Теория Автоматического Управления
Часть 3

Полулях Антон Иванович, к.т.н., доцент кафедры АД, зам. начальника отдела проектирования систем автоматического управления

3. Модели линейных объектов

- ***3.9. Логарифмические частотные характеристики***
- Частотные характеристики достаточно сложно строить вручную.
- В 60-е годы, когда развивалась классическая теория управления, не было мощных компьютеров, поэтому наибольшую популярность приобрели приближенные методы, с помощью которых можно было проектировать регуляторы с помощью ручных вычислений и построений.
- Один из таких подходов основан на использовании **логарифмических частотных характеристик**.

3. Модели линейных объектов

- Вместо $A(\omega)$ было предложено использовать *логарифмическую амплитудную частотную характеристику* (ЛАЧХ): график, на котором по оси абсцисс откладывается десятичный логарифм частоты ($\lg(\omega)$), а по оси ординат – величина $L_m(\omega) = 20\lg A(\omega)$, измеряемая в децибелах (дБ).
- При построении логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) по оси абсцисс также откладывается логарифм частоты $\lg(\omega)$.

3. Модели линейных объектов

- Децибелы - это десять умножить на десятичный логарифм отношения мощностей сигналов (или 20 на логарифм отношения амплитуд, что то же самое) . Если один сигнал в 100 раз мощнее другого, то говорят, что его уровень выше на 20 децибел. Если в 1000 раз - то на 30 децибел, и т. д.
- Почему логарифм? Так оказывается удобнее, когда имеем дело с очень большим диапазоном мощностей. Например, самый громкий звук мощнее самого тихого слышимого звука в 10^12 (миллион миллионов) раз, а в децибелах это будет всего 120 дБ.
  Когда просто говорят, что уровень шума (или звука) столько-то децибел, имеется в виду - по отношению к порогу слышимости, который составляет 20 микропаскалей.

3. Модели линейных объектов

- Единицей отсчета на логарифмической оси частот является *декада* – диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу).
- Вместе ЛАЧХ и ЛФЧХ называются логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой (ЛАФЧХ) или *диаграммой Боде*.
- Логарифмические характеристики обладают двумя ценными свойствами:1) ЛАЧХ и ЛФЧХ для произведения $W_1(s)W_2(s)$ вычисляются как суммы ЛАЧХ и ЛФЧХ отдельных звеньев:

$$20\lg A(\omega) = 20\lg A_1(\omega) + 20\lg A_2(\omega)\,; \qquad (37)$$

$$\phi(\omega) = \phi_{11}(\omega) + \phi_2(\omega)\,; \qquad (38)$$

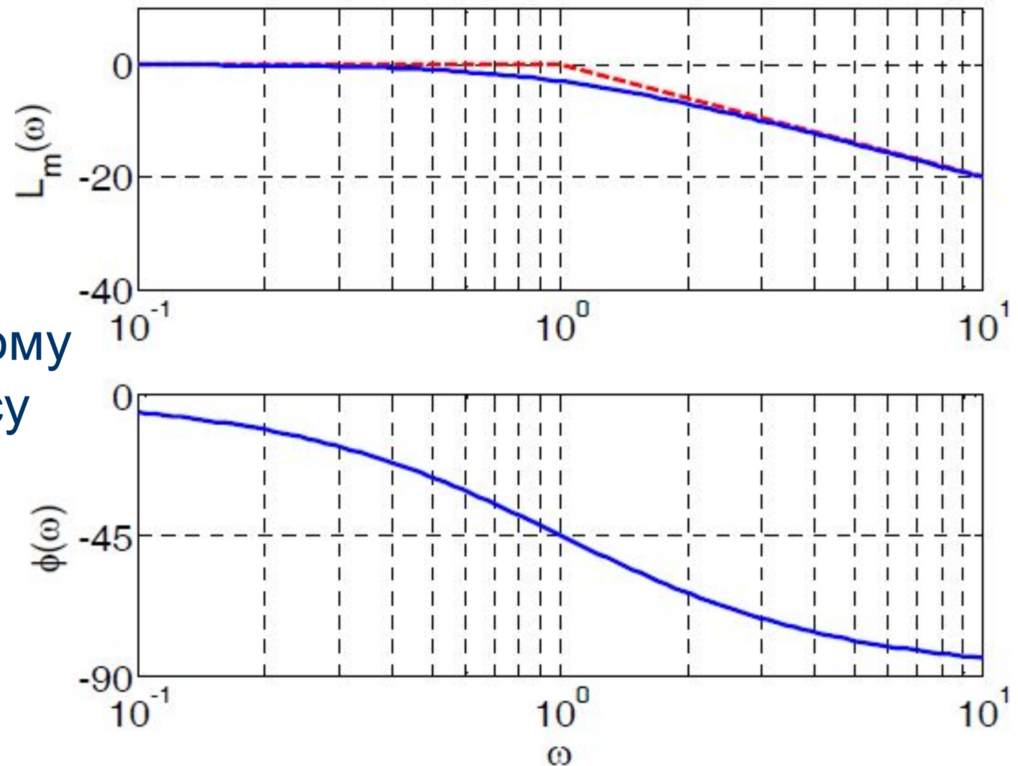
3. Модели линейных объектов

- 2) в области высоких и низких частот ЛАЧХ асимптотически приближаются к прямым, наклон которых составляет ± 20 дБ/дек (децибел на декаду), ± 40 дБ/дек и т.д.
- В классической теории управления хорошо разработаны методы анализа и синтеза систем на основе *асимптотических ЛАЧХ*, которые представляют собой ломаные линии и легко строятся вручную.
- С появлением компьютерных средств расчета практическая ценность ЛАФЧХ несколько снизилась, однако они по сей день остаются простейшим инструментом прикидочных расчетов для инженера.

3. Модели линейных объектов

- На рисунке показаны точная (сплошная синяя линия) и асимптотическая (штриховая красная линия) ЛАФЧХ для звена первого порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{Ts+1} \text{ при } T = 1 \text{ с.}$$



- Первая асимптота, определяющая поведение ЛАЧХ **на низких частотах**, имеет нулевой наклон, потому что звено относится к классу *позиционных* звеньев, имеющих постоянный ненулевой статический коэффициент усиления, то есть $W(0) = 1 \neq 0$.

