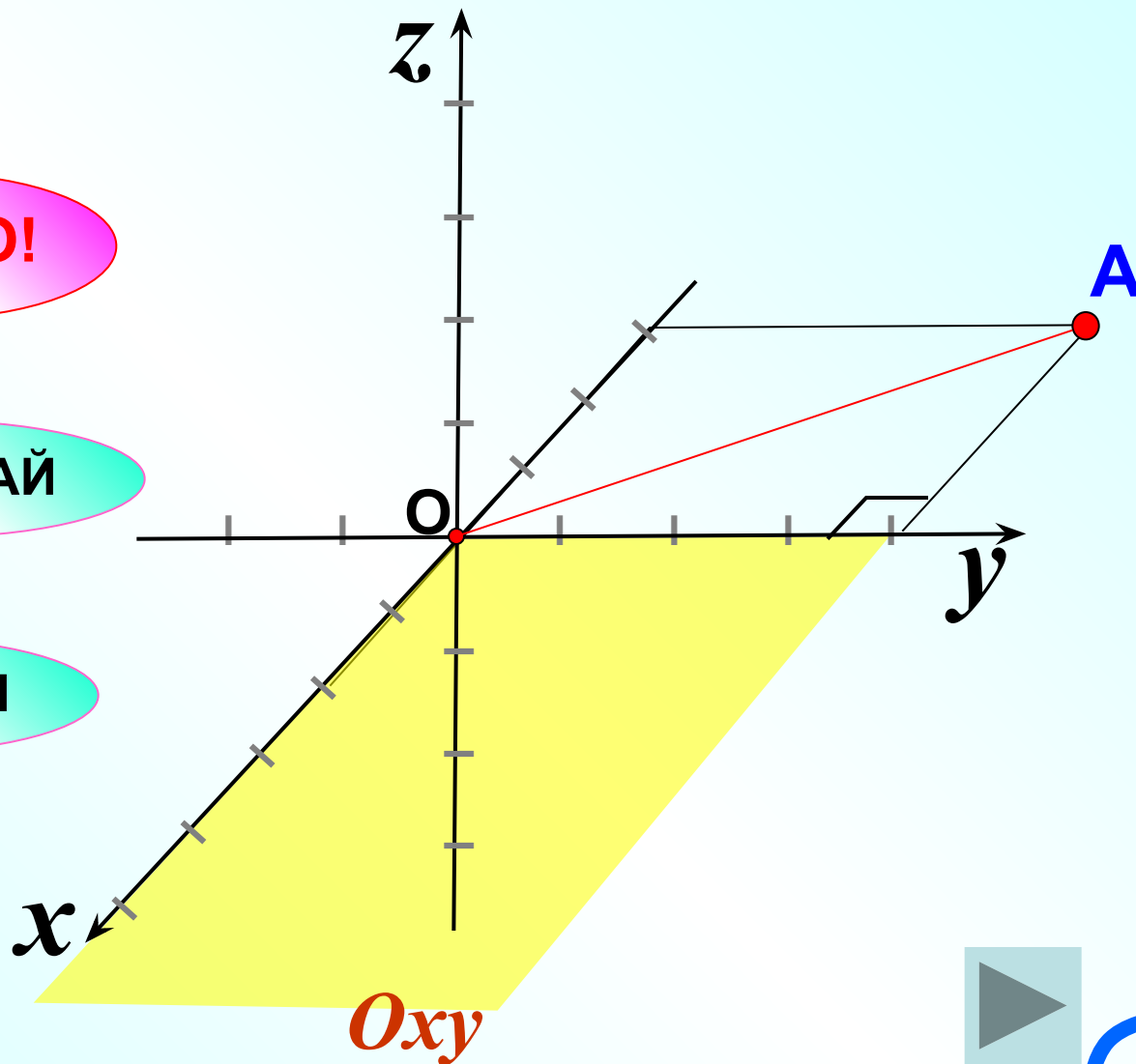
3.

ВЕРНО!

ПОДУМАЙ!

ПОДУМАЙ!

Проверка



Найти координаты середины отрезка, если концы его
имеют координаты $A(-3; 2; -4)$ и $B(1; -4; 2)$

$$C\left(\frac{-3+1}{2}; \frac{2+(-4)}{2}; \frac{-4+2}{2}\right)$$

ПОДУМАЙ

!

1 $C(-2; 1; -1)$

ВЕРНО!

2 $C(-1; -1; -1)$

ПОДУМАЙ

!

3 $C(-2; -2; -2)$

Проверка



Дан квадрат ABCD.

Найдите угол между векторами $\vec{AC}$ и $\vec{DA}$.

1 135° ;

ВЕРНО!

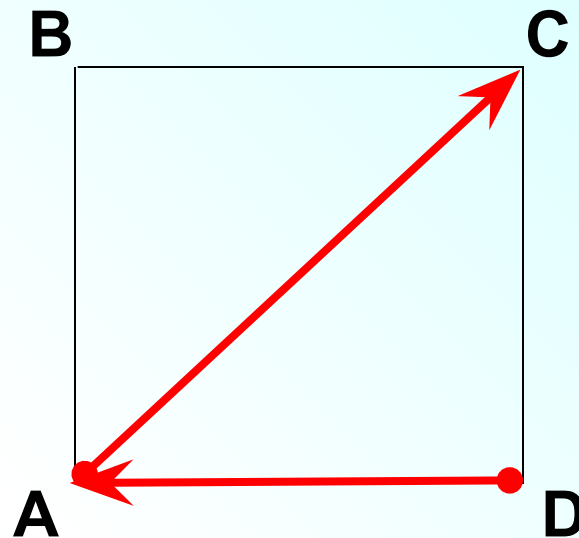
2 45° ;

ПОДУМАЙ
!

