

Лекция 3.

Введение в математический анализ

1. ФУНКЦИЯ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО.
2. Элементарные функции. Свойства функций.
3. Предел функции.
4. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ.
5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
6. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ.
7. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. *ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА.*
8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИИ.
9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.
10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

● Литература

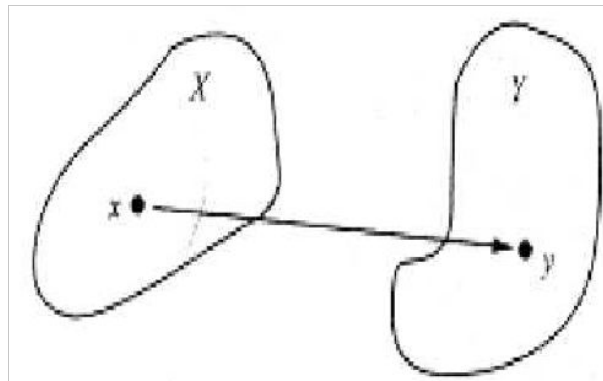
1. Аматова, Г.М. Математика. Кн.1. Кн.2. [Текст]: учебник / Г.М. Аматова, М.А. Амамов. - М.: Академия, 2008.-240с.
2. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики: Учебник / Морозов Ю.В. -М.: Медицина, 2004.
3. Аматова, Г.М. Математика. Упражнения и задачи [Текст]: учебник / Г.М. Аматова, М.А. Амамов.- М.: Академия, 2008.-332с.
4. Баврин, И.И. Высшая математика. [Текст]: учебник / И.И. Баврин.- М.: Академия, 2010.-616с.

1. ФУНКЦИЯ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

Понятие функции

Понятие функции связано с установлением зависимости между элементами двух множеств. Пример: A - множество натуральных чисел, а B - множество квадратов натуральных чисел или A - множество треугольников, а B - множество периметров этих треугольников.

Если каждому элементу x множества X по определенному правилу можно поставить в соответствие одно или несколько значений элемента y множества Y , то говорят, что задана функция y от x ($y = f(x)$), где f есть некоторое правило, x носит название аргумента функции, а y - значения функции.



Совокупность значений x для которых правило вычисления значений y имеет смысл, называется областью определения функции или областью существования функции, а область изменения Y называется множеством значений функции.

Способы задания функции.

1. Табличный способ задания функции.

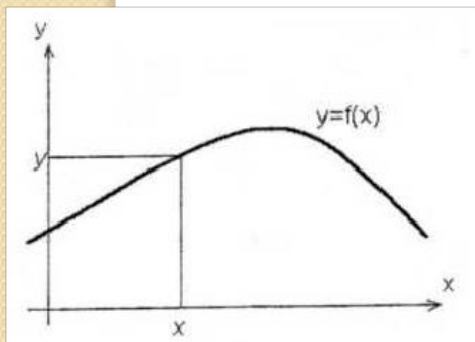
При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента и соответствующие значения функции.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	Y_1	Y_2	...	Y_n

Примером таких таблиц могут служить таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, результаты экспериментов.

2. Графический способ задания функции.

Если в прямоугольной системе координат на плоскости изобразить в виде линии некоторую совокупность точек так, что $y = f(x)$, где x - абсциссы точек, а y - ординаты, то такая совокупность точек называется *графиком функции*.



Откладывая на оси абсцисс необходимое значение x и восстанавливая перпендикуляр из точки x до пересечения с кривой, а затем, проводя прямую, параллельную оси абсцисс до пересечения ее с осью ординат, получим значение функции $y = f(x)$ в точке x .

