Проблема качества систем автоматического управления

Величины, определяющие качество процессов в САУ, называются ***показателями качества*** (характеристиками качества). Они являются количественными характеристиками.

Пример 1. Стоимость системы C. 2. Установившаяся ошибка системы $e_{уст}$ и т.д.

Диаграмма качества Вышнеградского И.А. (n=3).

Наиболее полно статические и динамические характеристики отражает ***ошибка системы***

$$e(t)=g(t)-y(t).$$

Для оценки качества:

1. *На вход системы подают типовые воздействия*.
2. *Определяется не мгновенное значение ошибки, а проверяются некоторые условия, которым должна удовлетворять САУ*.

Эти условия называются ***критериями качества***. Они являются качественными характеристиками.

Пример 2. min C – КК. 2. $e_{уст}<e_{доп}$ и т.д..

Основные критерии качества

- Критерии точности. Определяют условия, которым должна удовлетворять ошибка системы при некоторых типовых внешних воздействиях;
- Критерии запаса устойчивости. Определяют условия, которым должен удовлетворять запас устойчивости;
- Критерии быстродействия. Определяют ограничения на длительность переходного процесса в системе;
- Комплексные (интегральные) критерии. Дают обобщенную оценку некоторых свойств системы.

Показатели точности

Основные подходы к оценке точности

Детерминистский – внешние воздействия представляют собой известные функции от времени. Оценка точности производится по величине $e_{уст}$, возникающей при подаче на САУ типовых внешних воздействий.

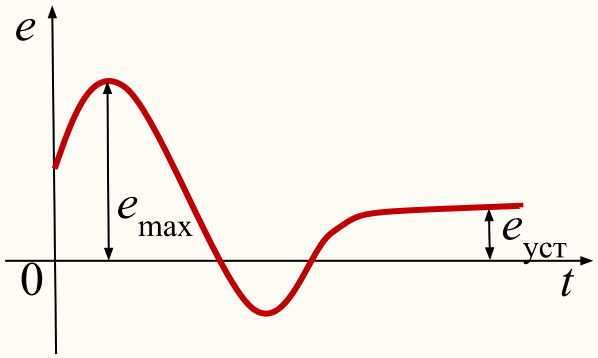
Вероятностный – внешние воздействия представляют собой случайные (чаще стационарные) процессы. Оценка точности производится по вероятностным характеристикам ошибки (например, по величине СКО).

Недостаток – система рассчитывается на максимальные внешние воздействия. Т.о. неоправданно завышаются требования к системе, что приводит к усложнению.

Недостаток – более сложные расчеты.

Детерминистский подход

$$e(t)=g(t)-y(t)=e_п(t)+e_в(t)$$



Показатель точности:

$$e_{уст}=e_в(t)+e_{чэ}(t)=e_в^g(t)+e_в^f(t)+e_{чэ}(t)=e_{уст}^g(t)+e_{уст}^f(t)+e_{чэ}(t),$$

где $e_в(t)$ *– методическая составляющая;*

$e_{чэ}(t)$ *– инструментальная составляющая.*

Основные типовые режимы:

№ п/п	Режим	Воздействие	
		задающее	возмущающее
1	Неподвижного состояния	$g(t)=g_0\cdot 1(t)$	$f(t)=f_0\cdot 1(t)$
2	Движения с постоянной скоростью	$g(t)=Vt\cdot 1(t)$	$f(t)=f_0\cdot 1(t)$
3	Движения с постоянным ускорением	$g(t)=\frac{at^2}{2}\cdot 1(t)$	$f(t)=f_0\cdot 1(t)$
4	Движения по гармоническому закону	$g(t)=g_m\sin\omega_k t$	$f(t)=f_0\cdot 1(t)$ или $f(t)=0$

Определение установившейся ошибки в первых трех режимах

$$e_{\text{уст}} = e^{g}_{\text{уст}}(t) + e^{f}_{\text{уст}}(t) + \cancel{e_{\text{чэ}}(t)},$$

$$e_{\text{уст}} = \lim_{t\to\infty} e(t), \text{ где } e(t) \text{ решение ДУ: } D(p)e = C(p)g - R(p)f.$$

Теорема о конечном значении преобразования Лапласа

$$\boxed{e_{\text{уст}} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{p\to 0} pE(p)}, \text{ где } E(p) = \Phi_e(p)G(p) - \Phi_f(p)F(p).$$

1. Оценка точности в режиме неподвижного состояния

$$G(p) = L\{g_0 \cdot 1(t)\} = \frac{g_0}{p};\ F(p) = L\{f_0 \cdot 1(t)\} = \frac{f_0}{p}.$$

Установившаяся ошибка называется ***статической.***

$$e_{\text{уст}} = e_{\text{ст}} = e^{g}_{\text{ст}} + e^{f}_{\text{ст}} = \lim_{p\to 0}\left[\Phi_e(p)g_0 - \Phi_f(p)f_0\right] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{g_0}{1+W(p)}\right] - \lim_{p\to 0}\left[\frac{W_f(p)}{1+W(p)}f_0\right].$$

ПФ РС можно представить в виде: $W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{kB_1(p)}{p^r C_1(p)}$, *$r$ – порядок астатизма системы*

(число интегрирующих звеньев, стоящих в прямой цепи и неохваченных местной обратной связью)

Установившаяся (статическая) ошибка по задающему воздействию

$$e_{\text{ст}}^{g}=\lim_{p\to 0}\left[\frac{g_0}{1+W(p)}\right]=\lim_{p\to 0}\frac{g_0 p^r C_1(p)}{p^r C_1(p)+kB_1(p)}=\lim_{p\to 0}\frac{g_0 p^r C_1(0)}{p^r C_1(0)+kB_1(0)}.$$

Поскольку $B_1(0)=1$ и $C_1(0)=\pm 1$, то $\boldsymbol{e_{\text{ст}}^{g}}$ **полностью зависит от $\boldsymbol{r}$!!!**

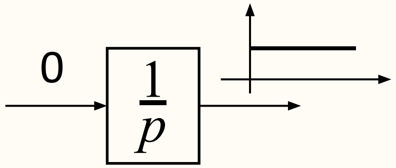
При $r=0$ САУ – статическая; при $r>0$ САУ – астатическая.