3. Модели линейных объектов

- Если $W(0) = 0$, передаточная функция содержит множитель s^k ($k > 0$), который соответствует производной порядка k . В этом случае наклон ЛАЧХ на низких частотах равен $k \cdot 20$ дБ/дек.
- Если $W(0) = \infty$, звено содержит один или несколько *интеграторов*, то есть в знаменателе есть сомножитель s^k . Тогда наклон ЛАЧХ на низких частотах равен $-k \cdot 20$ дБ/дек.
- Наклон ЛАЧХ **на высоких частотах** определяется разностью степеней числителя и знаменателя передаточной функции. Если числитель имеет степень m , а знаменатель – степень n , то наклон последней асимптоты равен $20 \cdot (m-n)$ дБ/дек. В нашем примере $m-n = 0 - 1 = -1$.
- Поэтому вторая асимптота, определяющая свойства звена на высоких частотах, имеет наклон − 20 дБ/дек, то есть, за одну декаду значение уменьшается на 20 дБ (проверьте по графику!).

4. Типовые динамические звенья

- Обычно система управления состоит из отдельных блоков, каждый из которых описывается уравнениями низкого порядка (чаще всего – первого или второго).
- Для понимания работы системы в целом желательно хорошо представлять, как ведут себя ее отдельные элементы. Кроме того, при построении ЛАФЧХ сложной системы передаточную функцию разбивают на простейшие сомножители

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \ldots \cdot W_N(s)$$

- и далее, воспользовавшись свойствами ЛАФЧХ, строят характеристики для всей системы как суммы ЛАЧХ и ЛФЧХ отдельных звеньев.

4. Типовые динамические звенья

- ***4.1. Усилитель***
- Звенья, имеющие конечный ненулевой коэффициент усиления постоянного сигнала, то есть $W(0) = k \neq 0$, называются *позиционными*. Это значит, что числитель и знаменатель передаточной функции имеют ненулевые свободные члены (постоянные слагаемые).
- Простейшее позиционное звено – идеальный (безынерционный) **усилитель**. Его передаточная функция $W(s) = k$. Строго говоря, он не является динамическим звеном, поскольку изменение выхода происходит мгновенно, сразу вслед за изменением входа. При действии на вход единичного ступенчатого сигнала $\mathbf{1}(t)$ (или дельта-функции $\delta(t)$) на выходе будет такой же сигнал, усиленный в k раз, поэтому переходная и импульсная характеристики звена равны $h(t) = k \quad (t > 0)$ и $w(t) = k \cdot \delta(t)$

4. Типовые динамические звенья

- Если на вход усилителя действует синусоидальный сигнал, на выходе он усиливается в *k* раз без изменения фазы, поэтому амплитудная и фазовая частотная характеристики не зависят от частоты входного сигнала: $A(\omega) = k$, $\phi(\omega) = 0$.
- ***4.2. Апериодическое звено***
- Одно из самых часто встречающихся звеньев – **апериодическое**, которое описывается дифференциальным уравнением

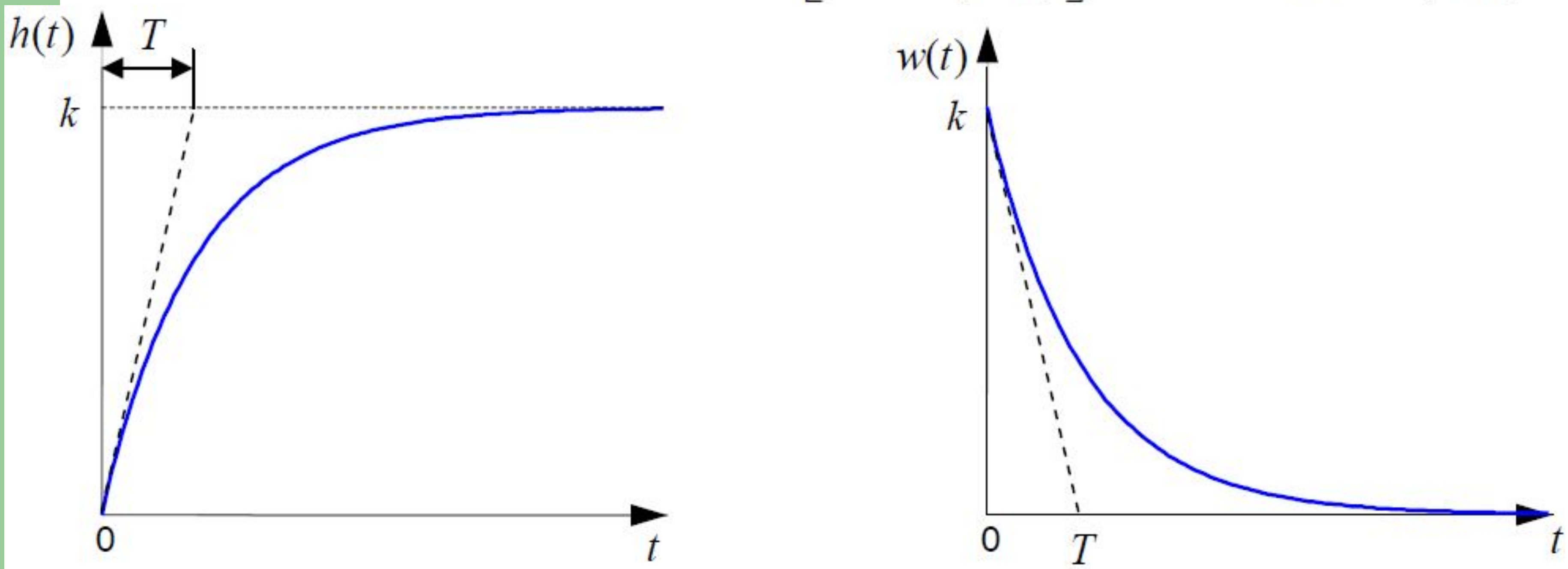
$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t) \qquad (39)$$

и имеет передаточную функцию $W(s) = \dfrac{k}{Ts+1}$ здесь *k* – безразмерный коэффициент, а $T > 0$ – постоянная, которая называется *постоянной времени* звена. Постоянная времени – размерная величина, она измеряется в секундах и характеризует *инерционность* объекта, то есть скорость его реакции на вход.

