Алгебра и начала анализа

Повторение

Радианная и градусная меры связаны зависимостью:

$$180^0 = \pi$$

$$n^0 = \frac{\pi n}{180}$$

Пример

Выразить в радианной мере величины углов:

$$120^0 =$$

$$310^0 =$$

$$150^0 =$$

$$72^0 =$$

$$90^0 =$$

Выразить в градусной мере величины углов:

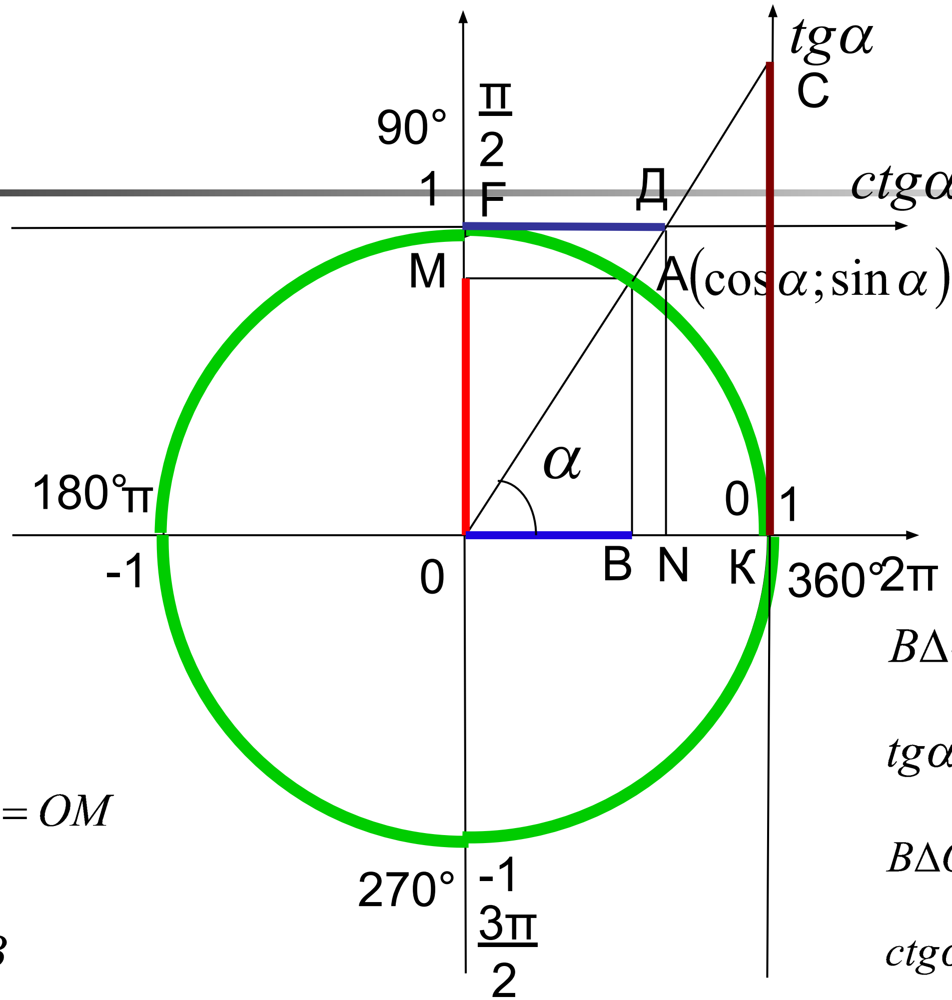
$$\frac{\pi}{3} =$$

$$\frac{5\pi}{36} =$$

$$\frac{3\pi}{5} =$$

$$-\frac{\pi}{9} =$$

R=1



$B\Delta ABO: OA = 1$

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB = OM$$

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$$

По теореме Пифагора:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$B\Delta OCK:$

$$tg\alpha = \frac{KC}{OK} = \frac{KC}{1} = KC$$

$B\Delta ODN:$

$$ctg\alpha = \frac{ON}{DN} = \frac{ON}{1} = ON = FD$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Определения

Синусом числа $\boldsymbol{x}$ называется ***ордината*** точки А, ***косинусом*** числа $\boldsymbol{x}$ называется ***абсцисса*** точки А, которая получена поворотом начальной точки единичной окружности на угол $\boldsymbol{x}$.