<u>При $r=0$</u>

$$e_{\text{ст}}^{g}=\frac{g_0 C_1(0)}{C_1(0)+k}=\begin{cases}\dfrac{g_0}{1+k}\ \text{при}\ C_1(0)=1;\\[2ex] \dfrac{-g_0}{-1+k}\ \text{при}\ C_1(0)=-1.\end{cases}$$

<u>При $r>0$</u>

$$e_{\text{ст}}^{g}=0.$$



Установившаяся (статическая) ошибка по возмущающему воздействию

$$e_{\text{ст}}^{f} = \lim_{p\to 0}\left[-\Phi_f(p) f_0\right] = -\lim_{p\to 0}\frac{W_f(p) f_0}{1+W(p)}.$$

При $\boldsymbol{r = 0}$

$$e_{\text{ст}}^{f} = -\frac{W_f(0) f_0}{1+W(0)} = \begin{cases} -\dfrac{k_f f_0}{1+k}, & \text{при } W(0) = k \text{ и } W_f(0) = k_f; \\ \dfrac{k_f f_0}{1-k}, & \text{при } W(0) = -k \text{ и } W_f(0) = -k_f. \end{cases}$$

При $\boldsymbol{r > 0}$ $\boldsymbol{e_{\text{ст}}^{f}}$ может обращаться в 0, а может и не обращаться в 0 в зависимости от $\boldsymbol{W_f(p)}$.

По каким-то возмущениям ошибка может исчезать, а по каким-то нет.

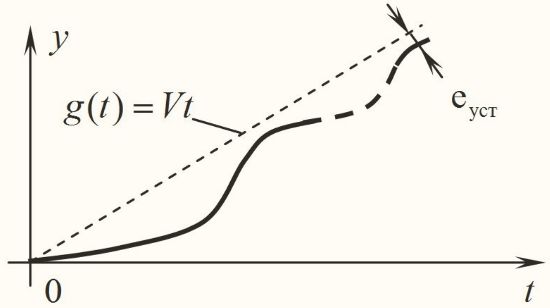
2. Оценка точности в режиме движения с постоянной скоростью

$$G(p) = L\{Vt \cdot 1(t)\} = \frac{V}{p^2};\; F(p) = L\{f_0 1(t)\} = \frac{f_0}{p}.$$

Установившаяся ошибка по задающему воздействию называется ***скоростной.***

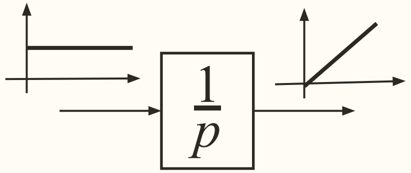
$$e^g_{уст} = e_{ск} = \lim_{p\to 0}\left[p\,\Phi_e(p)\,G(p)\right] = \lim_{p\to 0}\frac{V}{p}\,\Phi_e(p) = \lim_{p\to 0}\frac{V}{p[1+W(p)]} = \lim_{p\to 0}\frac{V}{pW(p)} =$$

$$= \lim_{p\to 0}\frac{p^{r-1}C_1(p)V}{kB_1(p)} = \frac{C_1(0)V}{k}\lim_{p\to 0} p^{r-1} = \pm\frac{V}{k}\lim_{p\to 0} p^{r-1}.$$

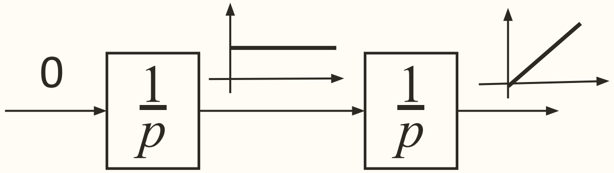


При $r = 0$ $\quad e_{ск} \to \infty.$

При $r = 1$ $\quad e_{ск} = \pm\frac{V}{k}$



При $r > 1$ $\quad e_{ск} = 0$



Установившаяся ошибка по возмущающему воздействию $\quad e^f_{ст} = \frac{k_f f_0}{k}.$

3. Оценка точности в режиме движения с постоянным ускорением

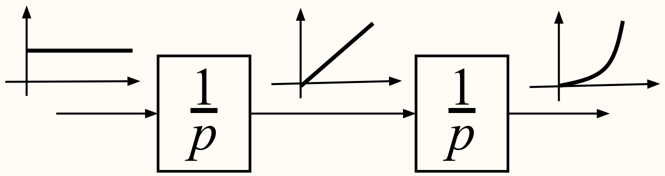
$$G(p) = L\left\{\frac{at^2}{2}\cdot 1(t)\right\} = \frac{a}{p^3};\;\; F(p) = L\{f_0 1(t)\} = \frac{f_0}{p}.$$

Установившаяся ошибка по задающему воздействию называется ***ошибкой по ускорению.***

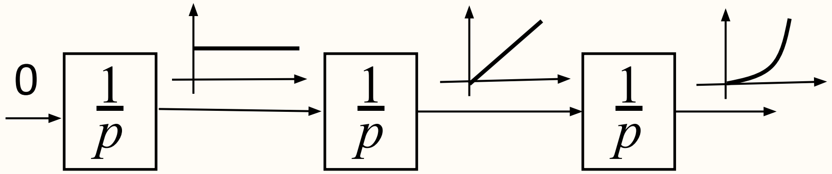
$$e^g_{\text{уст}} = e_{\text{а}} = \lim_{p\to 0}\left[p\,\Phi_e(p)\,G(p)\right] = \lim_{p\to 0}\frac{a}{p^2}\Phi_e(p) = \frac{C_1(0)a}{k}\lim_{p\to 0} p^{r-2} = \pm\frac{a}{k}\lim_{p\to 0} p^{r-2}.$$

При $r = 0,1$ $\quad e_{\text{а}} \to \infty.$

При $r = 2$ $\quad e_{\text{а}} = \pm\frac{a}{k}$



При $r > 2$ $\quad e_{\text{а}} = 0$

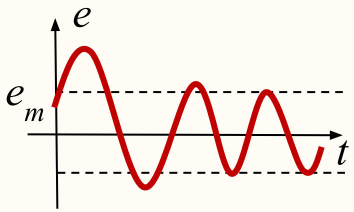


Установившаяся ошибка по возмущающему воздействию $e^f_{\text{ст}} = \frac{k_f f_0}{k}.$

4. Оценка точности в режиме движения по гармоническому закону

$$g(t) = g_m \sin \omega_k t, \; f(t) = \begin{cases} f_0 \cdot 1(t); \\ 0. \end{cases}$$

Ошибка : $e(t) = e_m(\sin \omega_k t + \beta)$, где $e_m = e_m(\omega_k)$; $\beta = \beta(\omega_k)$.