4. Типовые динамические звенья

- В разд. 3.3 и 3.4 мы уже нашли переходную и весовую функции апериодического звена

$$h(t) = k\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right], \qquad w(t) = \frac{k}{T}\exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$



4. Типовые динамические звенья

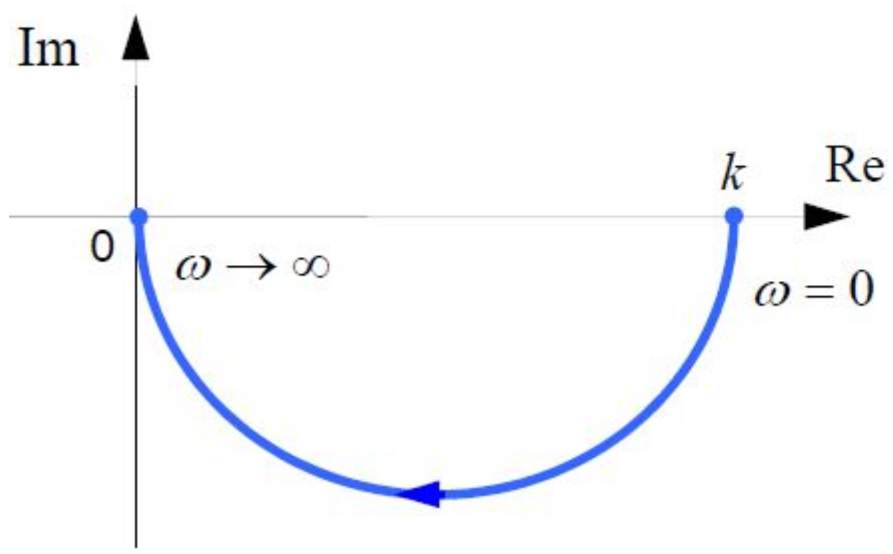
- Обратите внимание, что предельное значение переходной характеристики равно k , а касательная к ней в точке $t = 0$ пересекается с линией установившегося значения при $t = T$.
- Переходная и импульсная характеристики выходят на установившееся значение (с ошибкой не более 5%) примерно за время $3T$.
- Эти факты позволяют определять постоянную времени экспериментально, по переходной характеристике звена.
- Частотная характеристика определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k(1 - Tj\omega)}{T^2\omega^2 + 1} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - \frac{jkT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

4. Типовые динамические звенья

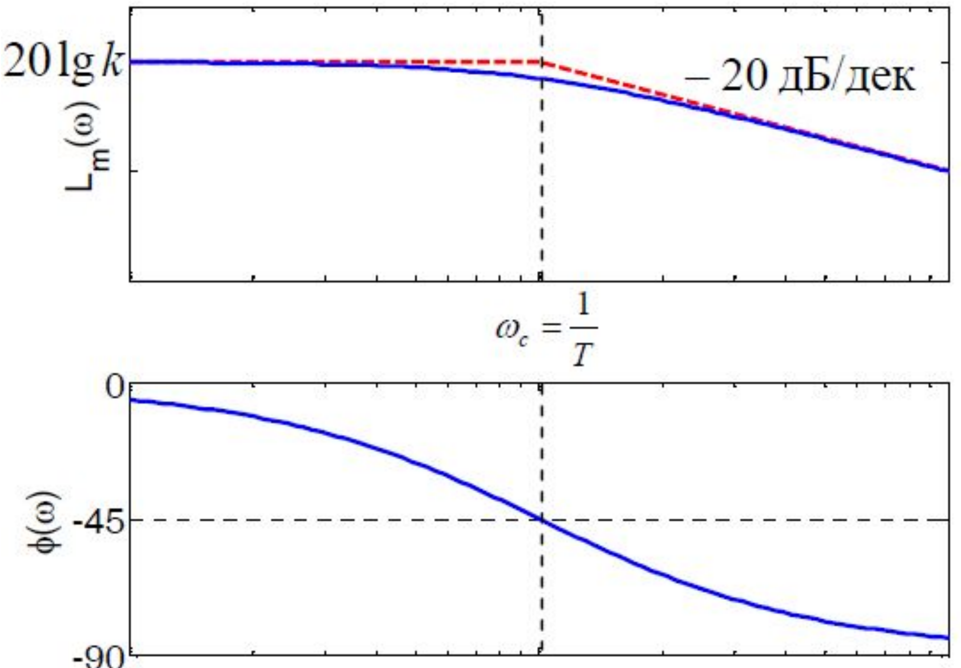
- Для каждой частоты ω значение *W*(*j*ω) – это точка на комплексной плоскости.
- При изменении ω от 0 до ∞ получается кривая, которая называется *годографом Найквиста* (диаграммой Найквиста).

- Для каждой частоты ω значение *W*(*j*ω) – это точка на комплексной плоскости.
- При изменении ω от 0 до ∞ получается кривая, которая называется *годографом Найквиста* (диаграммой Найквиста).



4. Типовые динамические звенья

- Асимптотическая ЛАЧХ этого звена образована двумя прямыми, которые пересекаются на *сопрягающей частоте* $\omega_c = 1/T$
- На низких частотах она имеет нулевой наклон (так как звено позиционное), причем в этой области *L k m* ≈ 20lg .
- На высоких частотах наклон ЛАЧХ равен − 20 дБ/дек, так как степень знаменателя передаточной функции на единицу больше степени ее числителя. Фазовая характеристика меняется от 0 до − 90° , причем на сопрягающей частоте ω_c она равна − 45° .