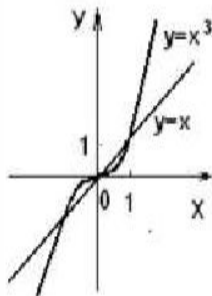
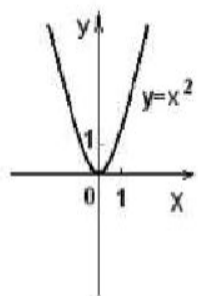
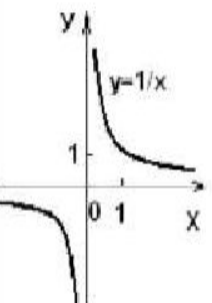
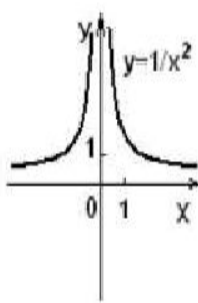
3. Аналитический способ задания функции.

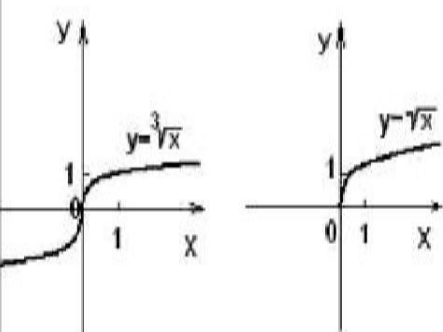
При аналитическом способе задания функция представляется аналитическим выражением, то есть через совокупность известных математических операций, которые производятся в определенной последовательности над числами и символами.

2. Элементарные функции и их свойства

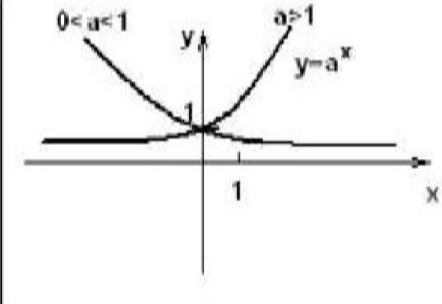
№ п/п	Обозначение функции	Область определения X	Область значений Y	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1	2	3	4	5	6	7	8

1. Степенная функция

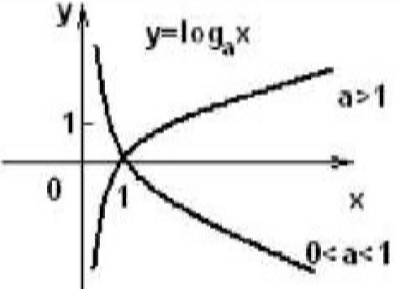
1	$y = x^n$ $n \in \mathbb{N}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	Нечетная, если n – нечетно; четная, если n – четно	Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n – нечетно. Убывает на $(-\infty, 0]$ и возрастает на $(0, \infty)$, если n – четно.	Непериодическая	 
2	$y = x^{-n}$ $n \in \mathbb{N}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	Нечетная, если n – нечетно; четная, если n – четно	Убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, \infty)$, если n – нечетно. Возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, \infty)$, если n – четно.	Непериодическая	 

3	$y = \sqrt[p]{x}$ $n \in \mathbb{N}$ $n > 1$	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно; $[0, \infty)$, если n – четно	Нечетная, если n – нечетно; не является четной или нечетной, если n – четно	Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n – нечетно. Возрастает на $[0, \infty)$, если n – четно.	Неперио- дическая	
---	--	---	---	--	---	----------------------	---

Показательная функция

4	$y = a^x$ $a > 0$, $a \neq 1$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$	Не является четной или нечетной	Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если $a > 1$ и убывает на $(-\infty, \infty)$, если $0 < a < 1$.	Неперио- дическая	
---	--------------------------------------	---------------------	---------------	---	---	----------------------	--

2. Логарифмическая функция

5	$y = \log_a x$ $a > 0,$ $a \neq 1$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	Не является четной или нечетной	Возрастает на $(0, \infty)$, если $a > 1$ и убывает на $(0, \infty)$, если $0 < a < 1$.	Неперио- дическая	
---	--	---------------	---------------------	---	---	----------------------	---