Показатель точности – амплитуда ошибки e_m

$$\text{ПФ ЗС по ошибке}: \; \Phi_e(p) = \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{1}{1+W(p)} \Rightarrow \frac{e_m}{g_m} = \left|\Phi_e(j\omega_k)\right| = \frac{1}{\left|1+W(j\omega_k)\right|} \Rightarrow$$

$$\boxed{e_m = \frac{g_m}{\left|1+W(j\omega_k)\right|}},$$

Поскольку в реальных системах $g_m >> e_m$, то справедливо соотношение

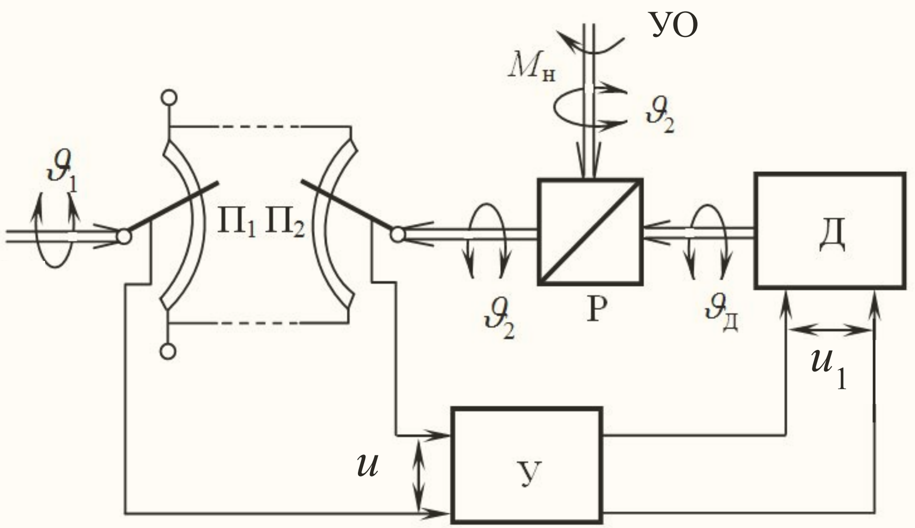
$\left|1+W(j\omega_k)\right| >> 1$ $\left(\left|W(j\omega_k)\right| >> 1\right)$. Поэтому $\left|1+W(j\omega_k)\right| \approx \left|W(j\omega_k)\right|$.

$$\boxed{e_m \approx \frac{g_m}{\left|W(j\omega_k)\right|}}$$

Полная установившаяся ошибка $e_{уст} = e_m + f_{ст}$.

Пример. ЭМДСС.

Есть ли в системе интегрирующее звено?



1. Сравнивающее устройство (потенциометрические датчики)

$u = k_1(\vartheta_1 - \vartheta_2) \Rightarrow W_{пд}(p) = k_1,\ k_1 -$ *коэфф. передачи*.

2. Усилитель $T_у \dot{u}_1 + u_1 = k_у u \Rightarrow W_у(p) = \dfrac{k_у}{T_у p + 1}$, $k_у$ и $T_у$ – *коэффициент передачи и пост. времени*.

3. Двигатель (УО) $T_м \ddot{\vartheta}_д + \dot{\vartheta}_д = k_д u_1 - k_м M_н^{/} \Rightarrow W_0(p) = \dfrac{\vartheta_д}{u_1} = \dfrac{k_д}{p(T_м p + 1)};\ W_0^{f}(p) = \dfrac{\vartheta_д}{M_н^{/}} = \dfrac{-k_м}{p(T_м p + 1)}$,

$k_д, k_м$ – *коэффициенты передачи по напряж. и моменту нагрузки*; $T_м$ – *постоянная времени*;

$M_н^{/}$ – *момент нагрузки, приведенный к валу двигателя*;

4. Редуктор $\vartheta_2 = k_р \vartheta_д \Rightarrow W_р(p) = k_р$, $k_р$ – *коэфф-т передачи редуктора*.

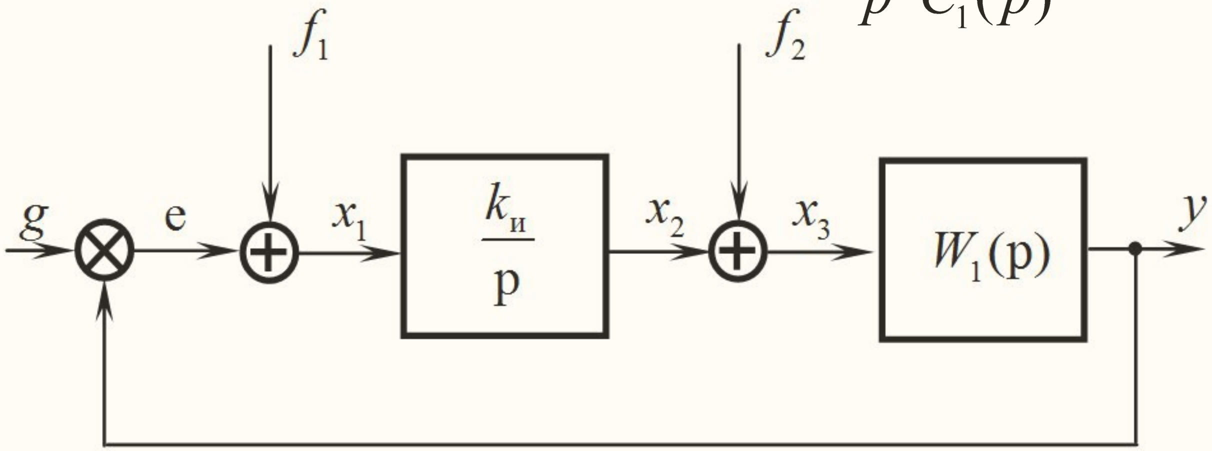
$$\vartheta_1 - g;\ \vartheta_2 - y;\ e = \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2;\ f = M_{\text{н}}^{/}.$$

$$\text{ПФ РС}: W(p) = \frac{k}{p(T_y p + 1)(T_{\text{м}} p + 1)},\ k = k_{\text{пд}} k_y k_{\text{д}} k_{\text{р}};$$

$$\text{ПФ РС по } f(M_{\text{н}}^{/}): W_f(p) = \frac{k_f}{p(T_{\text{м}} p + 1)},\ k_f = -k_{\text{м}} k_{\text{р}}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
e_{\text{ст}}^{g} = \vartheta_{\text{ст}}^{\vartheta_1} = 0; \\
e_{\text{ск}} = \vartheta_{\text{ск}} = \dfrac{\dot{\vartheta}_{10}}{k} \neq 0; \\
e_{\text{а}} = \vartheta_{\text{а}} = \infty; \\
e_m \approx \dfrac{g_m \omega_k \sqrt{T_y^2 \omega_k^2 + 1}\sqrt{T_{\text{м}}^2 \omega_k^2 + 1}}{k} \\
e_{\text{ст}}^{f} = \vartheta_{\text{ст}}^{M_{\text{н}}^{/}} = \dfrac{k_f M_{\text{н}}^{/}}{k} \neq 0
\end{array}}.$$

Пример. $f_1(t) = f_{10} \cdot 1(t);\ f_2(t) = f_{20} \cdot 1(t);\ \ W_1(p) = \dfrac{k_1 B_1(p)}{p^{r_1} C_1(p)}.$



Передаточные функции РС:

$$W(p) = \frac{k_u}{p} W_1(p) = \frac{k_u k_1 B_1(p)}{p^{r_1+1} C_1(p)} = \frac{k B_1(p)}{p^r C_1(p)},\quad k = k_u k_1;\ W_{f_1}(p) = \frac{k B_1(p)}{p^r C_1(p)};\ W_{f_2}(p) = \frac{k_1 B_1(p)}{p^{r_1} C_1(p)}.$$

Порядок астатизма системы: $r = r_1 + 1.$

Установившаяся ошибка: $e_{уст} = e_{уст}^{g} + e_{cm}^{f_1} + e_{cm}^{f_2}.$

$e_{cm}^{f_1} = \dfrac{k_u k_1 f_{10}}{k} = f_{10},$ так как $r = r$; так как $r_1 = r$; $r_{cm}^{f_2} = 0,$ $_1 <$.

