

## Проблема качества систем автоматического управления

Величины, определяющие качество процессов в САУ, называются показателями качества (характеристиками качества). Они являются количественными характеристиками.

Пример 1. Стоимость системы  $C$ . 2. Установившаяся ошибка системы  $e_{уст}$  и т.д.

Диаграмма качества Вышнеградского И.А. ( $n=3$ ).

Наиболее полно статические и динамические характеристики отражает ошибка системы

$$e(t) = g(t) - y(t).$$

Для оценки качества:

1. На вход системы подают типовые воздействия.
2. Определяется не мгновенное значение ошибки, а проверяются некоторые условия, которым должна удовлетворять САУ.

Эти условия называются критериями качества. Они являются качественными характеристиками.

Пример 2.  $\min C$  – КК. 2.  $e_{уст} < e_{доп}$  и т.д..

## Основные критерии качества

- Критерии точности. Определяют условия, которым должна удовлетворять ошибка системы при некоторых типовых внешних воздействиях;
- Критерии запаса устойчивости. Определяют условия, которым должен удовлетворять запас устойчивости;
- Критерии быстродействия. Определяют ограничения на длительность переходного процесса в системе;
- Комплексные (интегральные) критерии. Дают обобщенную оценку некоторых свойств системы.

# Показатели точности

## Основные подходы к оценке точности



**Детерминистский** – внешние воздействия представляют собой известные функции от времени. Оценка точности производится по величине  $e_{уст}$ , возникающей при подаче на САУ типовых внешних воздействий.

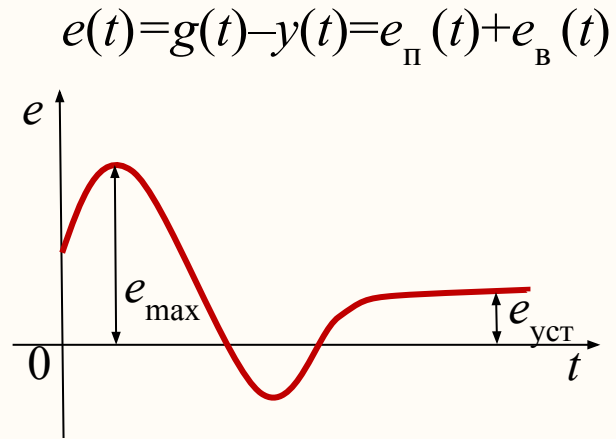
Недостаток – система рассчитывается на максимальные внешние воздействия. Т.о. неоправданно завышаются требования к системе, что приводит к усложнению.



**Вероятностный** – внешние воздействия представляют собой случайные (чаще стационарные) процессы. Оценка точности производится по вероятностным характеристикам ошибки (например, по величине СКО).

Недостаток – более сложные расчеты.

## Детерминистский подход



### Показатель точности:

$$e_{\text{уст}} = e_{\text{в}}(t) + e_{\text{чз}}(t) = e_{\text{в}}^g(t) + e_{\text{в}}^f(t) + e_{\text{чз}}(t) = e_{\text{уст}}^g(t) + e_{\text{уст}}^f(t) + e_{\text{чз}}(t),$$

где  $e_{\text{в}}(t)$  – методическая составляющая;

$e_{\text{чз}}(t)$  – инструментальная составляющая.

### Основные типовые режимы:

№ п/п	Режим	Воздействие	
		задающее	возмущающее
1	Неподвижного состояния	$g(t) = g_0 \cdot 1(t)$	$f(t) = f_0 \cdot 1(t)$
2	Движения с постоянной скоростью	$g(t) = Vt \cdot 1(t)$	$f(t) = f_0 \cdot 1(t)$
3	Движения с постоянным ускорением	$g(t) = \frac{at^2}{2} \cdot 1(t)$	$f(t) = f_0 \cdot 1(t)$
4	Движения по гармоническому закону	$g(t) = g_m \sin \omega_k t$	$f(t) = f_0 \cdot 1(t)$ или $f(t) = 0$

## Определение установившейся ошибки в первых трех режимах

$$e_{\text{уст}} = e_{\text{уст}}^g(t) + e_{\text{уст}}^f(t) + e_{\text{уст}}^{\text{чз}}(t),$$

$$e_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t), \text{ где } (e)(t) \text{ решение ДУ: } \mathcal{D} p e = \mathcal{C} p g - (\mathcal{R} p) f.$$

### Теорема о конечном значении преобразования Лапласа

$$\Phi_{\text{уст}} p \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \Phi \lim_{p \rightarrow 0} p E(p), \text{ где } E(p) = e(p) - f(p).$$

### 1. Оценка точности в режиме неподвижного состояния

$$G(p) = L\{g_0 \cdot 1(t)\} = \frac{g_0}{p}; \quad F(p) = L\{f_0 \cdot 1(t)\} = \frac{f_0}{p}.$$

Установившаяся ошибка называется **статической**.

$$e_{\text{уст}} = e_{\text{ст}} = e_{\text{ст}}^g + e_{\text{ст}}^f = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \Phi_e(p) g_0 - \Phi_f(p) f_0 \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{g_0}{1+W(p)} \right] - \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{W_f(p)}{1+W(p)} f_0 \right].$$

ПФ РС можно представить в виде: ~~Исходная статическая система~~  

$$\frac{B(p)}{C(p)} \cdot \frac{kB_1(p)}{p^r C_1(p)}$$

(число интегрирующих звеньев, стоящих в прямой цепи и неохваченных местной обратной связью)

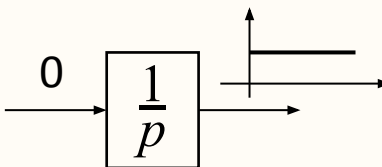
Установившаяся (статическая) ошибка по задающему воздействию

$$e_{\text{ст}}^g = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{g_0}{1 + W(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g_0 p^r C_1(p)}{p^r C_1(p) + kB_1(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g_0 p^r C_1(0)}{p^r C_1(0) + kB_1(0)}.$$

Поскольку  $B_1(0)=1$  и  $C_1(0)=\pm 1$ , то  $e_{\text{ст}}^g$  полностью зависит от  $r$  !!!

При  $r = 0$  САУ – статическая; при  $r > 0$  САУ – астатическая.

При  $r = 0$   $e_{\text{ст}}^g = \frac{g_0 C_1(0)}{C_1(0) + k} = \begin{cases} \frac{g_0}{1+k} \text{ при } \mathcal{C}(0) \neq 1; \\ \frac{-g_0}{-1+k} \text{ при } \mathcal{C}(0) = 1. \end{cases}$

При  $r > 0$   $e_{\text{ст}}^g = 0.$  

The diagram shows a block labeled  $\frac{1}{p}$  with an input of 0. The output is a step function that starts at 0 and then jumps to a constant value, illustrating that the steady-state error is zero for a step input when the system has an integrator.