Тригонометрические функции

1	2	3	4	5	6	7	8
6	$y = \sin(x)$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	Нечетная	<p>Возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$.</p> <p>Убывает на $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in Z$</p>	Период $T = 2\pi$	
7	$y = \cos(x)$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	Четная	<p>Возрастает на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$.</p> <p>Убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$</p>	Период $T = 2\pi$	
8	$y = \operatorname{tg}(x)$	$(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$	$(-\infty, \infty)$	Нечетная	<p>Возрастает на $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$</p>	Период $T = \pi$	
9	$y = \operatorname{ctg}(x)$	$(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in Z$	$(-\infty, \infty)$	Нечетная	<p>Убывает на $[\pi n, \pi + \pi n]$, $n \in Z$</p>	Период $T = \pi$	

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для всех допустимых значений x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ и называется *нечетной*, если выполняется правило $f(-x) = -f(x)$.

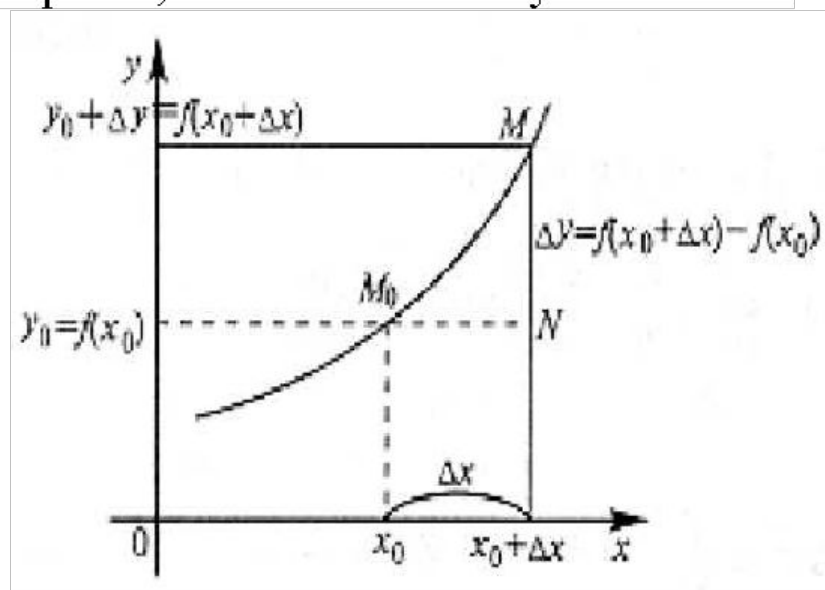
Функция $y = f(x)$, называется *периодической*, если существует такое постоянное число T , при прибавлении или вычитании которого от аргумента значение функции не меняется, т.е. $f(x + T) = f(x)$, $f(x - T) = f(x)$.

Наименьшее такое число T называется *периодом функции*.

Функция называется *возрастающей* на интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции, то есть при $\Delta x > 0$ имеем $\Delta y > 0$, где Δx называется *приращением аргумента функции* и определяется как разность между последующим и предыдущим значением аргумента $\Delta x = x - x_0$, а Δy называется *приращением функции* и находится как разность

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Функция называется *убывающей* на интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует меньшее значение функции, то есть при $\Delta x > 0$ приращение функции $\Delta y < 0$.



3. Предел функции.

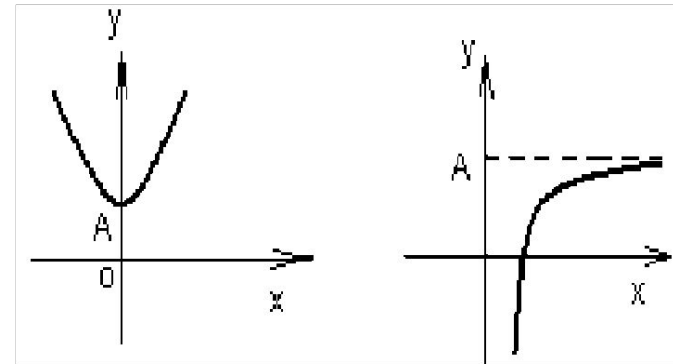
Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет предел A при $x \rightarrow a$, если при приближении x к a значение функции

как угодно близко подходит к A , то есть $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Для первого графика, изображенного на рисунке,

$A = \lim_{x \rightarrow 0} y(x)$, а для второго

$A = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$



Вычисление пределов.