3 90° .

ПОДУМАЙ
!

Проверка



Скалярное произведение координатных векторов

$\vec{k}$ и $\vec{j}$:

равно нулю, т.к. угол между
векторами прямой

1

1

ПОДУМАЙ

!

2

-1

ПОДУМАЙ

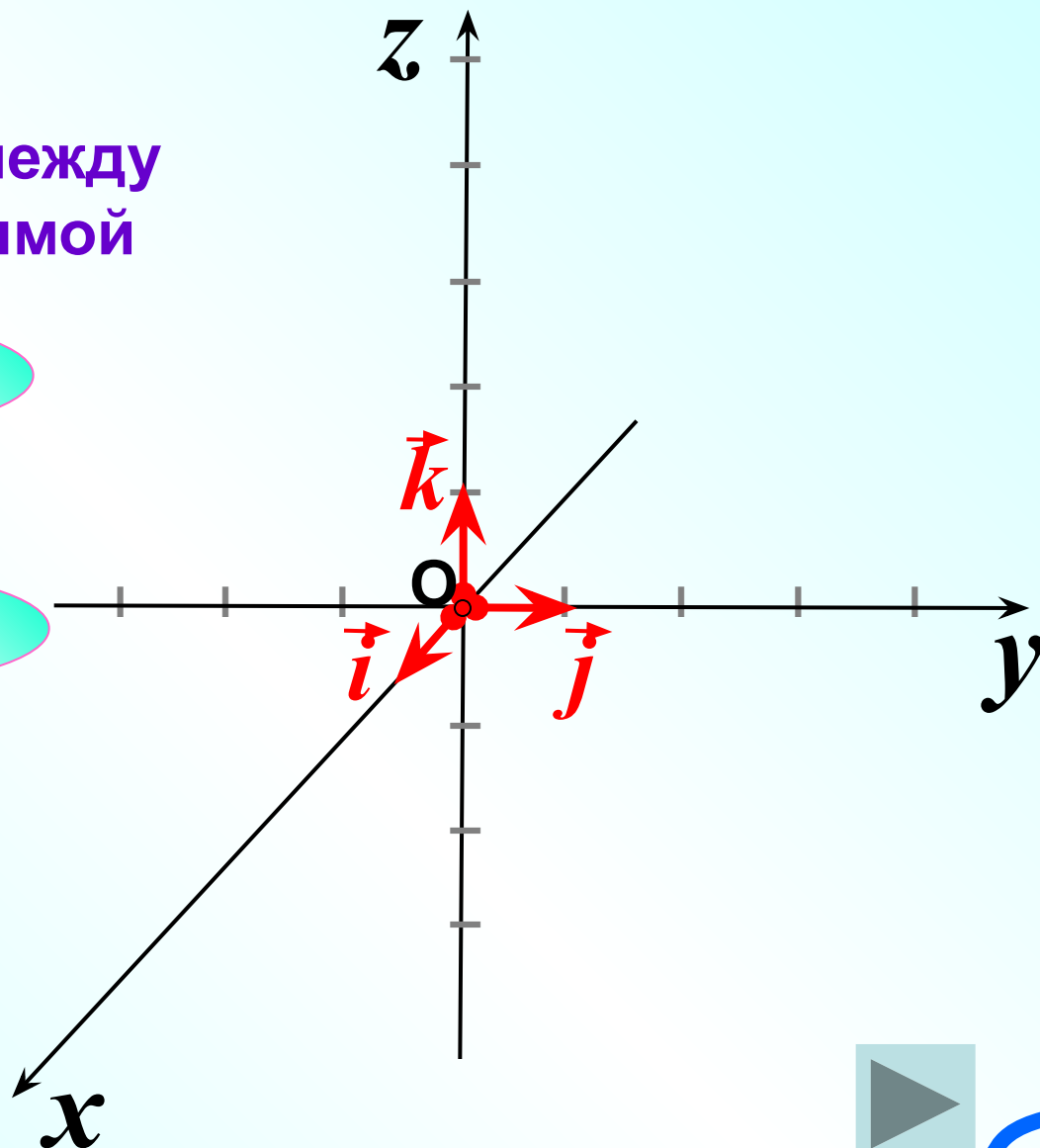
!

3

0

ВЕРНО!

Проверка



Скалярный квадрат вектора $7\vec{i}$ равен:

ВЕРНО!

Скалярный квадрат вектора
равен квадрату его длины.

1 49

2 7

ПОДУМАЙ
!

3 1

ПОДУМАЙ
!

$$(7\vec{i})^2 = |7\vec{i}|^2 = 7^2 = 49$$

Проверка



Записать координаты вектора $\vec{n} = -8\vec{j} + \vec{i}$

1 $\vec{n} \{-8; 1; 0\}$

ПОДУМАЙ

!

2 $\vec{n} \{1; -8; 0\}$

ВЕРНО!

3 $\vec{n} \{1; 0; -8\}$

ПОДУМАЙ

!



Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

ПОДУМАЙ

!

1 50°

ПОДУМАЙ

!

2 60°

ВЕРНО!

3 120°

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**

Проверка



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб, ребро которого равно 1.
 Найдите скалярное произведение векторов $\vec{AD_1}$ и $\vec{BC}$.

$$\vec{BC_1} \cdot \vec{BC} = |\vec{BC_1}| \cdot |\vec{BC}| \cos 45^\circ = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

1

4;

ПОДУМАЙ

!

2

2;

ПОДУМАЙ

!

3

1.

ВЕРНО!

Проверка (3)