Установившаяся (статическая) ошибка по возмущающему воздействию

$$e_{\text{ст}}^f = \lim_{p \rightarrow 0} [-\Phi_f(p) f_0] = -\lim_{p \rightarrow 0} \frac{W_f(p) f_0}{1 + W(p)}.$$

При  $r = 0$

$$e_{\text{ст}}^f = -\frac{W_f(0) f_0}{1 + W(0)} = \begin{cases} -\frac{k_f f_0}{1 + k}, & \text{при } W(0) = k \text{ и } W_f(0) = k_f; \\ \frac{k_f f_0}{1 - k}, & \text{при } W(0) = -k \text{ и } W_f(0) = -k_f. \end{cases}$$

При  $r > 0$   $e_{\text{ст}}^f$  может обращаться в 0, а может и не обращаться в 0 в зависимости от  $W_f(p)$ .

По каким-то возмущениям ошибка может исчезать, а по каким-то нет.

## 2. Оценка точности в режиме движения с постоянной скоростью

$$G(p) = L\{Vt \cdot 1(t)\} = \frac{V}{p^2}; \quad F(p) = L\{f_0 1(t)\} = \frac{f_0}{p}.$$

Установившаяся ошибка по задающему воздействию называется **скоростной**.

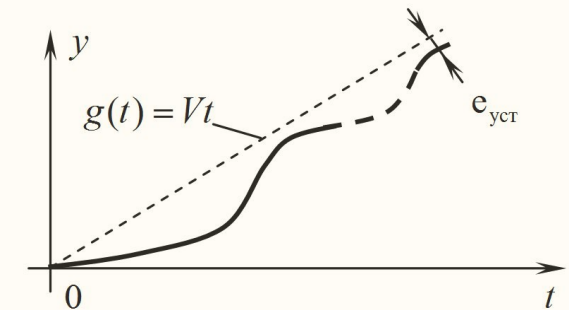
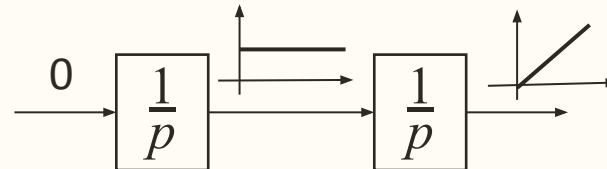
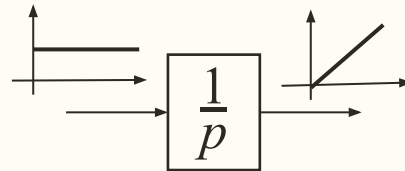
$$e_{уст}^g = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{V}{p} \cdot \frac{1}{p[1+W(p)]} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{V}{pW(p)} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{r-1} C_1(p) V}{k B_1(p)} = \frac{C_1(0) V}{k} \lim_{p \rightarrow 0} p^{r-1} = \pm \frac{V}{k} \lim_{p \rightarrow 0} p^{r-1}.$$

При  $r = 0$   $e_{ск} \rightarrow \infty$ .

При  $r = 1$   $e_{ск} = \pm \frac{V}{k}$

При  $r > 1$   $e_{ск} = 0$



Установившаяся ошибка по возмущающему воздействию  $e_{ст}^f = \frac{k_f f_0}{k}$ .



### 3. Оценка точности в режиме движения с постоянным ускорением

$$G(p) = L \left\{ \frac{at^2}{2} \cdot 1(t) \right\} = \frac{a}{p^3}; \quad F(p) = L \{ f_0 1(t) \} = \frac{f_0}{p}.$$

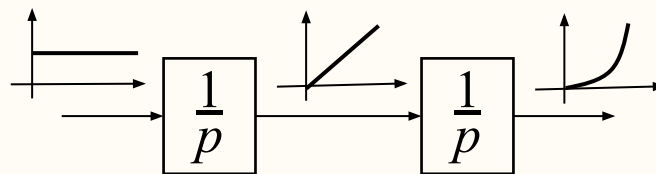
Установившаяся ошибка по задающему воздействию называется **ошибкой по ускорению**.

$$e_{уст}^g = \Phi_a = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot e(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p^2} \cdot e(p) = \frac{C_1(0)a}{k} \lim_{p \rightarrow 0} p^{r-2} = \pm \frac{a}{k} \lim_{p \rightarrow 0} p^{r-2}.$$

При  $r = 0, 1$   $e_a \rightarrow \infty$ .

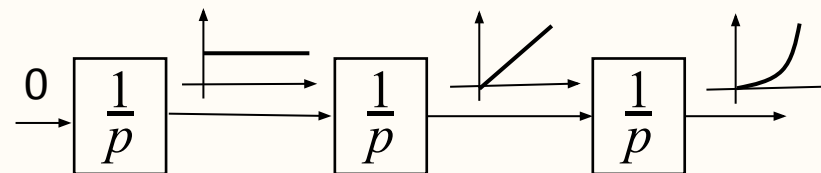
При  $r = 2$

$$e_a = \pm \frac{a}{k}$$



При  $r > 2$

$$e_a = 0$$

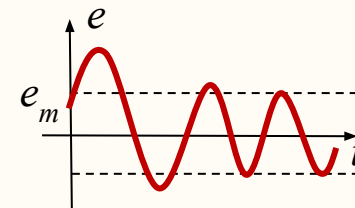


Установившаяся ошибка по возмущающему воздействию  $e_{ст}^f = \frac{k_f f_0}{k}$ .

#### 4. Оценка точности в режиме движения по гармоническому закону

$$g(t) = g_m \sin \omega_k t, f(t) = \begin{cases} f_0 \cdot 1(t); \\ 0. \end{cases}$$

Ошибка :  $e(t) = e_m (\sin \omega_k t + \beta)$ , где  $e_m = e_m(\omega_k)$ ;  $\beta = \beta(\omega_k)$ .



