Cap. 5 Descompunerea valorilor singulare

5.1 Formularea problemei

$A \in \Re^{m \times n}$ $\quad$ $p = \min\{m, n\}$

r - rangul matricii A ⇒ $r \leq p$

$r < p$ - matrice deficientă de rang

$r = p$ - matrice de rang complet

Teoremă:

Oricare ar fi matricea $A \in \Re^{m \times n}$ *, există două matrici ortogonale* $\tilde{U} \in \Re^{m \times m}$ *şi* $\tilde{V} \in \Re^{n \times n}$ *, astfel încât:*

$\tilde{U}^T \cdot A \cdot \tilde{V} = \Sigma$ u $\qquad$ $A = \tilde{U} \cdot \Sigma \cdot \tilde{V}^T$ (1)

unde este o matrice pseudo-diagonală, elementele nenule ale acesteia satisfăcând relaţia:

$$\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$$

$\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \Re^+$ - valori singulare ale matricii A

$\Sigma \in \Re^{m \times n}$ - formă canonică diagonală a matricii A

👉 relaţia (1) – ***descompunerea valorilor singulare***

<u>Demonstraţia</u> teoremei $\longrightarrow$ algoritmul de descompunere a valorilor singulare

<u>Observaţie:</u>

- orice matrice este ortogonal echivalentă bilateral cu o matrice (pseudo)diagonală

👉 detaliind structura matricei $\Sigma \in \Re^{m\times n}$, pot apare următoarele situaţii:

❶ $m \geq n$

$$\mathrm{rang}(A) = r = p = n \longrightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$$

$$\mathrm{rang}(A) = r < p \longrightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \vdots & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \vdots & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 \in \Re^{r\times r}, \quad \Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$$

❷ $m < n$

$$\mathrm{rang}(A) = r = p = m \longrightarrow \Sigma = [\Sigma_1 \;\vdots\; 0_{m\times(n-m)}], \quad \Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$$

$$\mathrm{rang}(A) = r < p \longrightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \vdots & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \vdots & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 \in \Re^{r\times r}, \quad \Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0, \quad \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$$

👉 rangul matricei A este egal cu rangul matricei Σ, care este egal cu r

$$\Downarrow$$

rangul acestor matrici este egal cu numărul valorilor singulare nenule

👉 relaţia (1) poate fi scrisă sub forma: $A \cdot \tilde{V} = \tilde{U} \cdot \Sigma$

$\underline{\tilde{v}}_i$ - vectorii coloană ai $\tilde{V}$

$\underline{\tilde{u}}_i$ - vectorii coloană ai $\tilde{U}$

$\Rightarrow$

$$A \cdot \underline{\tilde{v}}_i = \sigma_i \cdot \underline{\tilde{u}}_i \iff \underline{\tilde{u}}_i^T \cdot A = \sigma_i \cdot \underline{\tilde{v}}_i^T$$
$$i = 1, \dots, p$$

Definiţie:

Coloanele matricei $\tilde{V}$ *se numesc* *vectori singulari la dreapta* *ai matricei* A, *iar coloanele matricei* $\tilde{U}$ *se numesc* *vectori singulari la stânga* *ai matricei* A.

👉 **proprietăţi ale decompunerii valorilor singulare:**

P1. valorile singulare ale matricei A sunt egale cu rădăcina pătratică pozitivă a valorilor proprii ale matricei $A^T \cdot A$:

$$\sigma_i(A) = +\sqrt{\lambda_i(A^T \cdot A)}, \quad i = 1,\ldots,n$$

P2. dacă $A \in \Re^{n\times n}$ este o matrice simetrică şi pozitiv semidefinită, atunci valorile proprii ale matricei A sunt reale, pozitive, iar valorile singulare ale matricei A sunt egale cu valorile ei proprii:

$$\lambda_i(A) = \sigma_i(A), \quad i = 1,\ldots,n$$

P3. scriind matricile $\widetilde{U}$ şi $\widetilde{V}$ sub forma:

$$\widetilde{U} = [\underline{\widetilde{u}}_1 \;\cdots\; \underline{\widetilde{u}}_r \;|\; \underline{\widetilde{u}}_{r+1} \;\cdots\; \underline{\widetilde{u}}_m] = [\widetilde{U}_1 \;|\; \widetilde{U}_2]$$

$$\widetilde{V} = [\underline{\widetilde{v}}_1 \;\cdots\; \underline{\widetilde{v}}_r \;|\; \underline{\widetilde{v}}_{r+1} \;\cdots\; \underline{\widetilde{v}}_n] = [\widetilde{V}_1 \;|\; \widetilde{V}_2]$$

$$A = \widetilde{U} \cdot \Sigma \cdot \widetilde{V}^T = [\widetilde{U}_1 \;|\; \widetilde{U}_2] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \widetilde{V}_1^T \\ \hline \widetilde{V}_2^T \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A = \widetilde{U}_1 \cdot \Sigma_1 \cdot \widetilde{V}_1^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \cdot \underline{\widetilde{u}}_i \cdot \underline{\widetilde{v}}_i^T$$

P4. primele r coloane ale matricei $\tilde{U}$, unde $r = \mathrm{rang}(A)$, formează o *bază ortogonală pentru subspaţiul imagine al matricei A*:

$$\mathrm{Im}(A) = \{\underline{y} \,/\, \underline{y} = A \cdot \underline{x},\ \forall \underline{x} \in \Re^{n\times 1}\},$$

$$\underline{y} = A \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{r} \underline{\tilde{u}}_i \cdot (\sigma_i \cdot \underline{\tilde{v}}_i^T \cdot \underline{x}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \underline{\tilde{u}}_i$$

P5. ultimele n - r coloane ale matricei $\tilde{V}$, formează o *bază ortogonală pentru subspaţiul nul al matricei A*:

$$N(A) = \{\underline{x} \,/\, A \cdot \underline{x} = \underline{0}_m,\ \underline{x} \in \Re^{n\times 1}\}$$

$$A \cdot \tilde{V} = \tilde{U} \cdot \Sigma \Rightarrow A \cdot [\tilde{V}_1 \ \vdots \ \tilde{V}_2] = [\tilde{U}_1 \ \vdots \ \tilde{U}_2] \cdot \Sigma$$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot \tilde{V}_1 = \tilde{U}_1 \cdot \Sigma_1,\ A \cdot \tilde{V}_2 = \mathbf{0}_{m\times(n-r)}$$

5.2 Algoritmul SVD

👉 Algoritmul SVD (SVD – abr. eng. "Singular Value Decomposition") ⟶ *construirea unui şir de matrici ortogonal echivalente bilateral, convergent către forma canonică pseudo-diagonală*

se bazează pe faptul că: $\sigma_i(A) = +\sqrt{\lambda_i(A^T \cdot A)}$

👉 Principiul de calcul ⟶ a aplica "mascat" (direct matricei A) algoritmul QR

↓

se aplică matricei A, transformările corespunzătoare celor care s-ar aplica matricei B în cadrul algoritmului QR de aducere la forma canonică Schur

$$A \leftrightarrow B = A^T \cdot A, \quad B = B^T, \; B \in \Re^{n \times n}$$

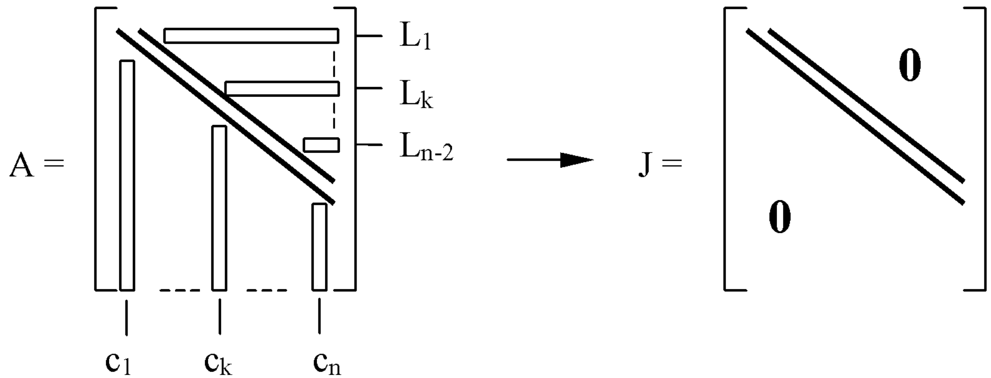
👉 se consideră m > n (fără a restrânge generalitatea)