Для вычисления пределов используют основные теоремы и правило Лопиталья (при возникновении «неопределенности» вида $0/0$ или ∞/∞), согласно которому предел частного двух функций равен пределу отношений производных этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\phi'(x)},$$

при условии, что этот предел существует. Если после использования этого правила снова возникает неопределенность, то его применяют вторично.

Пример: Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4)$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2) - 7 \lim_{x \rightarrow 3} (x) + 4 = -8$.

Пример: Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

Решение: При подстановке $x=0$ получаем неопределенность $0/0$. Тогда по правилу

Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(2x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x)}{1} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos(2x) = 2$.

Непрерывность функции.

Большинство функций, изучаемых в математическом анализе, являются непрерывными, то есть при небольших изменениях аргумента x функция y меняется также мало, и график такой функции является непрерывной кривой. Однако, у некоторых функций при определенных значениях x непрерывность может нарушаться и график прерываться, тогда говорят, что функция в данных точках имеет разрыв. Значения аргумента, при которых происходит разрыв функции, называются точками разрыва.

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если в этой точке у нее существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Сложная функция.

Пусть заданы две функции $y = g(x)$ и $z = f(v)$, причем область определения функции f содержит множество значений функции g . В этом случае функция $z = f(g(x))$ называется сложной функцией, составленной из функций g и f .

Подобным образом можно рассматривать сложные функции, составленные из более чем двух функций.

4. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ.

Понятие функции двух переменных

Функция не всегда зависит от одной переменной. Например, объем прямоугольного параллелепипеда зависит от длины его трех взаимно перпендикулярных ребер ($V = x y z$), то есть является функцией трех переменных, а площадь прямоугольного треугольника зависит от длины двух его катетов ($S = \frac{1}{2} x y$), то есть является функцией двух переменных.

Если каждой упорядоченной паре чисел (x, y) , таких, что x принадлежит множеству X , а y — множеству Y , по определенному правилу поставлено в соответствие одно или несколько чисел z , где z принадлежит множеству Z , то говорят, что задана функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$.

При этом число z называют значением функции f в точке (x, y) , переменные x и y - независимыми аргументами функции, множество $\{(x, y)\}$ - областью определения функции, а множество Z - множеством значений функции.

Частное и полное приращение функции двух переменных.

Частным приращением $\Delta_x z$ функции $Z=f(x,y)$ по ее аргументу x называется приращение, которое получает эта функция, если ее аргумент x имеет приращение Δx , а аргумент y остается неизменным: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Частным приращением $\Delta_y z$ функции $Z=f(x,y)$ по ее аргументу y называется приращение, которое получает эта функция, если ее аргумент y имеет приращение Δy , а аргумент x остается неизменным: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Полным приращением Δz функции $Z=f(x,y)$ по ее аргументам x и y называется приращение, которое получает эта функция, если оба ее аргумента получают приращения:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Понятие производной функции

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот

предел существует), то есть
$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции. Необходимым условием дифференцируемости функции является ее *непрерывность*.

Находить производную функции, используя ее определение, слишком сложно, поэтому были разработаны формулы и правила дифференцирования.

Формулы дифференцирования

$$1) (c)' = 0;$$

$$2) (x)' = 1;$$

$$3) (x^n)' = n \cdot x^{n-1};$$

$$4) (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$5) (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x};$$

$$6) (a^x)' = a^x \cdot \ln a;$$

$$7) (e^x)' = e^x;$$

$$8) (\sin x)' = \cos x;$$

$$9) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$10) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$11) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$12) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$13) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$14) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$15) (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Правила дифференцирования

1. Производная алгебраической суммы (или разности) дифференцируемых функций равна алгебраической сумме (или разности) производных этих функций:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

3. Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и производной второй функции на первую:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