Оценка качества переходных процессов

Ошибка САУ: $e(t)=e_п(t)+e_в(t)$.

Рассматривается $e_п(t)$!

Показатели качества переходных процессов (динамические характеристики)

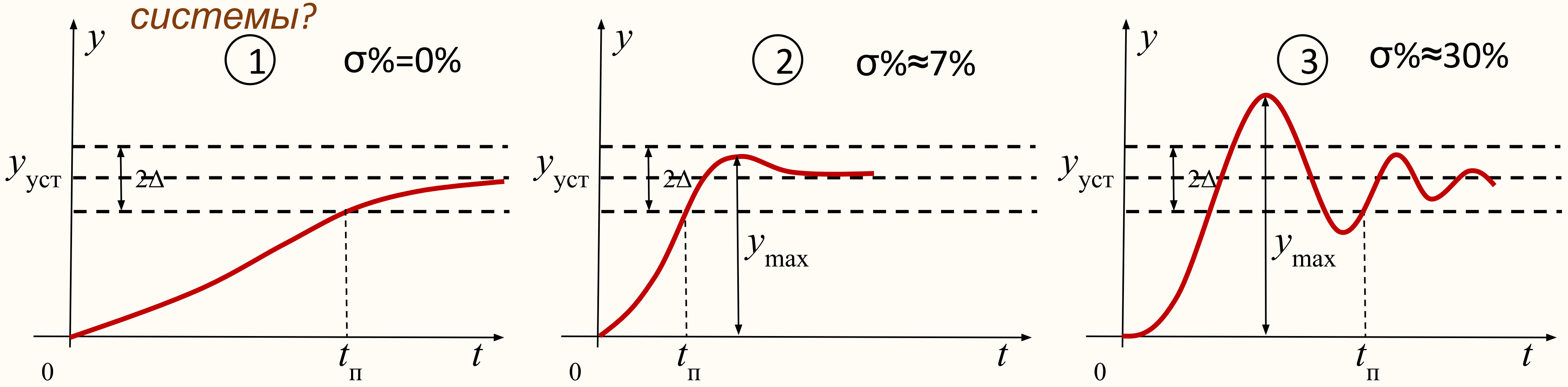
1. Запас устойчивости ЗС (характеризует удаленность САУ от КГУ).
2. Быстродействие (характеризуется длительностью переходного процесса $t_п$). (теоретически $t_п \to \infty$).

Основные пути оценивания качества переходных процессов

1. По переходной характеристике ЗС.
2. По частотным характеристикам РС.
3. По расположению корней ХУ ЗС.
4. По интегральным показателям.

Оценка качества переходных процессов по переходной характеристике ЗС

Переходная характеристика? Как по ней оценить точность системы?



$$\sigma\% = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}} 100\%.$$

Запас устойчивости ЗС – ***перерегулирование***

(приемлемое значение σ%=10 ÷ 30%).

$\sigma\% = 10 \div 30\%$ – *хороший ЗУ*; $\sigma\% < 10\%$ – *большой ЗУ*; $\sigma\% > 30\%$ – *малый ЗУ*.

Быстродействие – ***длительность переходного процесса $t_п$.***

Алгоритм определения длительность переходного процесса $t_п$

1. Задается коридор 2Δ, Δ=(0.01 ÷ 0.05)$y_{уст}$.
2. Определяется момент времени $t_п$, начиная с которого выполняется условие $|y(t) - y_{уст}| \le \Delta$.

Какой график лучше?

Оценка качества переходных процессов по частотным характеристикам РС

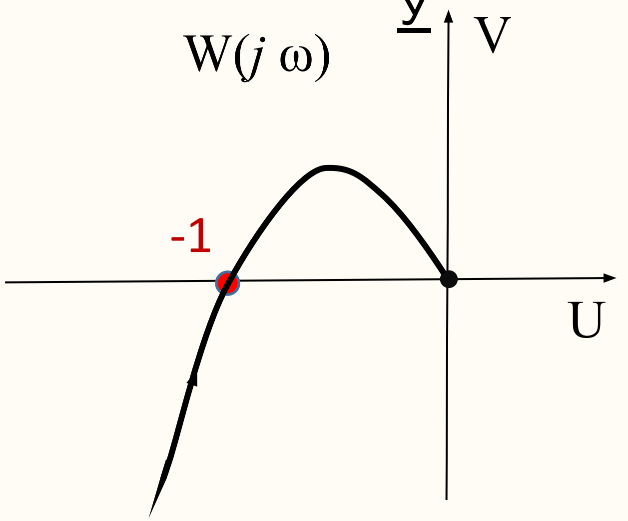
1. Частотные характеристики строить проще, чем переходную характеристику.
2. Проще исследовать влияние параметров САУ на устойчивость.