Показатель точности – амплитуда ошибки  $e_m$

$$\text{ПФ ЗС по ошибке: } \Phi_e(p) = \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{1}{1+W(p)} \Rightarrow \frac{e_m}{g_m} = |\Phi_e(j\omega_k)| = \frac{1}{|1+W(j\omega_k)|} \Rightarrow$$

$$e_m = \frac{g_m}{|1+W(j\omega_k)|},$$

Поскольку в реальных системах  $g_m \gg e_m$ , то справедливо соотношение

$$|1+W(j\omega_k)| \gg 1 \quad ( + W ) \cdot j\omega_k \approx |W(j\omega_k)| \quad \cdot \quad e_m \approx \frac{g_m}{|W(j\omega_k)|}$$

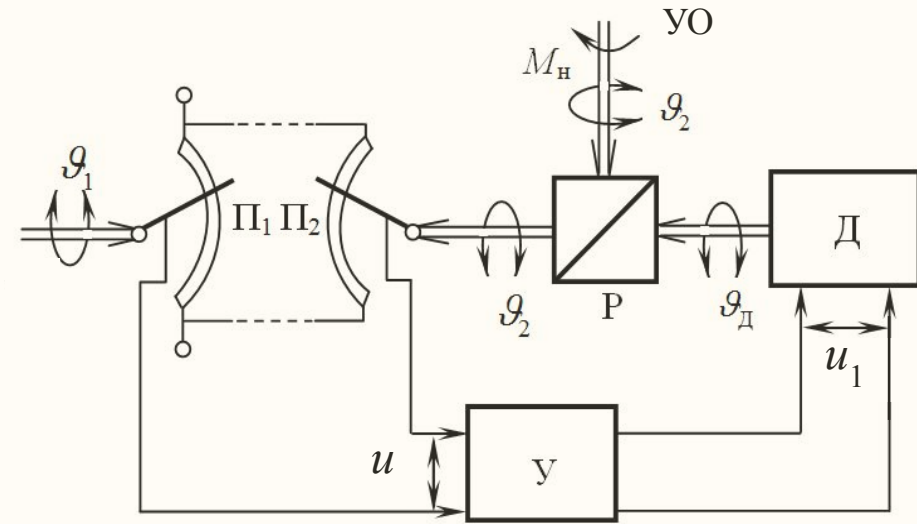
Полная установившаяся ошибка  $e_{уст} = e_m + \frac{f}{\sigma}$ .

### Пример. ЭМДСС.

Есть ли в системе интегрирующее звено?

Сравнивающее устройство  
(потенциметрические датчики)

коэффициент передачи  $W_{\text{пд}}(p) = k_1, k_1 -$



Усилитель  $T_y \dot{u}_1 + u_1 = k_y u \Rightarrow W_y(p) = \frac{k_y}{T_y p + 1}, k_y, T_y -$  коэффициент передачи и пост. времени.

Двигатель (УО)  $T_M \ddot{\vartheta}_д + \dot{\vartheta}_д = k_д u_1 - k_M M'_н \Rightarrow W_0(p) = \frac{\vartheta_д}{M} = \frac{k_д}{p(T_M p + 1)}; W_0^f(p) = \frac{\vartheta_д}{M'_н} = \frac{-k_M}{p(T_M p + 1)},$   
 коэффициенты передачи по напряж и моменту на валу двигателя;  $T_M -$  постоянная времени;  
 $M'_н -$  момент нагрузки, приведенный к валу двигателя;

Редуктор  $\vartheta_2 = k_p \vartheta_д \Rightarrow W_p(p) = k_p, k_p -$  коэффициент передачи редуктора.

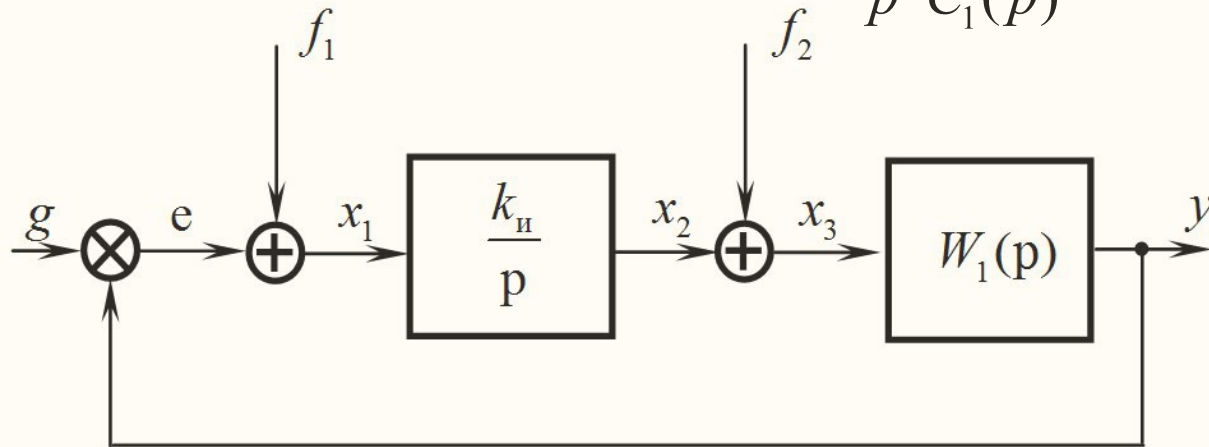
$$\vartheta_1 - g; \vartheta_2 - y; e = \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2; f = M'_H.$$

$$\text{ПФ РС: } W(p) = \frac{k}{p(T_y p + 1)(T_M p + 1)}, \quad k = k_{\text{ид}} k_y k_d k_p;$$

$$\text{ПФ РС по } f(M'_H): W_f(p) = \frac{k_f}{p(T_M p + 1)}, \quad k_f = -k_m k_p.$$

$$\begin{aligned} e_{\text{СТ}}^g &= \vartheta_{\text{СТ}}^{\vartheta_1} = 0; \\ e_{\text{СК}} &= \vartheta_{\text{СК}} = \frac{\dot{\vartheta}_{10}}{k} \neq 0; \\ e_a &= \vartheta_a = \infty; \\ e_m &\approx \frac{g_m \omega_k \sqrt{T_y^2 \omega_k^2 + 1} \sqrt{T_M^2 \omega_k^2 + 1}}{k}; \\ e_{\text{СТ}}^f &= \vartheta_{\text{СТ}}^{M'_H} = \frac{k_f M'_H}{k} \neq 0 \end{aligned}.$$

Пример.  $f_1(t) = f_{10} \cdot 1(t)$ ;  $f_2(t) = f_{20} \cdot 1(t)$ ;  $W_1(p) = \frac{k_1 B_1(p)}{p^{r_1} C_1(p)}$ .



Передаточные функции РС:

$$W(p) = \frac{k_u}{p} W_1(p) = \frac{k_u k_1 B_1(p)}{p^{r_1+1} C_1(p)} = \frac{k B_1(p)}{p^r C_1(p)}, \quad k = k_u k_1; \quad W_{f_1}(p) = \frac{k B_1(p)}{p^r C_1(p)}; \quad W_{f_2}(p) = \frac{k_1 B_1(p)}{p^{r_1} C_1(p)}.$$

Порядок астатизма системы:  $r = r_1 + 1$ .

Установившаяся ошибка:  $e_{уст} = e_{уст}^g + e_{см}^{f_1} + e_{см}^{f_2}$ .

$$e_{см}^{f_1} = \frac{k_u k_1 f_{10}}{k} \neq -f_{10}, \quad \text{так как } r_1 = r, \quad r_{см}^{f_2} = 0, \quad 1 < \dots$$

## Оценка качества переходных процессов

Ошибка САУ:

$$e(t) = e_{\Pi}(t) + e_{\text{В}}(t).$$

Рассматривается  $e_{\Pi}(t)$ !