4. Производная частного двух функций равна дроби, числитель которой равен разности произведений производной числителя на знаменатель и производной знаменателя на числитель, а знаменатель равен квадрату знаменателя исходной дроби:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' u}{v^2}$$

5. Производная сложной функции. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ дифференцируема в точке x_0 и справедлива следующая формула:

$$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$$

Таким образом, при нахождении производной сложной функции необходимо ввести промежуточный аргумент $u = \varphi(x)$, позволяющий свести данную функцию к виду основных элементарных функций $y = f[\varphi(x)] = f(u)$, взять производную этой функции, а затем умножить ее на производную от промежуточного аргумента u .

Физический и геометрический смысл производной.

Физический смысл производной - скорость протекания процесса в данной точке или мгновенная скорость изменения функции в данной точке.

Геометрический смысл производной - направление процесса в данной точке.

Докажем это с помощью графика непрерывной функции $y=f(x)$, представленного на рисунке.

Возьмем любое значение переменной x_0 . Ему будет соответствовать значение функции $f(x_0)$.

Аргументу x_0 зададим приращение Δx . В точке $x_0 + \Delta x$ функция имеет значение $f(x_0 + \Delta x)$.

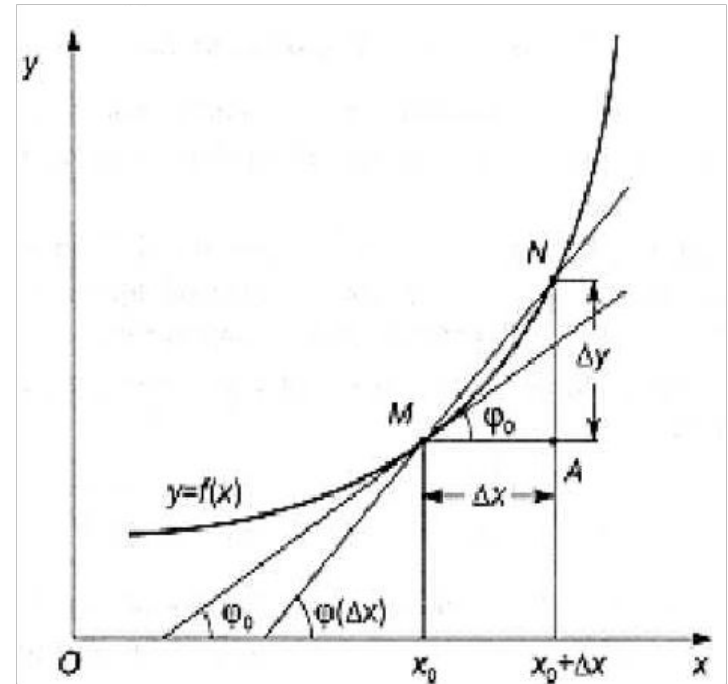
Приращению аргумента Δx соответствует приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Отношение $\Delta y / \Delta x$ очевидно есть тангенс угла $\varphi(\Delta x)$. При $\Delta x \rightarrow 0$, секущая MN примет

положение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке M, а угол $\varphi(\Delta x)$ - значение угла φ_0 - угла между касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$ и осью абсцисс.

Таким образом, производная функции в какой-либо точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке x_0 , и осью абсцисс.

Физический смысл второй производной - ускорение процесса в данной точке.



6. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ.

Понятие частной производной функции

Частной производной функции $z=f(x,y)$ по аргументу x в точке (x_0, y_0) называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции к соответствующему приращению ее аргумента Δx при стремлении последнего к нулю при условии, что этот предел

существует:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Частной производной функции $z=f(x,y)$ по аргументу y в точке (x_0, y_0) называется предел отношения частного приращения $\Delta_y z$ функции к соответствующему приращению ее аргумента Δy при стремлении последнего к нулю при условии, что этот предел существует:

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частная производная функции нескольких переменных по какому-либо из ее аргументов характеризует скорость изменения данной функции при изменении этого аргумента.