4. Типовые динамические звенья

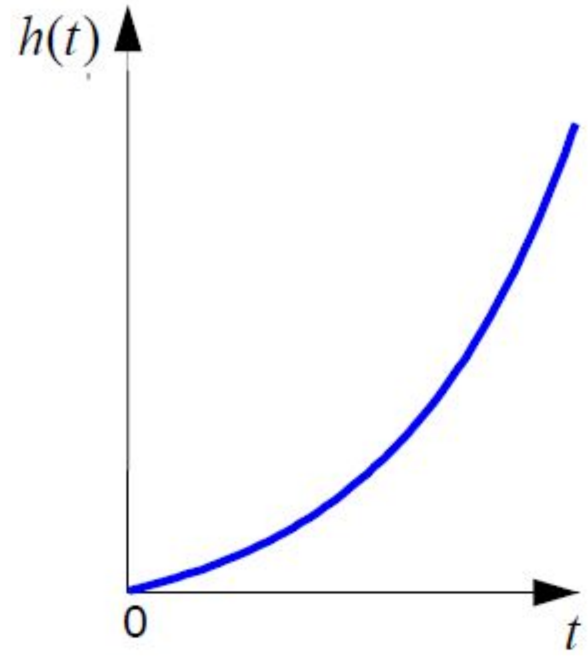
- Поскольку ЛАЧХ уменьшается на высоких частотах, апериодическое звено подавляет высокочастотные шумы, то есть обладает свойством *фильтра низких частот*.
- Для сравнения рассмотрим также *неустойчивое апериодическое звено*, которое задается уравнением $$T\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = k\cdot x(t)$$
- Как видим, все отличие от (39) – только в знаке в левой части уравнения (плюс сменился на минус). Однако при этом кардинально меняются переходная и импульсная характеристики:

$$h(t) = k\left[\exp\left(\frac{t}{T}\right) - 1\right], \qquad w(t) = \frac{k}{T}\exp\left(\frac{t}{T}\right)$$

- Обычно предполагается, что постоянная времени $T > 0$, тогда экспоненты в этих выражениях бесконечно возрастают с ростом t.

4. Типовые динамические звенья

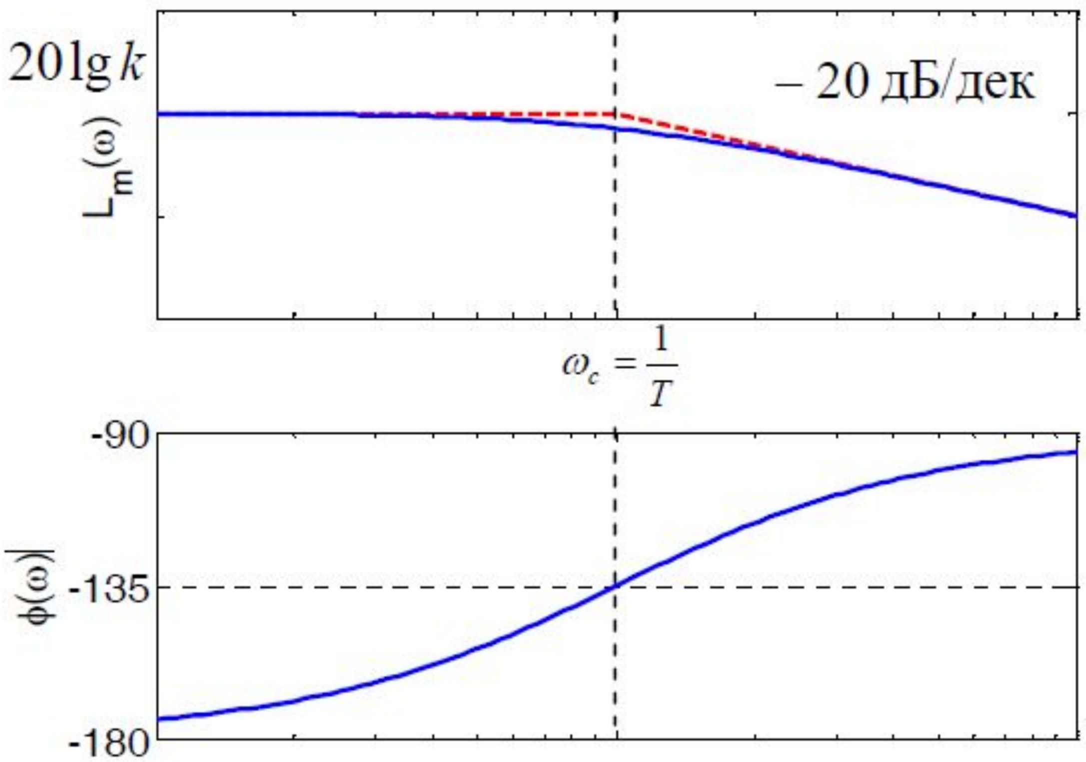
- Поэтому звено названо «неустойчивым»: в покое оно находится в неустойчивом равновесии, а при малейшем возмущении «идет вразнос».



- Интересно сравнить частотные характеристики устойчивого и неустойчивого апериодических звеньев с теми же коэффициентами усиления и постоянными времени.

4. Типовые динамические звенья

- Из этого графика видно, что ЛАЧХ неустойчивого звена точно совпадает с ЛАЧХ аналогичного устойчивого, но отрицательный фазовый сдвиг значительно больше.
- Устойчивое апериодическое звено относится к *минимальнофазовым* звеньям, то есть его фаза по модулю меньше, чем фаза любого звена с такой же амплитудной характеристикой. Соответственно, неустойчивое звено – *неминимально-фазовое*.



4. Типовые динамические звенья

- К **неминимально-фазовым** звеньям относятся все звенья, передаточные функции которых имеют *нули или полюса* в правой полуплоскости, то есть, с положительной вещественной частью. Для *минимально-фазовых* звеньев все нули и полюса передаточной функции находятся в левой полуплоскости (имеют отрицательные вещественные части).
- Например, при положительных постоянных времени T_1 , T_2 и T_3 звено с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

- – минимально-фазовое, а звенья с передаточными функциями

$$W_1(s) = \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)}, \quad W_1(s) = \frac{T_1 s - 1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad W_3(s) = \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s - 1)(T_3 s - 1)}$$

- – неминимально-фазовые.