Показатели качества переходных процессов (динамические характеристики)

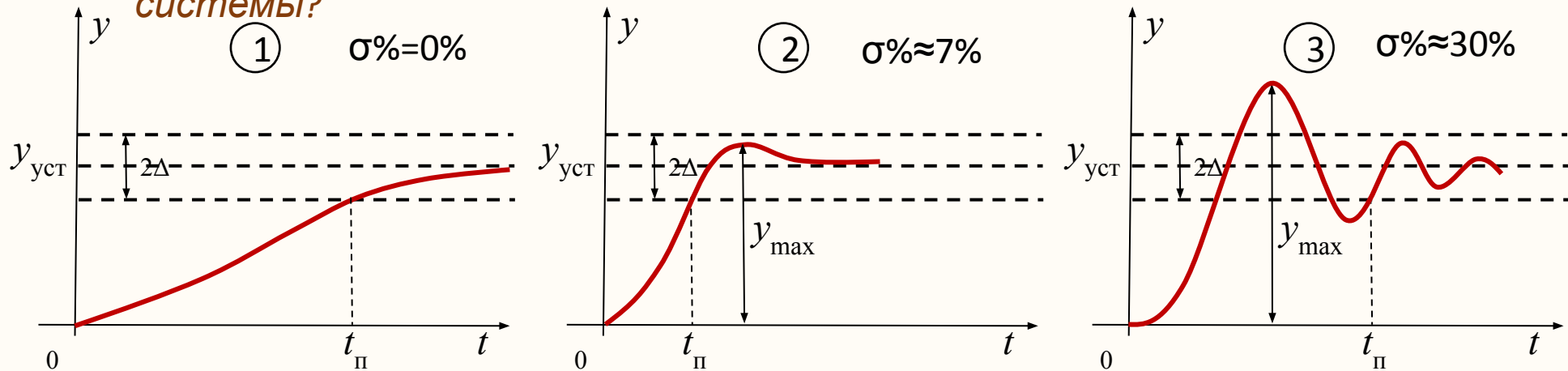
1. Запас устойчивости ЗС (характеризует удаленность САУ от КГУ).
2. Быстродействие (характеризуется длительностью переходного процесса  $t_{\Pi}$ ).  
(теоретически  $t_{\Pi} \rightarrow \infty$ ).

Основные пути оценивания качества переходных процессов

1. По переходной характеристике ЗС.
2. По частотным характеристикам РС.
3. По расположению корней ХУ ЗС.
4. По интегральным показателям.

# Оценка качества переходных процессов по переходной

Переходная характеристика системы? характеристике ЗС оценить точность



**Запас устойчивости ЗС –  
перерегулирование**

$\sigma\%$  (приемлемое значение  $\sigma\% = 10 \div 30\%$ ),  $\sigma\% < 10\%$  – большой ЗУ;  $\sigma\% > 30\%$  – малый ЗУ.

$$\sigma\% = \frac{y_{\max} - y_{уст}}{y_{уст}} \cdot 100\%$$

**Быстродействие – длительность переходного процесса  $t_{\Pi}$ .**

Алгоритм определения длительность переходного процесса  $t_{\Pi}$

1. задается коридор  $2\Delta$ ,  $\Delta = (0.01 \div 0.05)y_{уст}$ .
2. Определяется момент времени  $t_{\Pi}$ , начиная с которого выполняется условие  $|y(t) - y_{уст}| \leq \Delta$ .

Какой график лучше?

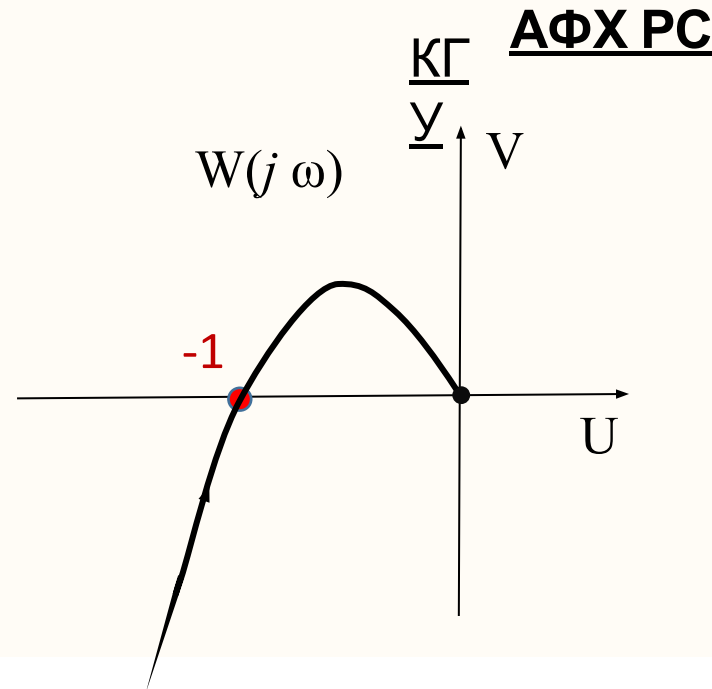
## Оценка качества переходных процессов по частотным характеристикам РС

1. Частотные характеристики строить проще, чем переходную характеристику.
2. Проще исследовать влияние параметров САУ на устойчивость.