Вычисление частных производных функции

Частные производные функции нескольких переменных находят, используя те же правила и формулы, что и для нахождения производных функции одной переменной, однако при нахождении частной производной функции нескольких переменных по какому-либо аргументу все остальные аргументы этой функции считают постоянными величинами.

Пример: Найти частные производные функции

$$z = \sqrt{xy}$$

Решение: Найдем частную производную функции по x (при этом y считаем постоянной

величиной):
$$z'_x = (\sqrt{xy})' = (\sqrt{y} \cdot \sqrt{x})' = \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x})' = \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

Найдем частную производную функции по y (при этом x считаем постоянной

величиной):
$$z'_y = (\sqrt{xy})' = (\sqrt{y} \cdot \sqrt{x})' = \sqrt{x} \cdot (\sqrt{y})' = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА.

Понятие дифференциала функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , то есть имеет в этой точке производную $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то ее приращение можно записать в виде: $\Delta y = y' \Delta x + \beta \Delta x$, где β — бесконечно малое число. Последнее слагаемое в этом выражении имеет второй порядок малости, поэтому приращение функции определяется первым слагаемым, получившим название *дифференциала функции* (dy). Таким образом, $\Delta y \approx dy$.

Дифференциал функции — это главная линейная часть приращения функции.

Погрешность этого приближенного равенства тем меньше, чем меньше приращение аргумента.

Малое значение приращения аргумента принято обозначать dx и называть *дифференциалом аргумента функции* $dx = \Delta x$. Используя данное обозначение, можно записать формулу нахождения дифференциала функции одного аргумента:

$$dy = y' dx$$

Геометрический смысл дифференциала.

Легче всего пояснить геометрический смысл дифференциала, если использовать для этого рисунок.

Дифференциал функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, при переходе из данной точки в точку с абсциссой $(x+\Delta x)$.

Дифференциал может быть как больше, так и меньше приращения функции. Он меньше приращения для вогнутых функций (если кривая своей вогнутостью направлена вниз) и больше для выпуклых функций (если кривая своей вогнутостью направлена вверх).

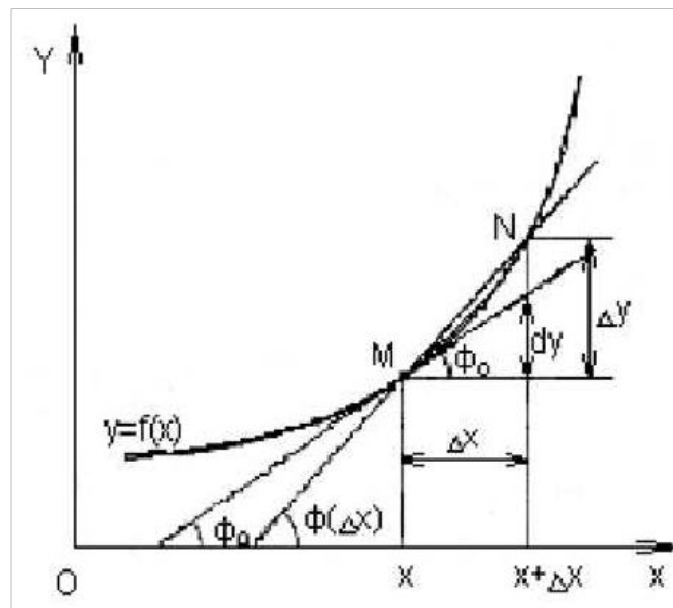
Применение дифференциала.

Дифференциал используют для приближенных вычислений и оценки погрешностей.

Согласно определению дифференциала $\Delta y \approx dy$. Но так как $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$, а

$dy = y' dx$, следовательно, $y(x + \Delta x) - y(x) \approx y'(x) dx$ или $y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x) dx$.

Эти формулы и применяют для приближенных вычислений и оценки погрешностей в случае, когда $y'(x) = 0$.



8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИИ.