👉 Algoritmul parcurge două faze de lucru:

Faza 1: pregătitoare, de *aducere a matricei A la forma superior bidiagonală*

Faza 2: procedură iterativă, de *construcţie a unui şir de matrice ortogonal echivalente bilateral, convergent către forma canonică pseudo-diagonală* a matricei A

Faza 1



$U_k \in \Re^{m\times m},\ k = 1,\dots,n$ - matrici Householder de ordin m care acţionează pe coloane

$V_{k+1} \in \Re^{n\times n},\ k = 1,\dots,n-2$ - matrici Householder de ordin n care acţionează pe linii

👉 Tabloul general al transformărilor:

$$U_n \cdot \cdots \cdot U_k \cdot \cdots \cdot U_1 \cdot A \cdot V_2 \cdot \cdots \cdot V_{k+1} \cdot \cdots \cdot V_{n-1} = J$$

$$U = U_n \cdot \cdots \cdot U_k \cdot \cdots \cdot U_1, \quad V = V_2 \cdot \cdots \cdot V_{k+1} \cdot \cdots \cdot V_{n-1}$$

$$U \cdot A \cdot V = J$$

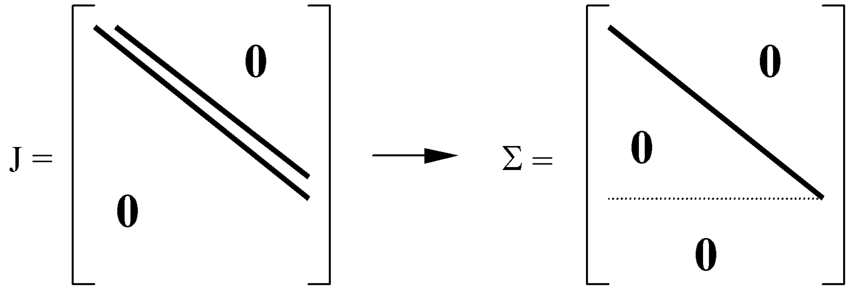
👉 Observaţie:

$$B = A^T \cdot A \xrightarrow{\text{algoritm QR}} H \text{ - matrice tridiagonală}$$

$$H = J^T \cdot J$$

- **Faza 2**

  - zerorizarea elementelor de pe prima supradiagonală a formei superior bidiagonale J



  - se regăsesc cele şapte etape de la algoritmul QR cu deplasare explicită
  - se utilizează matrici de rotaţie plană Givens

👉 <u>Tabloul general al transformărilor</u>:

$$\underbrace{[R_{n-1}^{[\Sigma]}\cdot \cdots \cdot R_1^{[\Sigma]}]\cdot \cdots \cdot [R_{n-1}^{[1]}\cdot \cdots \cdot R_1^{[1]}]}_{R}\cdot J\cdot \underbrace{[P_1^{[1]}\cdot \cdots \cdot P_{n-1}^{[1]}]\cdot \cdots \cdot [P_1^{[\Sigma]}\cdot \cdots \cdot P_{n-1}^{[\Sigma]}]}_{P}=\Sigma$$

$$R\cdot J\cdot P=\Sigma \quad \Longrightarrow \quad R\cdot U\cdot A\cdot V\cdot P=\Sigma$$

$$\left.\begin{aligned} & R\cdot U\cdot A\cdot V\cdot P=\Sigma \\ & \tilde{U}^T = R\cdot U \\ & \tilde{V} = V\cdot P \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\tilde{U}^T\cdot A\cdot\tilde{V}=\Sigma}$$

5.3 Aplicaţii ale descompunerii valorilor singulare

- în urma aplicării SVD: $\hat{\Sigma} \cong \Sigma$
- algoritmul SVD – stabil numeric: $\hat{A} = A + E \quad \Rightarrow \quad \hat{\Sigma}_A \equiv \Sigma_{A+E}, \quad \|E\|_2 << \|A\|_2$