### Показатели запаса устойчивости ЗС

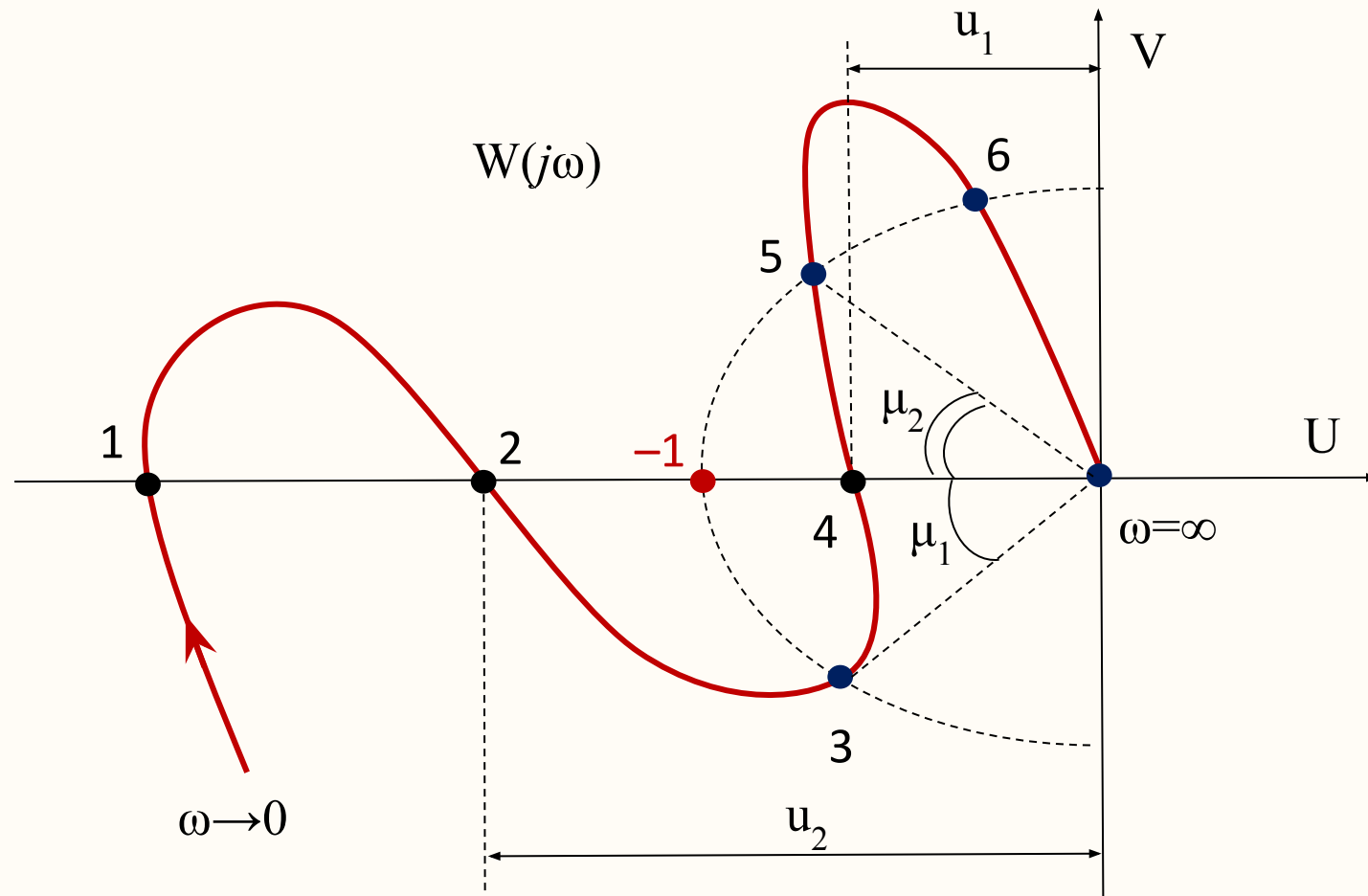
1. Запасы устойчивости по фазе  $\mu_3$  и по амплитуде  $L_3$ .
2. Показатель колебательности ЗС  $M$ .

### Определение запасов устойчивости ЗС по фазе и по амплитуде по



В т.  $(-1, j0)$   $\psi(\Omega)=-\pi$ ,  $A(\Omega)=1$ .



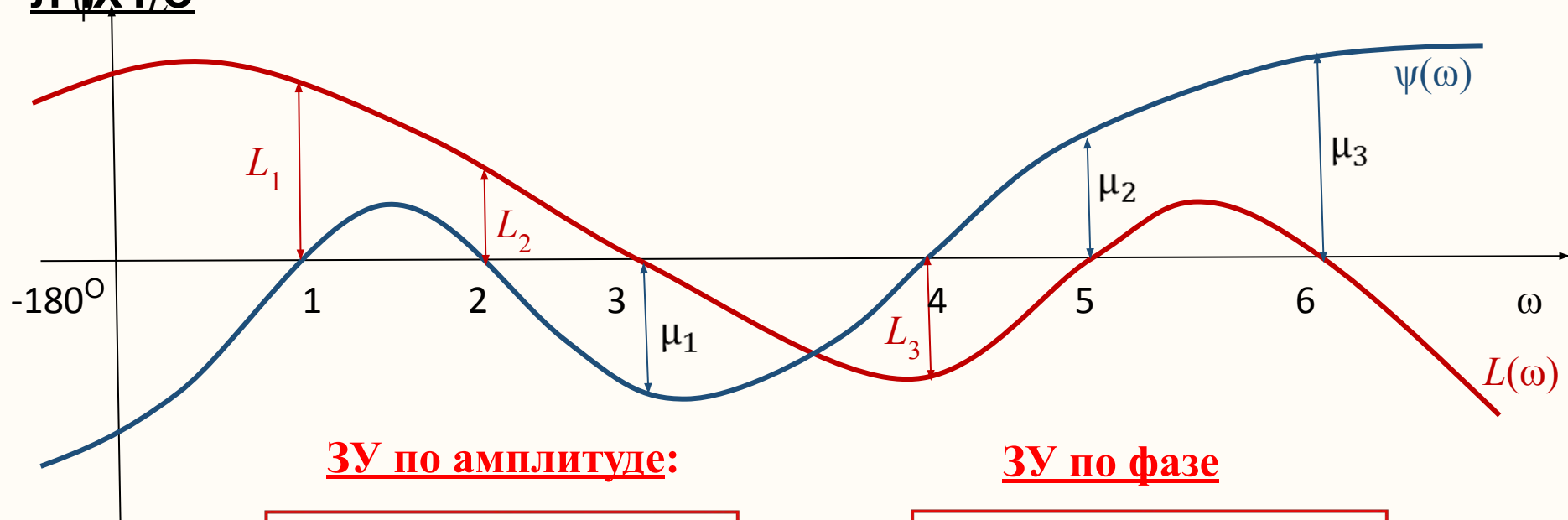


Точки 2 и 4 – ЗУ по амплитуде  $L_1 = 20 \lg \frac{1}{u_1}$ ;  $L_2 = 20 \lg u_2 \Rightarrow L_3 = \min \{L_1, L_2\}$

Точки 3 и 5 – ЗУ по фазе:  $\mu_3 = \min \{ \mu_1, \mu_2 \}$

Приемлемый запас устойчивости по амплитуде  $L_3 = 6 \div 20$  дб, а по фазе  $\mu_3 = 30 \div 60$  град.

# Определение запасов устойчивости ЗУ по фазе и по амплитуде по ЛЧХ РС



ЗУ по амплитуде:

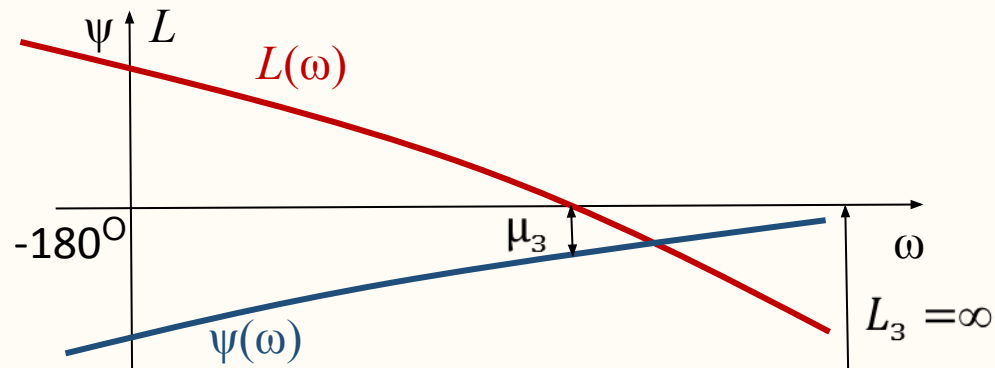
$$L_3 = \min\{L_1, L_2, L_3\}$$

ЗУ по фазе

$$\mu_3 = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$$

## Алгоритм определения ЗУ ЗС по фазе и амплитуде по ЛЧХ.

Пример.