4. Типовые динамические звенья

- ***4.3. Колебательное звено***
- Колебательное звено – это звено второго порядка с передаточной функцией вида $$W(s) = \frac{k}{b_2 s^2 + b_1 s + 1},$$
- знаменатель которой имеет комплексно-сопряженные корни (то есть $b_1^2 - 4b_2 < 0$.
- Как известно из теории дифференциальных уравнений, свободное движение такой системы содержит гармонические составляющие (синус, косинус), что дает колебания выхода при изменении входного сигнала.

4. Типовые динамические звенья

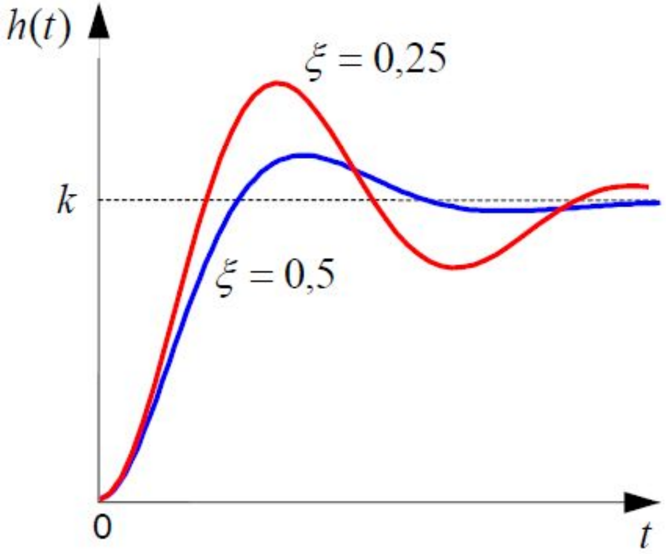
- Несложно представить передаточную функцию колебательного звена в форме

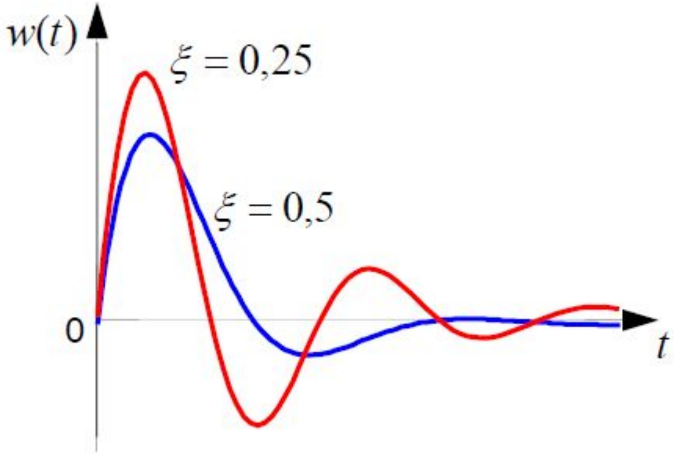
$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} \qquad (41)$$

- где *k* – коэффициент, *T* – постоянная времени (в *секундах*), ξ – *параметр затухания* ($0 < \xi < 1$). Постоянная времени определяет инерционность объекта, чем она больше, тем медленнее изменяется выход при изменении входа. Чем больше ξ , тем быстрее затухают колебания.
- При $\xi = 0$ в (41) получается *консервативное* звено, которое дает незатухающие колебания на выходе. Если $\xi \geq 1$, модель (41) представляет *апериодическое звено второго порядка*, то есть последовательное соединение двух апериодических звеньев.

4. Типовые динамические звенья

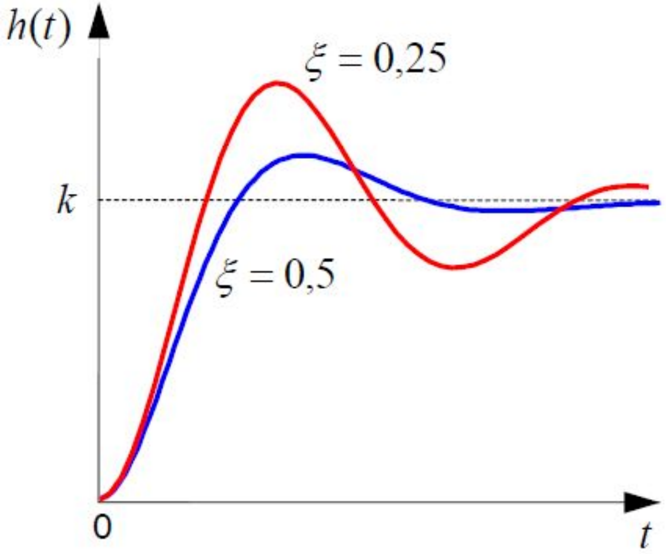
- Колебательное звено относится к позиционным звеньям, его статический коэффициент усиления равен $W(0) = k$.
- Переходная и импульсная характеристики отличаются выраженной колебательностью, особенно при малых значениях параметра затухания ξ . На следующих двух графиках синие линии соответствуют ξ = 0,5, а красные – ξ = 0,25 .

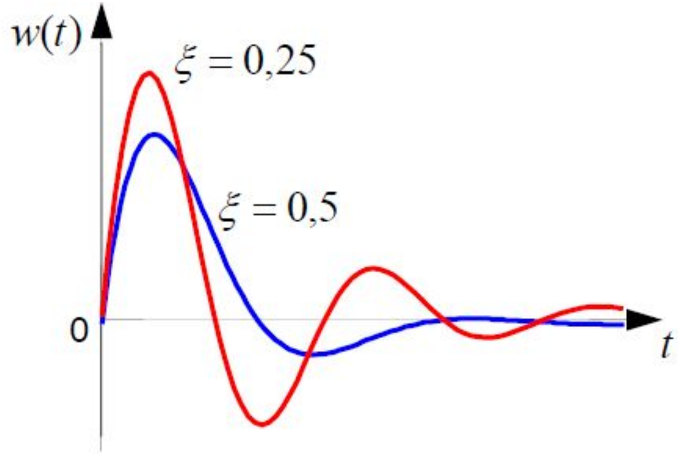




4. Типовые динамические звенья

- Колебательное звено относится к позиционным звеньям, его статический коэффициент усиления равен $W(0) = k$.
- Переходная и импульсная характеристики отличаются выраженной колебательностью, особенно при малых значениях параметра затухания ξ . На следующих двух графиках синие линии соответствуют ξ = 0,5, а красные – ξ = 0,25 .