Показатели запаса устойчивости ЗС

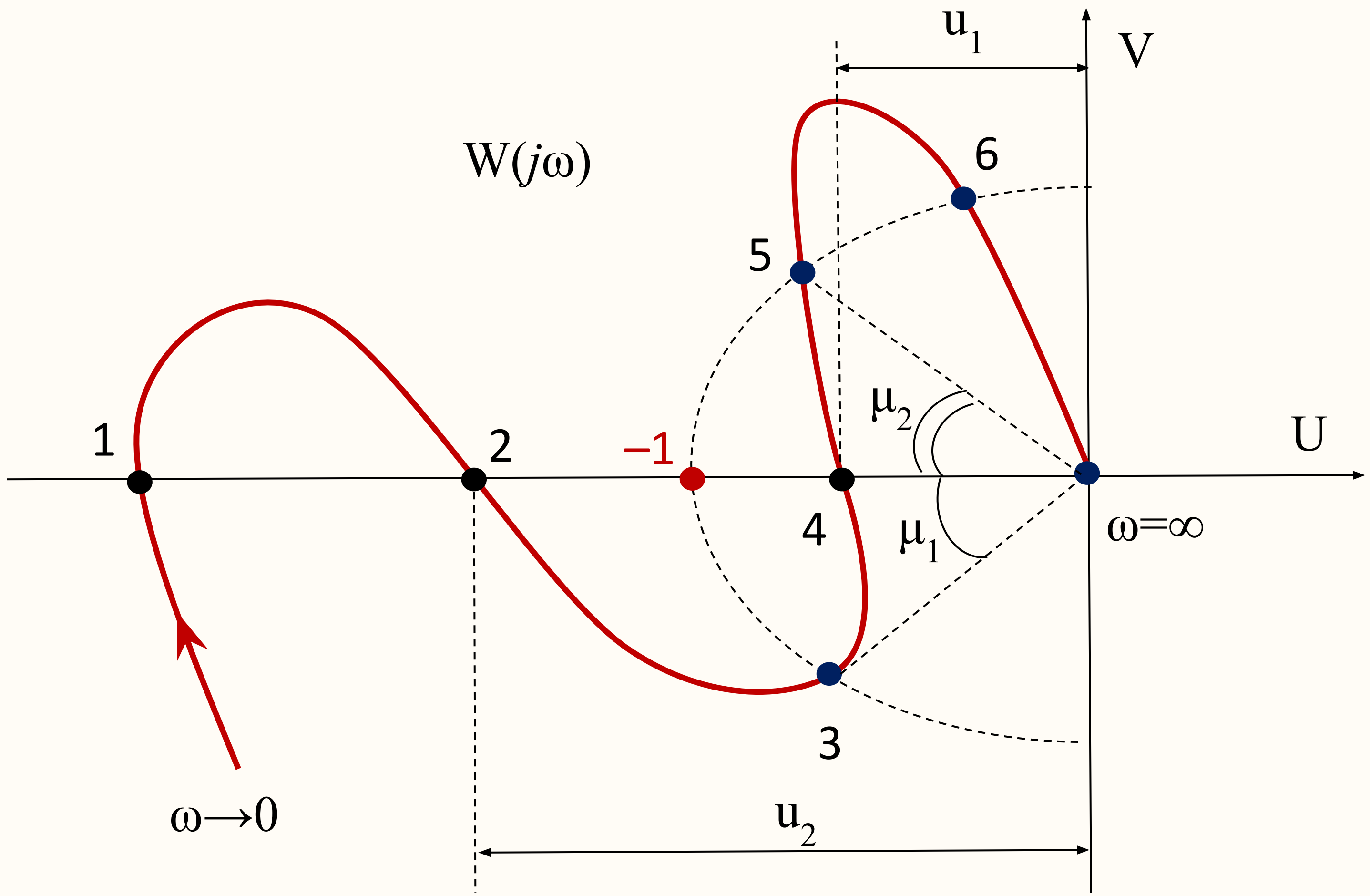
1. Запасы устойчивости по фазе $\mu_з$ и по амплитуде $L_з$.
2. Показатель колебательности ЗС M.

Определение запасов устойчивости ЗС по фазе и по амплитуде по АФХ РС

КГУ



В т. $(-1, j0)$ $\psi(\Omega) = -\pi$, $A(\Omega) = 1$.

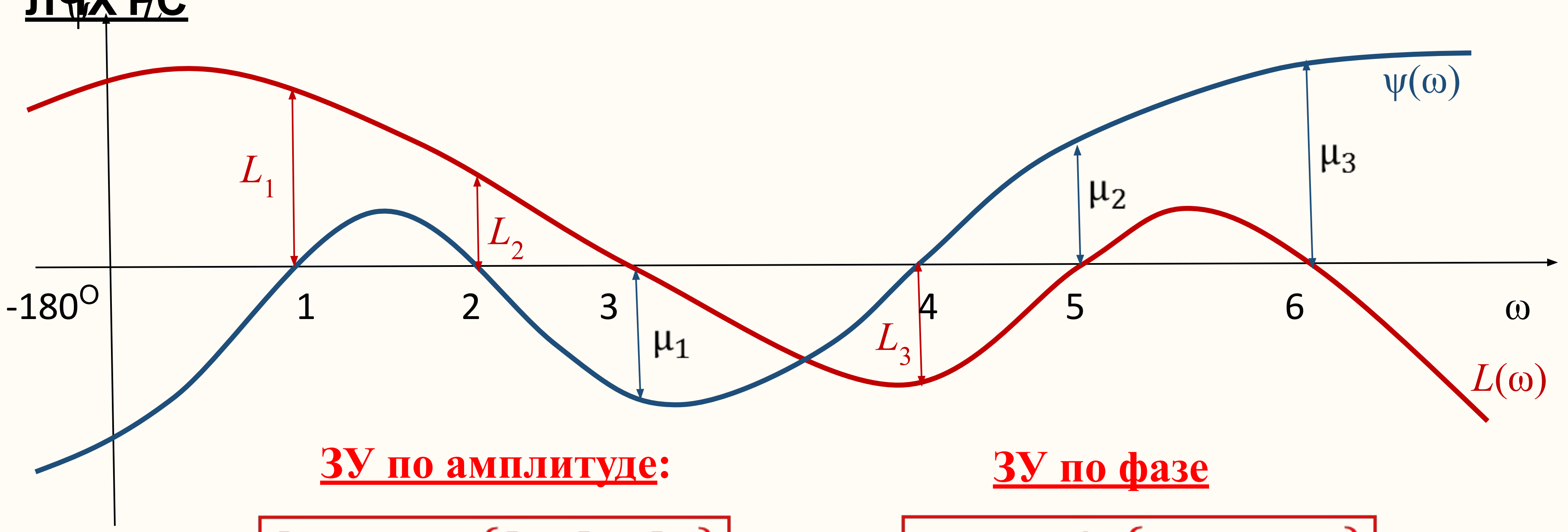


Точки 2 и 4 – **ЗУ по амплитуде** $L_1 = 20\lg\frac{1}{u_1};\ L_2 = 20\lg u_2 \Rightarrow \boxed{L_з = \min\{L_1, L_2\}}$

Точки 3 и 5 – **ЗУ по фазе:** $\boxed{\mu_з = \min\{\mu_1, \mu_2\}}$

Приемлемый запас устойчивости по амплитуде $L_з$=6÷20 дб, а по фазе $\mu_з$=30÷60 град.