$\hat{\sigma}_i, \; i = 1,\dots,p$ - valori singulare calculate

$\sigma_i, \; i = 1,\dots,p$ - valori singulare calculate

$$|\hat{\sigma}_i - \sigma_i| < \tau'$$

5.3.1 Calculul rangului unei matrici

$$\hat{\sigma}_1 \geq \hat{\sigma}_2 \geq \dots \geq \hat{\sigma}_p \geq 0$$

Definiţie:

Se numeşte rang *<u>efectiv sau numeric</u>*, *notat cu* $\hat{r}$, *al matricei* A, *acel index pentru care are loc relaţia de ordine*:

$$\frac{\hat{\sigma}_{\hat{r}}}{\hat{\sigma}_1} \geq \tau' > \frac{\hat{\sigma}_{\hat{r}+1}}{\hat{\sigma}_1} \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_{\hat{r}} \geq \hat{\sigma}_1 \cdot \tau' > \hat{\sigma}_{\hat{r}+1}$$

$$\tau' = \max\{m, n\} \cdot \varepsilon_m$$

$$\tau = \hat{\sigma}_1 \cdot \tau' = \max\{m, n\} \cdot \varepsilon_m \cdot \hat{\sigma}_1$$

$$\hat{\sigma}_1 \geq \dots \geq \hat{\sigma}_{\hat{p}} \geq \tau > \hat{\sigma}_{\hat{p}+1} \geq \dots \geq \hat{\sigma}_q \geq 0$$

5.3.2 Rezolvarea sistemelor de ecuaţii algebrice liniare în sensul celor mai mici pătrate generalizate

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}, \quad A \in \Re^{m\times n}, \ \underline{b} \in \Re^{m\times 1}, \ \underline{x} \in \Re^{n\times 1} \qquad (3)$$

- <u>dacă A – de rang complet</u> → există o pseudosoluţie unică în sensul celor mai mici pătrate (m ≥ n)

m < n → există o infinitate de pseudosoluţii în sensul celor mai mici pătrate

- <u>dacă A - deficientă de rang</u> → există o infinitate de pseudosoluţii în sensul celor mai mici pătrate

👉 descompunerea valorilor singulare oferă posibilitatea determinării unei pseudosoluţii unice, în sensul celor mai mici pătrate (generalizate), $\underline{x}^*_{SVD}$, indiferent de rangul matricei A.

👉 <u>proprietăţi</u>:

- minimizează norma euclidiană a reziduului:

$$\underline{r} = \underline{b} - A \cdot \underline{x} \Rightarrow \underline{x}^* = \arg \min_{\underline{x} \in \Re^{n\times 1}} \{\| \underline{r} \|_2^2\}$$

- este de normă euclidiană minimă:

$$\| \underline{x}^*_{SVD} \|_2 = \min_{\underline{x}^* \in \Re^{n\times 1}} \{\| \underline{x}^* \|_2\}$$

METODE NUMERICE – curs 7

Teoremă:

Oricare ar fi matricea $A \in \Re^{m\times n}$ *şi vectorul* $\underline{b} \in \Re^{m\times 1}$*, problema* (3) *are o soluţie unică, aceasta fiind pseudosoluţia normală obţinută pe baza descompunerii valorilor singulare:*

$$\underline{x}^*_{SVD} = A^+ \cdot \underline{b}, \quad A^+ \in \Re^{n\times m}$$

A^+ - pseudosoluţie Moore-Penrose $\qquad A^+ = \widetilde{V}_1 \cdot \Sigma_1^{-1} \cdot \widetilde{U}_1^T = \sum_{i=1}^{r} \frac{\underline{\widetilde{v}}_i \cdot \underline{\widetilde{u}}_i^T}{\sigma_i}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{x}^*_{SVD} = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\underline{\widetilde{v}}_i \cdot \underline{\widetilde{u}}_i^T}{\sigma_i} \right) \cdot \underline{b}$$