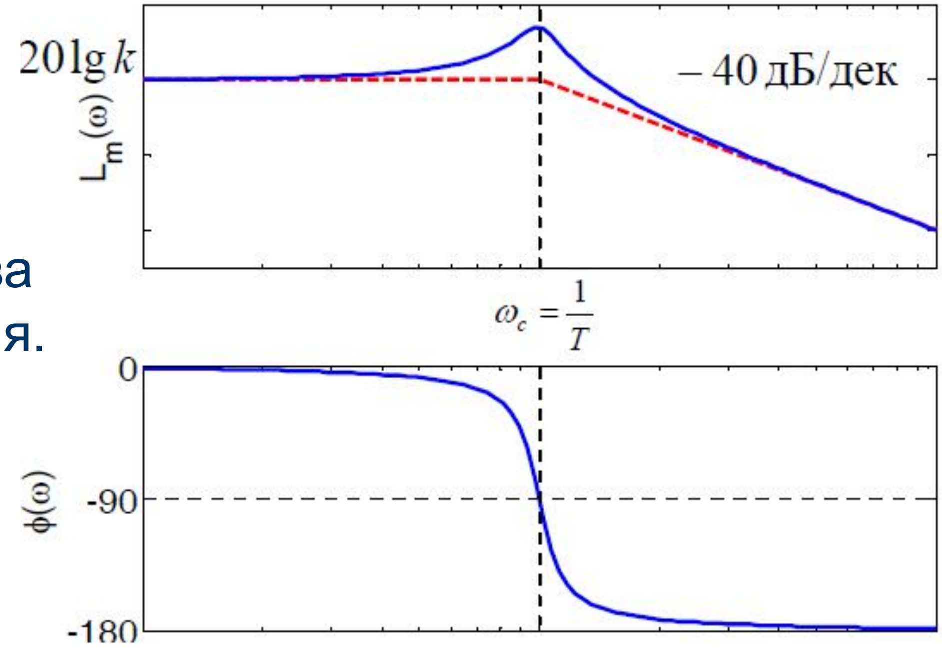




4. Типовые динамические звенья

- Асимптотическая ЛАЧХ этого звена образована двумя прямыми, которые пересекаются на *сопрягающей частоте* $\omega_c = 1/T_1$. На низких частотах она имеет нулевой наклон (так как звено позиционное), причем в этой области $L_m \approx 20\lg k$.

- На высоких частотах наклон ЛАЧХ равен − 40 дБ/дек, так как степень знаменателя передаточной функции на два больше степени ее числителя. Фазовая характеристика меняется от 0 до −180° , причем на сопрягающей частоте ω_c она равна − 90° .



4. Типовые динамические звенья

- При значениях $\xi < 0{,}5$ ЛАЧХ имеет так называемый «горб» в районе сопрягающей частоты, причем его высота увеличивается с уменьшением ξ . Это означает, что при частоте входного сигнала, равной ω_c , наблюдается *резонанс*, то есть частота возмущения совпадает с частотой собственных колебаний системы.
- В предельном случае при $\xi = 0$ (*консервативное звено*) ЛАЧХ терпит разрыв (обращается в бесконечность) на частоте ω_c , при таком входе амплитуда колебаний неограниченно растет и на практике объект разрушается.

4. Типовые динамические звенья

- ***4.4. Интегрирующее звено***
- Простейший пример интегрирующего звена – ванна, в которую набирается вода. Входной сигнал – это поток воды через кран, выход системы – уровень воды в ванне. При поступлении воды уровень растет, система «накапливает» (интегрирует) входной сигнал.
- Интегрирующее звено описывается уравнением

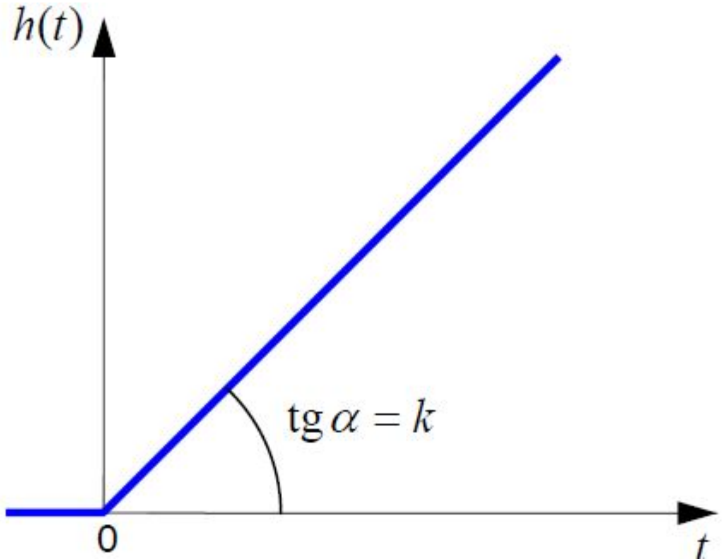
$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t)\,, \qquad (42)$$