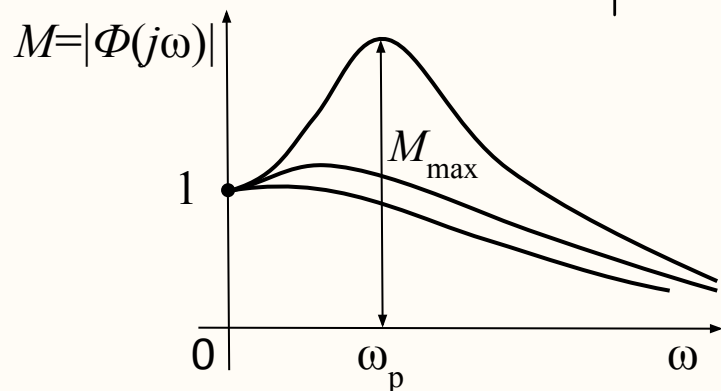


## Показатель

### колебательности ЗС

**Модуль ЧПФ ЗС**

$$M = |\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|$$



Если на резонансной частоте  $|\Phi(j\omega_p)| \rightarrow \infty$ , т.е.  $W(j\omega_p) \rightarrow -1$ , то САУ на КГУ.

**$M_{\max}$  – показатель колебательности ЗС.**

$M_{\max} = 1.1 \div 1.5$  – хороший ЗУ;

$M_{\max} = 1.5 \div 2$  – удовлетворительный ЗУ;

$M_{\max} > 2$  – малый ЗУ;

$M_{\max} = \infty$  – КГУ.

$$M = |\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|.$$

Пусть  $M(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ . Тогда

$$= \left| \frac{U + jV}{1 + U + jV} \right| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(U+1)^2 + V^2}} \Rightarrow$$

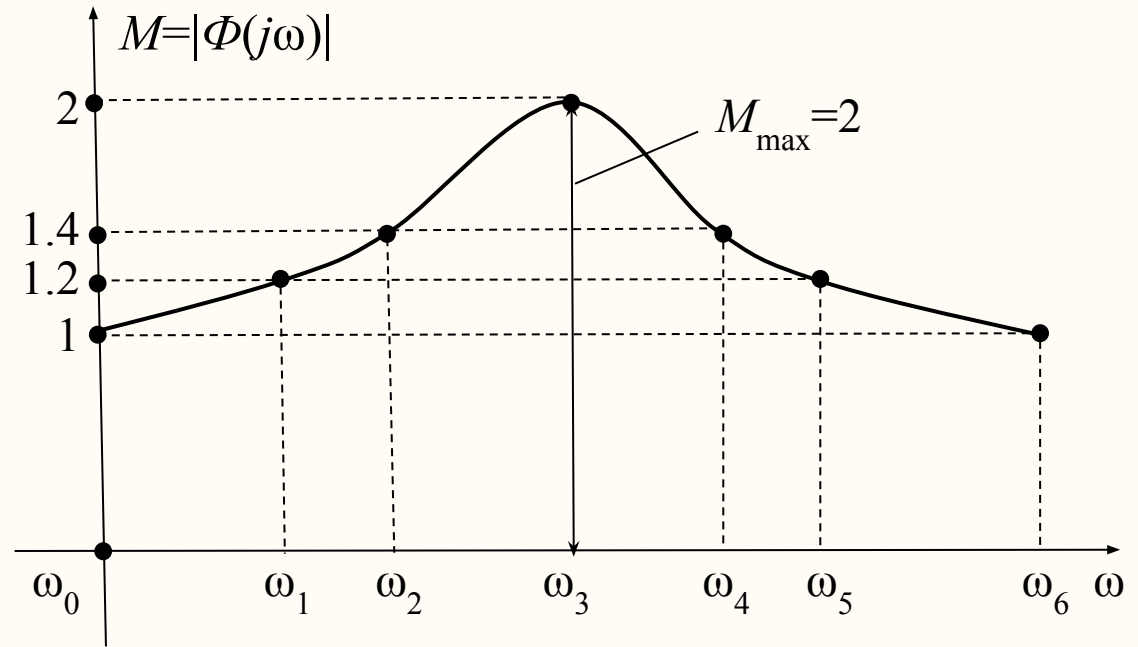
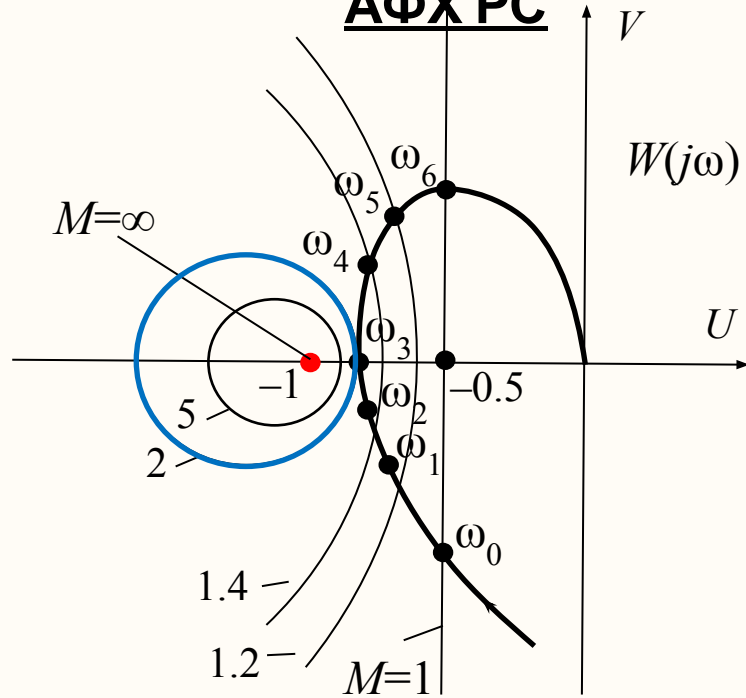
$$\boxed{(U+1)^2 + V^2 = R^2},$$

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1} > \quad R = \frac{M}{M^2 - 1}$$

При  $M=1$  – прямая линия, параллельная оси ординат и проходящая через т.  $(-0.5, j0)$ .