<u>Demonstraţie</u>:

I_n

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{U}^T \cdot A \cdot \widetilde{V} \cdot \widetilde{V}^T \cdot \underline{x} = \widetilde{U}^T \cdot \underline{b} \\ &\boxed{\widetilde{U}^T \cdot A \cdot \widetilde{V} = \Sigma} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Sigma \cdot \underline{y} = \underline{d} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \underline{y} = \widetilde{V}^T \cdot \underline{x} \\ \underline{d} = \widetilde{U}^T \cdot \underline{b} \end{cases}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \cdots & 0_{r\times(n-r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{(m-r)\times r} & \cdots & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 \in \Re^{r\times r}, \quad \Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \hline \underline{y}_2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \hline \underline{d}_2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{y}_1 = \widetilde{V}_1^T \cdot \underline{x} \in \Re^{r \times 1}, \qquad \underline{d}_1 = \widetilde{U}_1^T \cdot \underline{b} \in \Re^{r \times 1},$$

$$\underline{y}_2 = \widetilde{V}_2^T \cdot \underline{x} \in \Re^{(n-r) \times 1} \qquad \underline{d}_2 = \widetilde{U}_2^T \cdot \underline{b} \in \Re^{(m-r) \times 1}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0_{r \times (n-r)} \\ \hline 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \hline \underline{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \hline \underline{d}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Sigma_1 \cdot \underline{y}_1 \\ \hline \underline{0}_{(m-r) \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \hline \underline{d}_2 \end{bmatrix}, \ \forall \underline{y}_2 \in \Re^{(n-r) \times 1}$$

👉 ***minimizare normă euclidiană a reziduului:***

$$\| \underline{r} \|_2^2 = \| \widetilde{U}^T \cdot \underline{r} \|_2^2 = \| \widetilde{U}^T \cdot (\underline{b} - A \cdot \underline{x}) \|_2^2 = \| \widetilde{U}^T \cdot \underline{b} - \widetilde{U}^T \cdot A \cdot \widetilde{V} \cdot \widetilde{V}^T \cdot \underline{x} \|_2^2 =$$

$$= \| \underline{d} - \Sigma \cdot \underline{y} \|_2^2 = \| \underline{d}_1 - \Sigma_1 \cdot \underline{y}_1 \|_2^2 + \| \underline{d}_2 \|_2^2 = \min$$

- în general $\underline{d}_2 \neq \underline{0}_{m-r}$ $\Leftrightarrow$ $\| \underline{d}_2 \|_2^2 \neq 0$ $\rightarrow$ singura minimizare posibilă:

$$\| \underline{d}_1 - \Sigma_1 \cdot \underline{y}_1^* \|_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{d}_1 - \Sigma_1 \cdot \underline{y}_1^* = \underline{0}_p \quad \Rightarrow \quad \Sigma_1 \cdot \underline{y}_1^* = \underline{d}_1$$

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{V}^T \cdot \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \underline{x}^* = \widetilde{V} \cdot \underline{y}^* = \widetilde{V} \cdot \begin{bmatrix} \underline{y}_1^* \\ \vdots \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix}, \quad \forall \underline{y}_2 \in \Re^{(n-r)\times 1}$$

👉 ***pseudosoluţie de normă minimă:*** $\| \underline{x}^* \|_2^2 = \min$

$$\left. \begin{aligned} &\| \underline{x}^* \|_2^2 = \| \widetilde{V}^T \cdot \underline{x}^* \|_2^2 = \| \underline{y}^* \|_2^2 = \| \underline{y}_1^* \|_2^2 + \| \underline{y}_2 \|_2^2 = \min \\ &\text{- în general } \underline{y}_1^* = \Sigma_1^{-1} \cdot \widetilde{U}^T \cdot \underline{b} \neq \underline{0}_p \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \| \underline{y}_2^* \|_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y}_2^* = \underline{0}_{n-p}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{x}_{SVD}^* = \widetilde{V} \cdot \underline{y}_{SVD}^* = [\widetilde{V}_1 \quad \vdots \quad \widetilde{V}_2] \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} \cdot \widetilde{U}_1^T \cdot \underline{b} \\ \vdots \\ \underline{0}_{n-r} \end{bmatrix} = \widetilde{V}_1 \cdot \Sigma_1^{-1} \cdot \widetilde{U}_1^T \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\underline{\widetilde{v}}_i \cdot \underline{\widetilde{u}}_i^T}{\sigma_i} \right) \cdot \underline{b}.$$