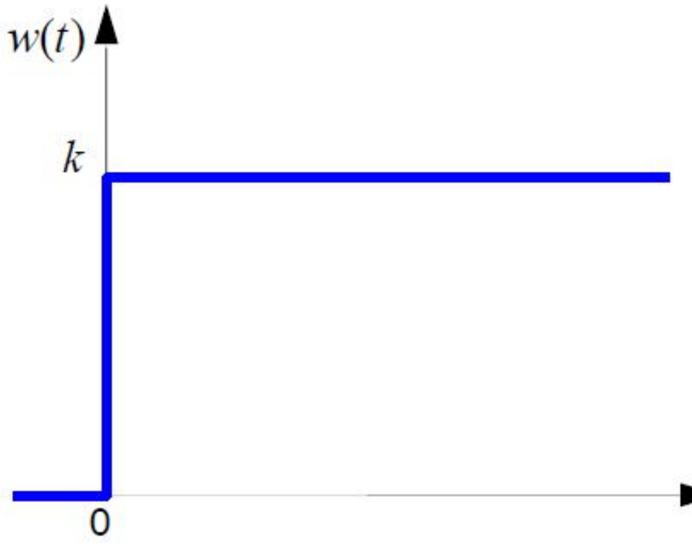
- которому соответствует передаточная функция $W(s) = k/s$
  Решение уравнения (42) дает

$$y(t) = y(0) + k\int_0^t x(\tau)\,d\tau\,.$$

4. Типовые динамические звенья

- Используя это решение для единичного скачка ($x(t) = 1$ при $t \geq 0$) при нулевых начальных условиях ($y(0) = 0$), получаем линейно возрастающую *переходную характеристику*: $h(t) = k \cdot t$.
- Для того, чтобы найти *импульсную характеристику*, вспомним, что интеграл от дельта функции на любом интервале, включающем $t = 0$, равен 1. Поэтому $w(t) = k$ (при $t \geq 0$).





4. Типовые динамические звенья

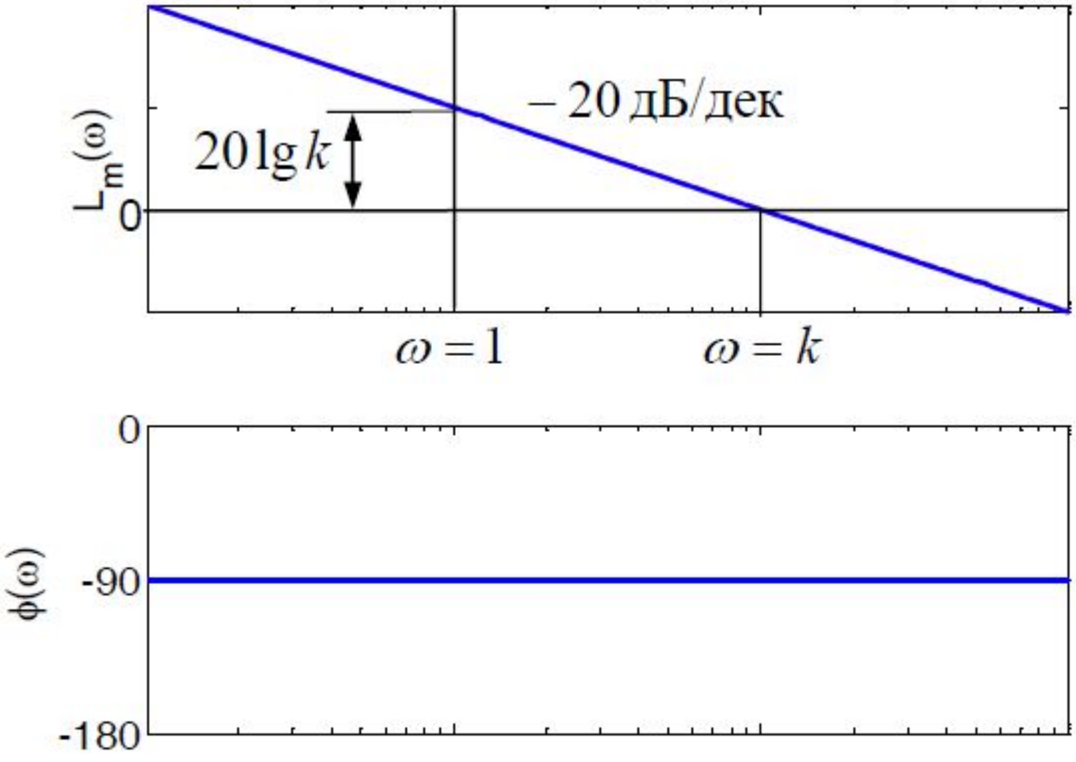
- Частотная характеристика интегрирующего звена определяется формулой

$$W(j\omega)=\frac{k}{j\omega}=-j\frac{k}{\omega}.$$

- Можно показать, что его логарифмическая амплитудная частотная характеристика – это прямая с наклоном − 20 дБ/дек.
- На низких частотах усиление максимально, теоретически на частоте ω = 0 оно равно бесконечности.
- Высокие частоты, наоборот, подавляются интегратором.

4. Типовые динамические звенья

- На частоте $\omega = 1$ значение ЛАЧХ равно $20\lg k$, а при $\omega = k$ ЛАЧХ обращается в нуль, поскольку $W(j\omega) = 1$. Фазовая характеристика $\varphi(\omega) = -90°$ – говорит о постоянном сдвиге фазы на всех частотах.



4. Типовые динамические звенья

- ***4.5. Дифференцирующие звенья***
- Дифференцирующее звено дает на выходе производную входного сигнала. Уравнение идеального дифференцирующего звена

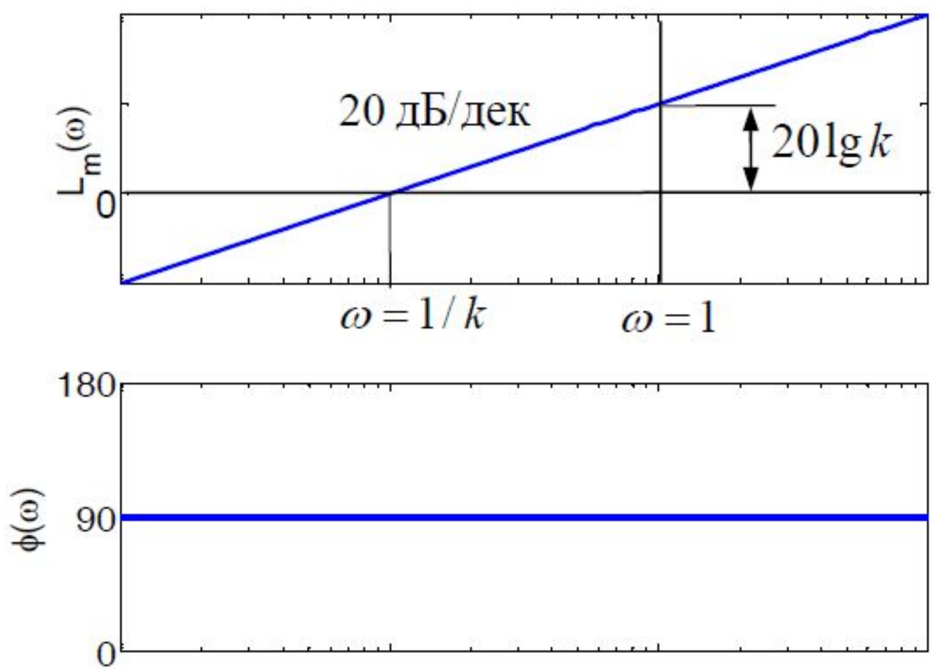
$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt},$$