При  $M=\infty$  – т.  $(-1, j0)$ .

## Определение показателя колебательности ЗС по АФХ РС



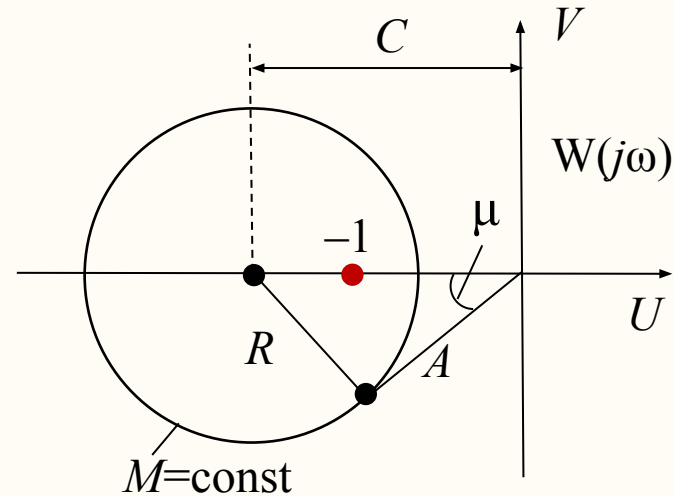
На плоскости АФХ показатель колебательности  $M$  определяет запретную область (круг), внутрь которой не должна заходить АФХ. Если АФХ касается этой области, то показатель колебательности равен  $M$ .

### Алгоритм определения показателя колебательности по АФХ

1. Строится АФХ.
2. Проверяется устойчивость ЗС.
3. Методом подбора определяется показатель колебательности и соответствующая ему окружность, касающаяся АФХ.

## Определение показателя колебательности ЗС по ЛЧХ РС

Отображение окружности при  $M=\text{const}$  с плоскости АФХ на плоскость ЛЧХ

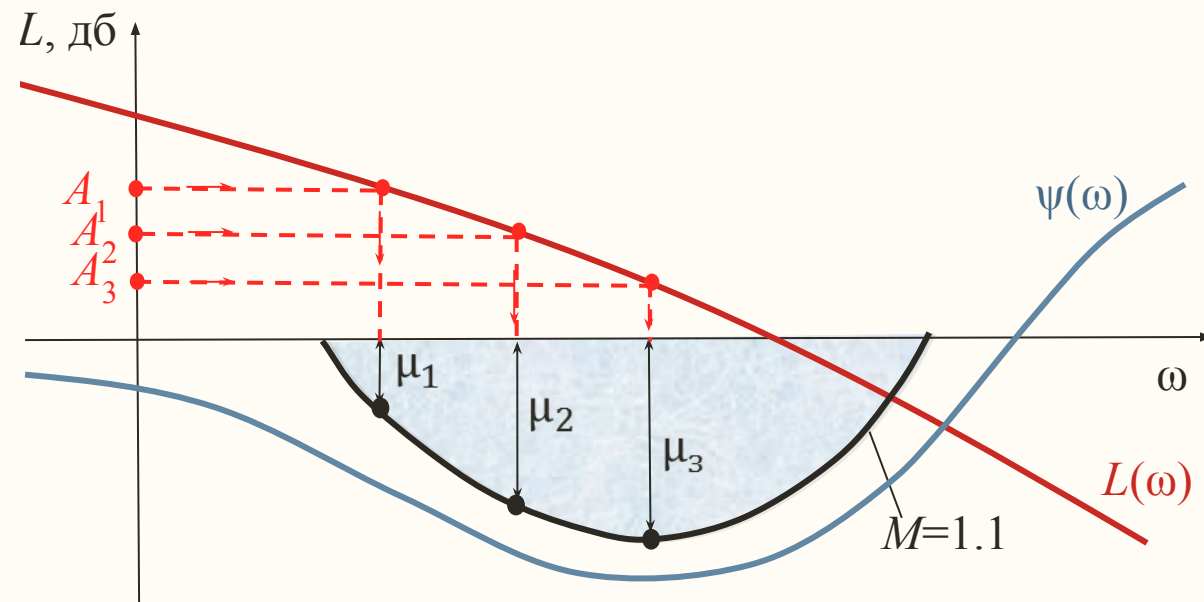
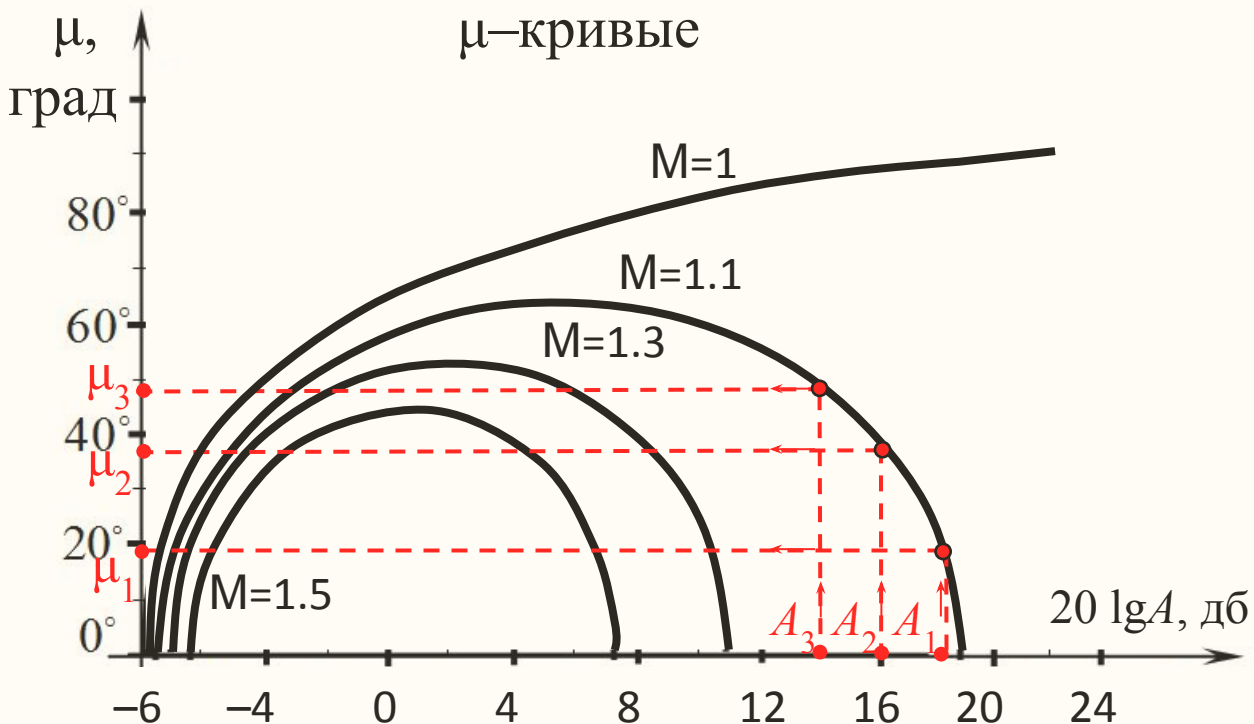