Определение запасов устойчивости ЗС по фазе и по амплитуде по ЛЧХ РС



ЗУ по амплитуде:

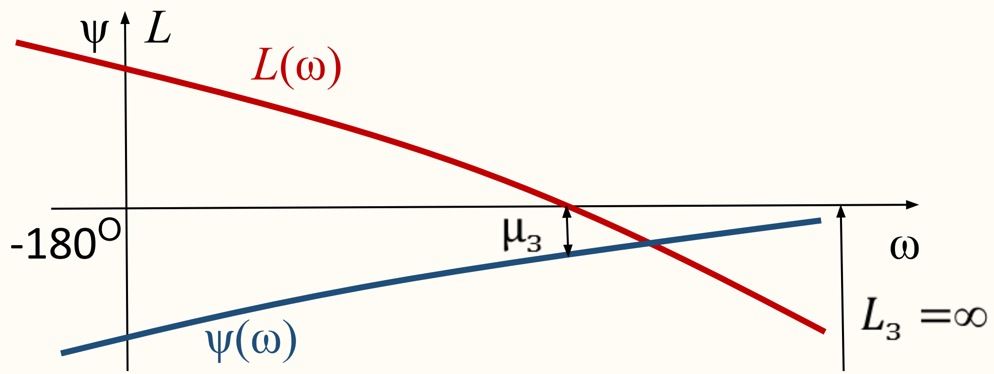
$$\boxed{L_з = \min\{L_1, L_2, L_3\}}$$

ЗУ по фазе

$$\boxed{\mu_з = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}}$$

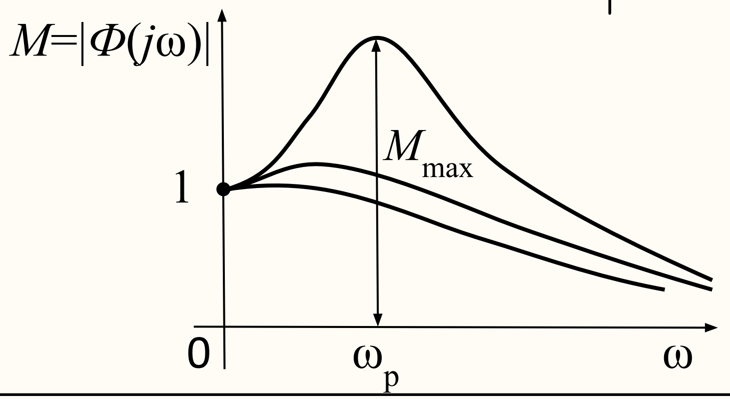
Алгоритм определения ЗУ ЗС по фазе и амплитуде по ЛЧХ.

Пример.



Показатель колебательности ЗС

Модуль ЧПФ ЗС $M=|\Phi(j\omega)|=\left|\dfrac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}\right|$



Если на резонансной частоте $|\Phi(j\omega_p)|\to\infty$, т.е. $W(j\omega_p|\to -1$, то **САУ на КГУ**.

M_{max} **– показатель колебательности ЗС.**

M_{max}=1.1 ÷ 1.5 – хороший ЗУ;
M_{max}=1.5 ÷ 2 – удовлетворительный ЗУ;
M_{max}>2 – малый ЗУ;
M_{max}=∞ – КГУ.

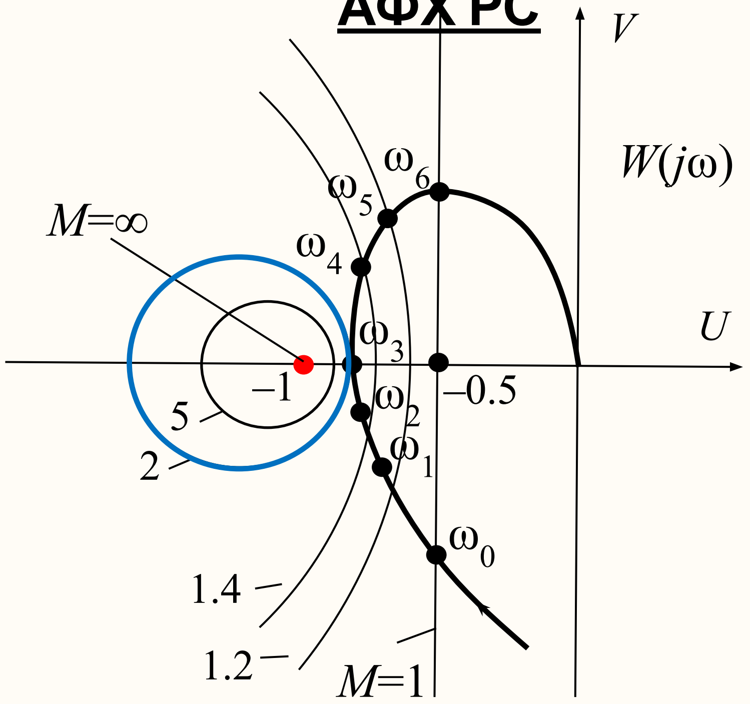
$$M=|\Phi(j\omega)|=\left|\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}\right|.$$

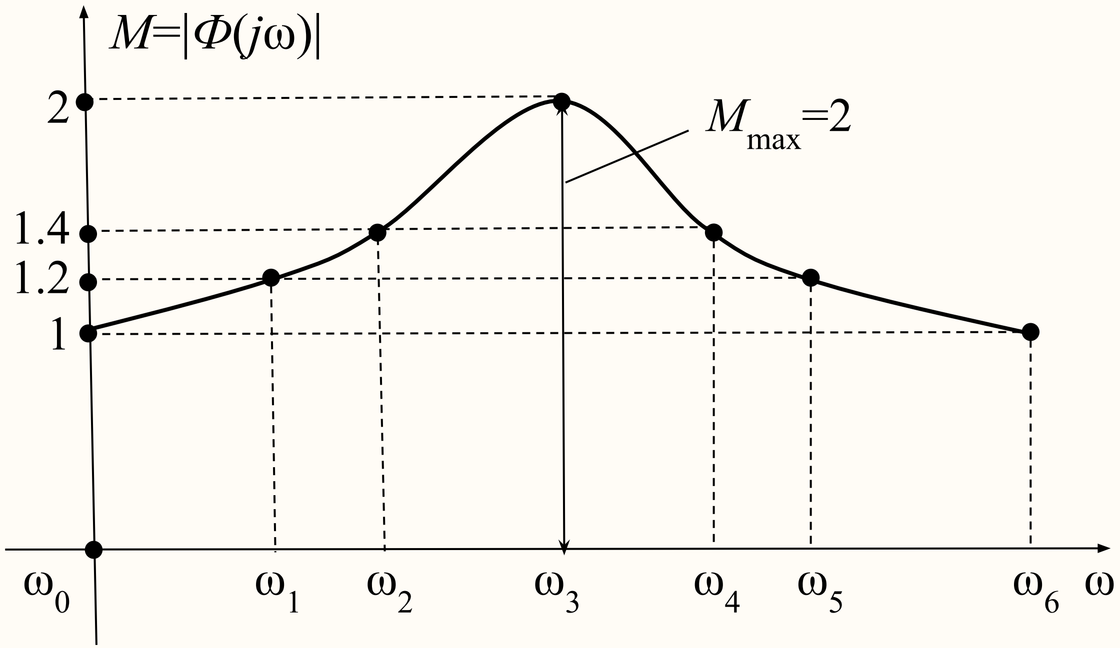
Пусть $W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$. Тогда $M=\left|\dfrac{U+jV}{1+U+jV}\right|=\dfrac{\sqrt{U^2+V^2}}{\sqrt{(U+1)^2+V^2}}\Rightarrow$

$\boxed{(U+C)^2+V^2=R^2}$, где $C=\dfrac{M^2}{M^2-1}$, $R=\dfrac{M}{M^2-1}$

При M=1 – прямая линия, параллельная оси ординат и проходящая через т. (–0.5, j0).
При M=∞ – т. (–1, j0).