Тангенсом числа $\boldsymbol{x}$ называется отношение синуса числа x к косинусу числа x,
котангенсом числа $\boldsymbol{x}$ называется отношение косинуса числа x к синусу числа x.

Основные тригонометрические функции

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

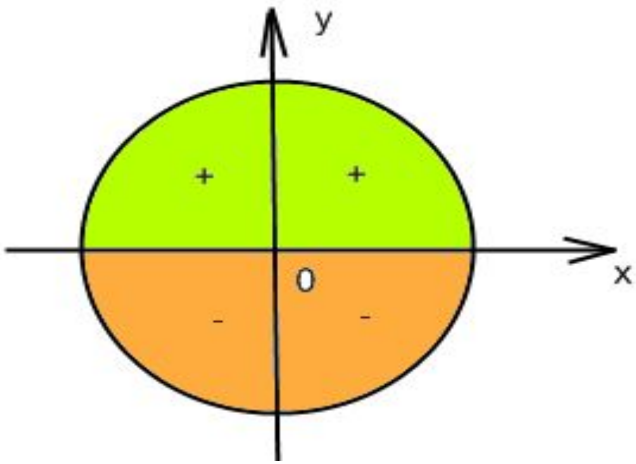
$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

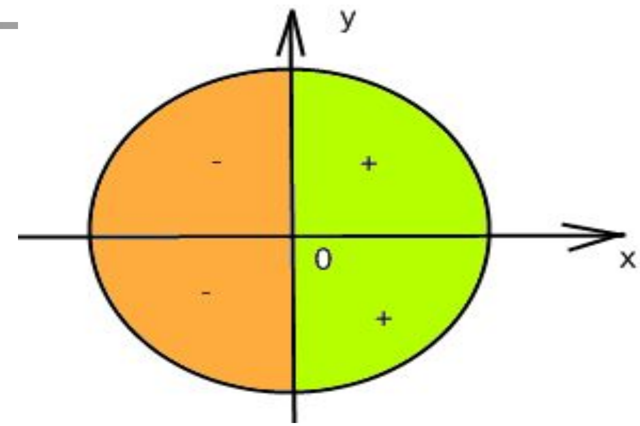
$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

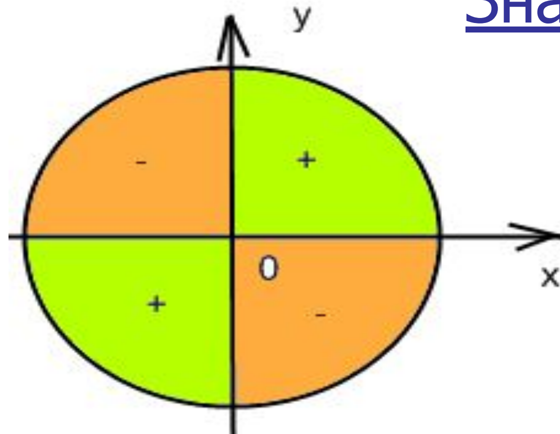
Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса



Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса

Пример

- Упростите выражения: $19\cos^2\alpha - 9 + 19\sin^2\alpha$
- Найдите sinβ, если cosβ = -0,6 и $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$
- Найдите значение выражения $2\sqrt{26}\sin x$,если $\cos x = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$, $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Пример

- Упростите выражения:

$$1)\ \sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{2\pi}{9}\sin\frac{5\pi}{18}$$

$$2)\ \cos 45^0 \cos 15^0 - \sin 45^0 \sin 15^0$$

Формулы приведения

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sin α	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos α	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg α	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
ctg α	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Пример

- Найдите значение выражения $\sin(270^0 - \beta)$, если $\cos\beta = 0,8$

- Вычислите: $\cos^2 15^0 - \sin^2 75^0$

Формулы суммы и разности синусов (косинусов)

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

Пример

- Докажите тождество: $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Формула половинного аргумента

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$