По формуле косинусов:  $R^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos \mu \Rightarrow \cos \mu = \frac{A^2 + C^2 - R^2}{2AC}$

$$C^2 = \left( \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 \text{ и } R^2 = \left( \frac{M}{M^2 - 1} \right)^2, \quad C^2 \text{ и } R^2 \cos^2 \frac{M^2}{M^2 - 1} = C^2 \quad \mu = \frac{A^2 + C}{2AC} \Rightarrow \boxed{\mu = \arccos \frac{A^2 + C}{2AC}}$$

Задаваясь значениями модуля  $A=|W(j\omega)|$  (или  $20\lg A=20\lg|W(j\omega)|$ ), можно построить графики изменения  $\mu$  для различных значений  $M$ , т.е. графики  **$\mu$ -кривых**. С помощью  $\mu$ -кривых окружности с плоскости АФХ можно отобразить на плоскости ЛЧХ.

## Определение показателя колебательности ЗС по ЛЧХ РС



Для того, чтобы показатель колебательности был не больше заданного ЛФХ не должна заходить в запретную область. Если ЛФХ касается этой области, то показатель колебательности равен заданному.

### Алгоритм определения показателя колебательности по ЛЧХ

1. Строится ЛЧХ.
2. Проверяется устойчивость ЗС.
3. Методом подбора выбирается показатель колебательности, при котором запретная область касается ЛФХ.

**Приближенное соотношение значений перерегулирования  $\sigma$  %  
и показателя колебательности замкнутой системы  $M$**

$M$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$\sigma$ %	13,8	18,4	26,5	31,6	37,2	40,4	44,2

## Оценивание быстродействия по частотным характеристикам РС

Показатель быстродействия – длительность переходного процесса  $t_{п}$ .

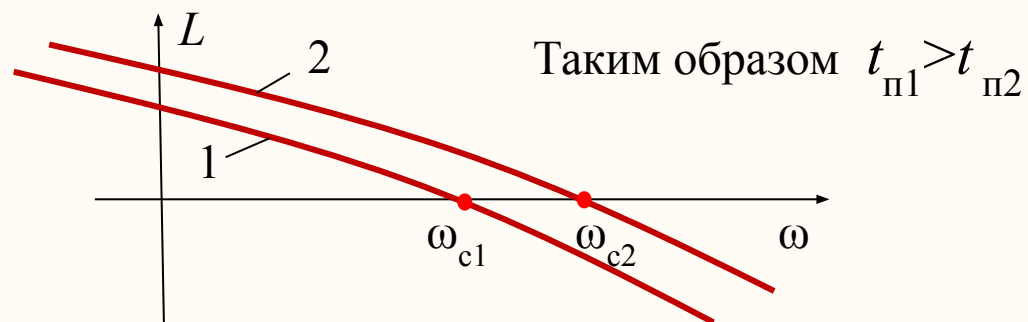
Точной количественной оценки быстродействия по ЧХ не существует.

Общее правило: *быстродействие тем выше, чем шире полоса частот сигналов, пропускаемых системой.*

Сигналы пропускаются системой без ослабления на тех частотах, где

$$|W(j\omega)| > 1.$$

На плоскости ЛЧХ



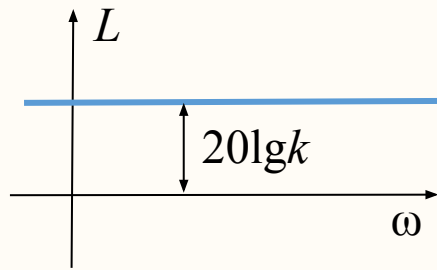
Полоса частот сигналов, пропускаемых системой, определяется частотой среза  $\omega_c$ .

При  $\omega < \omega_c$   $L(\omega) > 0$  и  $|W(j\omega)| > 1$ .

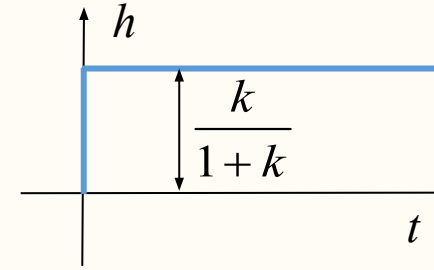
При  $\omega > \omega_c$   $L(\omega) < 0$  и  $|W(j\omega)| < 1$ .



Пример 1. Идеальное безынерционное звено  $W(p)=k$ .

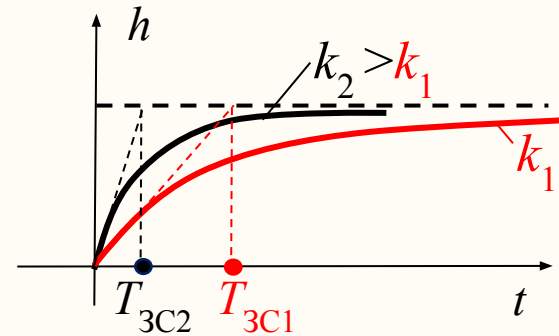
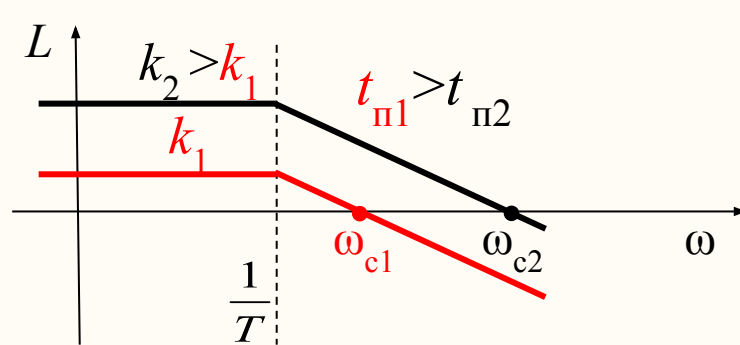


ПФ ЗС:  $\Phi(p) = \frac{k}{1+k} \Rightarrow$



Пример 2. Апериодическое звено 1-го порядка  $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$ .

ПФ ЗС:  $\Phi(p) = \frac{k}{Tp+1+k} = \frac{k_{3C}}{T_{3C}p+1}$ , где  $k_{3C} = \frac{k}{1+k}$ ;  $T_{3C} = \frac{T}{1+k}$ .



$t_{\Pi} \approx 3T_{3C}$

**Если  $k \uparrow$ , то  $\omega_c \uparrow$   $T_{3C} \downarrow$   $t_{\Pi} \downarrow$ .**