Определение показателя колебательности ЗС по АФХ РС





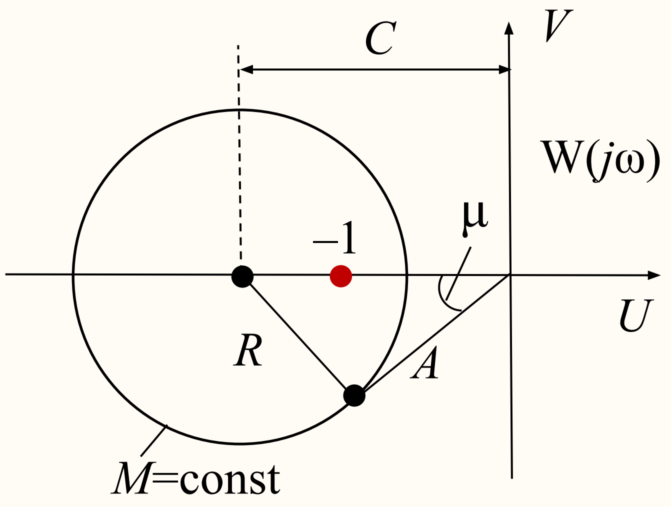
На плоскости АФХ показатель колебательности *M* определяет запретную область (круг), внутрь которой не должна заходить АФХ. Если АФХ касается этой области, то показатель колебательности равен *M*.

Алгоритм определения показателя колебательности по АФХ

1. Строится АФХ.
2. Проверяется устойчивость ЗС.
3. Методом подбора определяется показатель колебательности и соответствующая ему окружность, касающаяся АФХ.

Определение показателя колебательности ЗС по ЛЧХ РС

Отображение окружности при M=const с плоскости АФХ на плоскость ЛЧХ

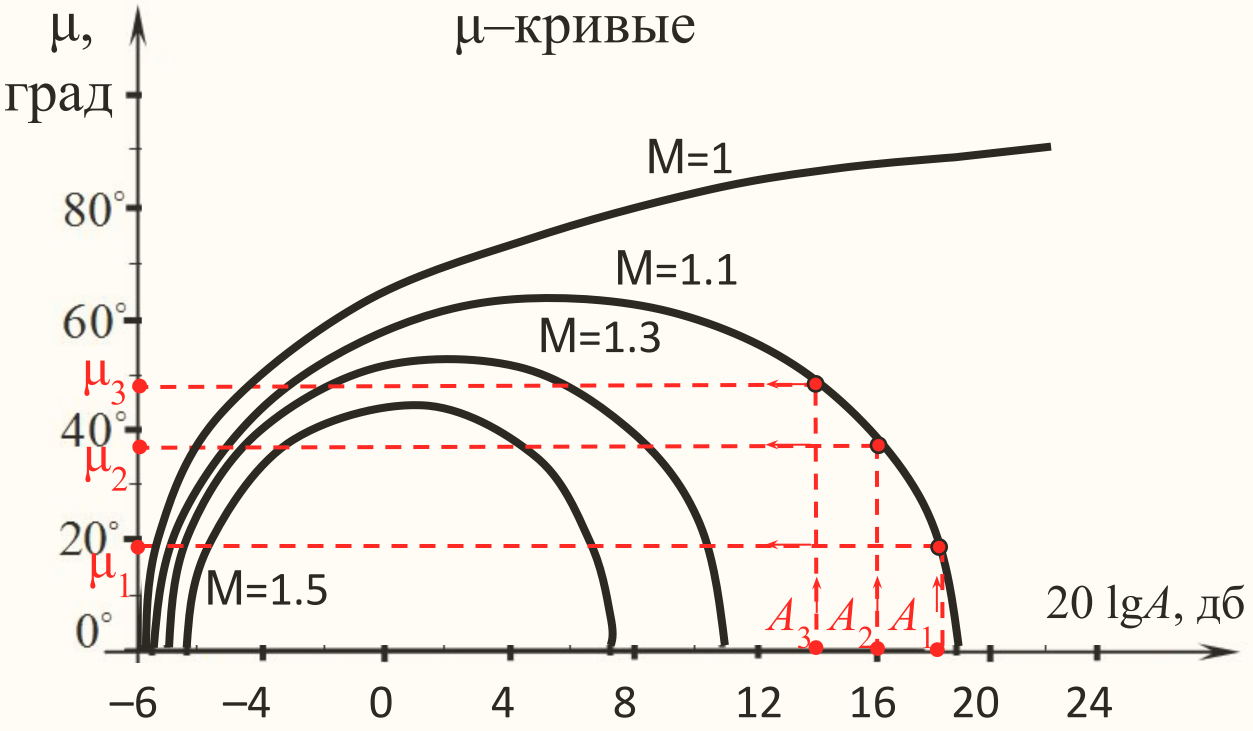


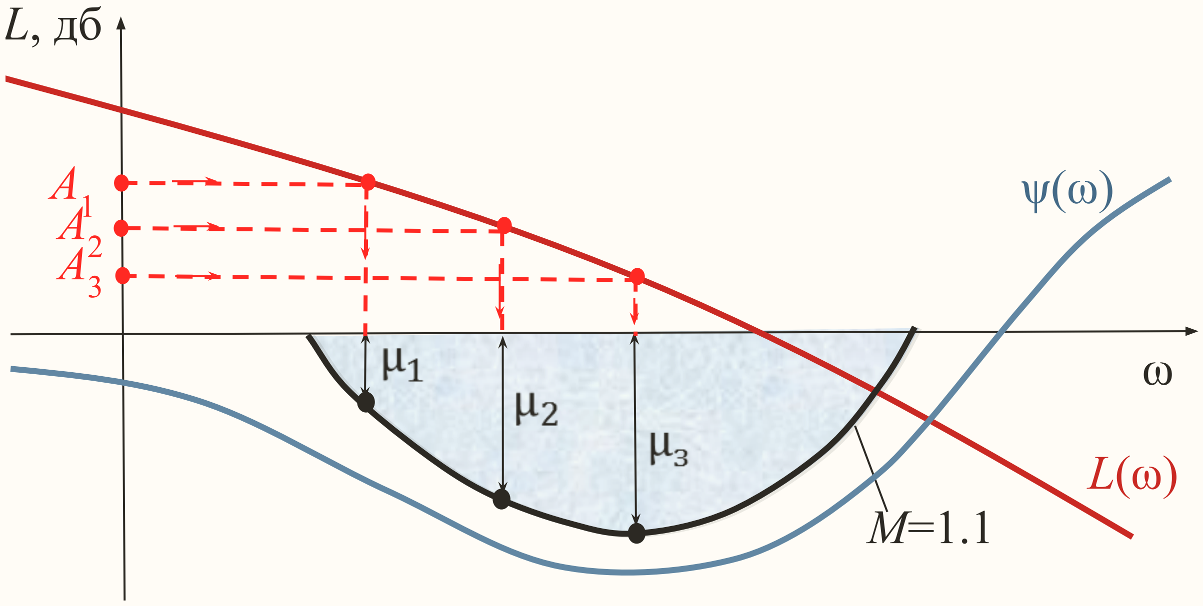
Поскольку / По теореме косинусов: $R^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos \;\Rightarrow\; = \dfrac{A^2+C^2-R^2}{2AC}$