Определение: Функция $F(x)$, дифференцируемая на интервале (a, b) , называется первообразной для функции $f(x)$ на данном интервале, если для всех значений x , принадлежащих этому интервалу, выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Определение: Совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом этой функции* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + const$$

Таблица основных интегралов

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C (\mu \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла функции $f(x)$ равна самой этой функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2) Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3) Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до константы: $\int dF(x) = F(x) + C$.

4) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$.

5) Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций, т.е. $\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots$

6) Формула интегрирования остается справедливой, если переменная интегрирования является функцией: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную. Это свойство называется инвариантностью.

Методы интегрирования

- 1) Метод разложения или непосредственное интегрирование.
- 2) Метод замены переменных
- 3) Интегрирование по частям

9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Пусть задана функция $y = f(t)$ скорость получения химического вещества в зависимости от времени реакции.

Тогда общее количество препарата можно найти, если разделить все время наблюдения за реакцией на очень маленькие отрезки, а затем умножить среднюю скорость реакции на каждом отрезке на его длину и просуммировать

$$N = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i$$

по всем отрезкам, то есть получим: , где $f(t_i)$ - средняя точка на отрезке.

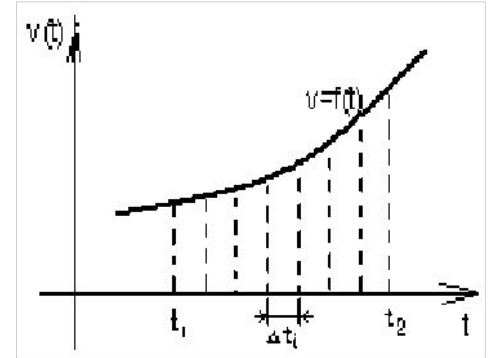
Полученное выражение имеет название интегральная сумма и записывается через

$$N = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

определенный интеграл:

Для нахождения определенного интеграла используется формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) - \text{ первообразная функция } f(x).$$



Свойства определенного интеграла

1) Определенный интеграл с симметричными пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

2) При перемене местами пределов интегрирования величина определенного

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

интеграла меняется на противоположную величину:

3) Если отрезок интегрирования разделен на конечное число частичных отрезков, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равен сумме определенных интегралов от этой функции на каждом из частичных отрезков:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^k f(x) dx + \int_k^b f(x) dx$$

Методы интегрирования

- 1) Метод разложения или непосредственное интегрирование
- 2) Замена переменной
- 3) Интегрирование по частям

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Определение: Дифференциальным называется уравнение, содержащее неизвестную функцию, независимую переменную и производные первого, второго и т.д. порядка.

$$F(y, x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Порядок дифференциального уравнения определяется наибольшим порядком производных, входящих в это уравнение.

Дифференциальные уравнения бывают:

- 1) Обыкновенные - когда неизвестная функция зависит только от одного аргумента, например: $y' = xy$ или $dy = x^2 dx$.
- 2) Уравнения с частными производными - когда функция зависит от нескольких независимых переменных, например:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{- (волновое уравнение)}$$

Решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Определение: Дифференциальное уравнение вида $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Последовательность решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

1) Исходное уравнение приводят к виду дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $y' = f_1(x)f_2(y)$

2) Записывают производную в этом уравнении через дифференциалы: $y' = \frac{dy}{dx}$ и получают уравнение вида: $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$.

3) Разделяют переменные: $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$

4) Ставят знак интеграла перед правой и левой частями: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$ и берут их.

5) Затем выражают y через x : $y=f(x,C)$ - это будет общее решение дифференциального уравнения.

- Определение: Решение дифференциального уравнения, выраженное через константу, называется *общим решением дифференциального уравнения*.
- Определение: Решение дифференциального уравнения, в котором константа определена из граничных, начальных либо каких-то других условий, называется *частным решением дифференциального уравнения*.
- Определение: Если решение дифференциального уравнения найдено в виде, не разрешенном относительно y , то оно называется *общим интегралом дифференциального уравнения*.



Спасибо за внимание!