Cap. 6 Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii neliniare

6.1 Formularea problemei

□ Fie $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}_n, \quad \underline{f} : D_1 \to D_2, \quad D_1, D_2 \subseteq \Re^{n\times 1}\ (\mathbf{C}^{n\times 1})$ (1)

$$\underline{x} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T \qquad \underline{f}(\underline{x}) = [f_1(x_1,\dots,x_n) \quad \cdots \quad f_n(x_1,\dots,x_n)]^T$$

$f_i(\underline{x}), i = 1,\dots,n$ - compunere de funcţii elementare de tip polinomial, trigonometric sau transcendent (exponenţiale, logaritmi) în argumentele $x_i, i = 1,\dots,n$

(1) - ***ecuaţie*** (n = 1) / ***sistem de ecuaţii*** (n ≥ 2) ***neliniare***

□ Fie $\underline{\alpha} = [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n]^T, \quad \underline{f}(\underline{\alpha}) = \underline{0}_n$

□ Metodele numerice pentru rezolvarea problemei (1) □ *metode iterative*

construiesc un şir de vectori convergent la soluţia $\underline{\alpha}$: $\{\underline{x}^{[k]}\}_{k\ge 0}, \ \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{[k]} = \underline{\alpha}$

- punct de start: $\underline{x}^{[0]} = [x_1^{[0]} \quad \cdots \quad x_n^{[0]}]^T \in V_\alpha = \{\underline{x} \in D_1 / \| \underline{x} - \underline{\alpha} \|_p \le h, h > 0\} \subset D_1$

METODE NUMERICE – curs 7

Definiţie:

Se numeşte formulă de iterare sau şir de iterare (de rang k *şi ordin* m*) o relaţie de recurenţă de forma:*

$$\underline{x}^{[k]} = \underline{g}(k, \underline{x}^{[k-1]}, \underline{x}^{[k-2]}, \dots, \underline{x}^{[k-m]}), \ \underline{x}^{[0]}, \dots, \underline{x}^{[m-1]} \in \underline{V}_{\alpha}, \quad 1 \le m \le k$$

👉 *formulă de iterare staţionară de ordinul* m → g nu depinde de k

👉 uzuale sunt *metodele iterative* care folosesc *formule staţionare de ordin* m = 1 :

$$\underline{x}^{[k]} = \underline{g}(\underline{x}^{[k-1]}) \tag{2}$$

Propoziţie:

O metodă iterativă de tipul (2) *se spune că este convergentă pe domeniul* $\underline{V}_{\alpha}$ *, dacă oricare ar fi* $\underline{x}, \underline{y} \in \underline{V}_{\alpha}$ *, există* $\lambda \in (0,1)$ *astfel încât, într-o normă vectorială oarecare* p*, aplicaţia* $\underline{g}$ *îndeplineşte relaţia:*

$$\| \underline{g}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{y}) \|_p \le \lambda \cdot \| \underline{x} - \underline{y} \|_p$$

Altfel spus, aplicaţia este o contracţie pe domeniul $\underline{V}_{\alpha}$.

- soluţie generală de alegere a funcţiei de iterare, $\underline{g}$:

  se rescrie ecuaţia (1) $\longrightarrow$ $\underline{x} = \underline{g}(\underline{x})$ astfel încât $\underline{f}(\underline{\alpha}) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\alpha} = \underline{g}(\underline{\alpha})$

- *criteriu general de stop al metodei iterative*:

$$\| \underline{x}^{[s]} - \underline{x}^{[s-1]} \|_p \leq \varepsilon_{\underline{x}} \quad \text{sau} \quad \| \underline{f}(\underline{x}^{[s]}) \|_p \leq \varepsilon_{\underline{f}}$$