$C^2 = \left(\dfrac{M^2}{M^2-1}\right)^2$, то $R^2 = \left(\dfrac{M}{M^2-1}\right)^2$, $\quad C^2$ и R^2 / $C^2 - R^2 = \dfrac{M^2}{M^2-1} = C$ $\quad \mu = \dfrac{A^2+C}{2AC} \Rightarrow$. $\boxed{\mu = \arccos\dfrac{A^2+C}{2AC}}$

Задаваясь значениями модуля $A=|W(j\omega)|$ (или $20\lg A=20\lg|W(j\omega)|$), можно построить графики изменения μ для различных значений M, т.е. графики μ-кривых. С помощью μ-кривых окружности с плоскости АФХ можно отобразить на плоскости ЛЧХ.

Определение показателя колебательности ЗС по ЛЧХ РС





Для того, чтобы показатель колебательности был не больше заданного ЛФХ не должна заходить в запретную область. Если ЛФХ касается этой области, то показатель колебательности равен заданному.

Алгоритм определения показателя колебательности по ЛЧХ

1. Строится ЛЧХ.
2. Проверяется устойчивость ЗС.
3. Методом подбора выбирается показатель колебательности, при котором запретная область касается ЛФХ.

Приближенное соотношение значений перерегулирования σ %
и показателя колебательности замкнутой системы M

M	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
σ %	13,8	18,4	26,5	31,6	37,2	40,4	44,2

Оценивание быстродействия по частотным характеристикам РС

Показатель быстродействия – ***длительность переходного процесса*** $t_п$.

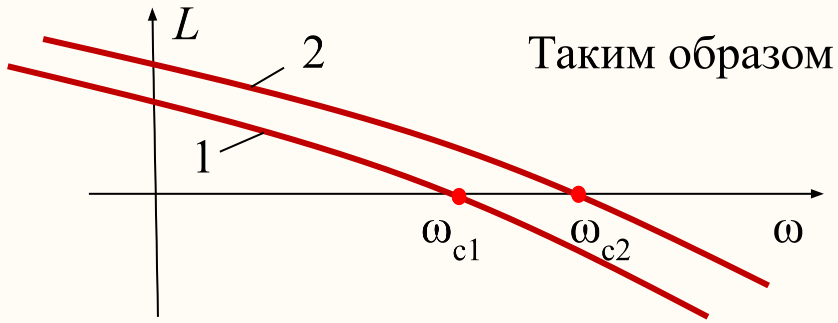
Точной количественной оценки быстродействия по ЧХ не существует.

Общее правило: ***быстродействие тем выше, чем шире полоса частот сигналов, пропускаемых системой***.

Сигналы пропускаются системой без ослабления на тех частотах, где

$$|W(j\omega)|>1.$$

На плоскости ЛЧХ



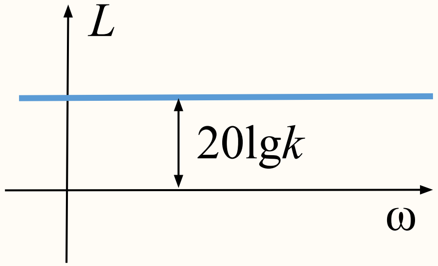
Таким образом $t_{п1}>t_{п2}$

Полоса частот сигналов, пропускаемых системой, определяется частотой среза $\boldsymbol{\omega_c}$.

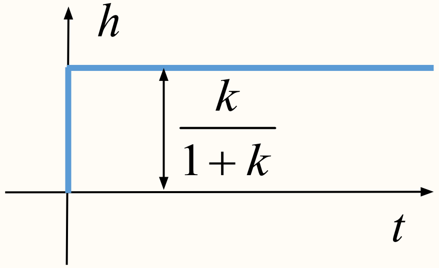
При $\omega<\omega_c$ $L(\omega)>0$ и $|W(j\omega)|>1$.

При $\omega>\omega_c$ $L(\omega)<0$ и $|W(j\omega)|<1$.

Пример 1. Идеальное безынерционное звено $W(p)=k$.

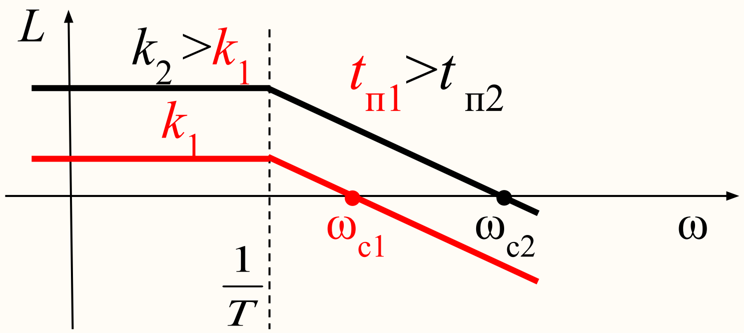


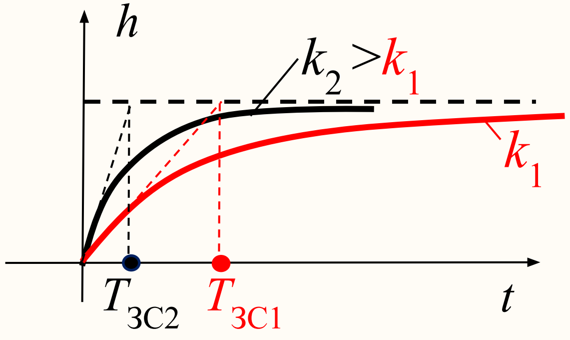
$$\text{ПФ ЗС}: \Phi(p)=\frac{k}{1+k} \Rightarrow$$



Пример 2. Апериодическое звено 1–го порядка $W(p)=\dfrac{k}{Tp+1}$.

$$\text{ПФ ЗС}: \Phi(p)=\frac{k}{Tp+1+k}=\frac{k_{ЗС}}{T_{ЗС}p+1}, \text{ где } k_{ЗС}=\frac{k}{1+k};\ T_{ЗС}=\frac{T}{1+k}.$$





$$\boxed{t_п \approx 3T_{ЗС}}$$

Если $k\uparrow$, то $\omega_c\uparrow$ $T_{ЗС}\downarrow$ $t_п\downarrow$.