- , его операторная запись $y(t) = k \cdot p\, x(t)$, а передаточная функция $W(s) = k \cdot s$.
- Известно, что производная единичного ступенчатого сигнала $\mathbf{1}(t)$ в точке $t = 0$ – это дельта-функция $\delta(t)$. Поэтому переходная и весовая функции дифференцирующего звена

$$h(t) = k\delta(t), \quad w(t) = k\frac{d\delta(t)}{dt}$$

4. Типовые динамические звенья

- Это физически нереализуемые функции, так как дельта-функцию и ее производную, имеющие бесконечные значения, невозможно получить на реальном устройстве.
- Поэтому идеальное дифференцирующее относится к *физически нереализуемым* звеньям.
- Логарифмическая амплитудная частотная характеристика дифференцирующего звена – прямая с наклоном 20 дБ/дек, пересекающая ось абсцисс $L_m(\omega) = 0$ на частоте $\omega = 1/k$. При $\omega = 1$ ЛАЧХ равна $L_m(1) = 20\lg k$.



4. Типовые динамические звенья

- Дифференцирующее звено подавляет низкие частоты (производная от постоянного сигнала равна нулю) и бесконечно усиливает высокочастотные сигналы, что требует бесконечной энергии и невозможно в физически реализуемых системах.
- Фазовая характеристика не зависит от частоты, звено дает положительный сдвиг фазы на 90^{o} . Действительно, при дифференцировании сигнала $x(t) = \sin\omega t$ получаем
- $y(t) = \cos\omega t = \sin(\omega t + 90°)$.
- Дифференцирующее звено реагирует не на изменение самой входной величины, а на изменение ее производной, то есть на *тенденцию* развития событий. Поэтому говорят, что дифференцирующее звено обладает упреждающим, *прогнозирующим* действием. С его помощью можно ускорить реакцию системы.

4. Типовые динамические звенья

- В технике не могут использоваться физически нереализуемые звенья. Поэтому важно рассмотреть аналогичное звено, которое выполняет дифференцирования низкочастотных сигналов и одновременно имеет ограниченное усиление на высоких частотах. *Инерционное дифференцирующее звено* описывается уравнением

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{dx(t)}{dt}$$

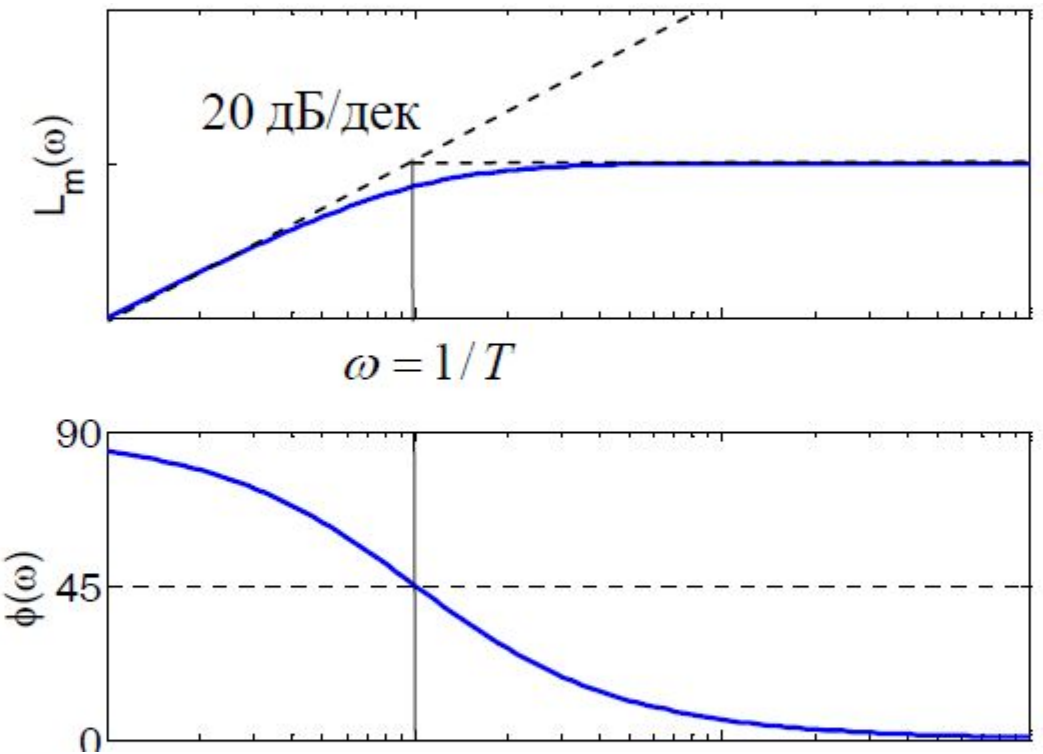
- и имеет переда

$$W(s)=\frac{ks}{Ts+1}.$$

- Фактически это последовательное соединение идеального дифференцирующего и апериодического звеньев.
- Апериодическое звено добавляет инерционность: обладая свойствами фильтра низких частот, оно ограничивает усиление на высоких частотах.

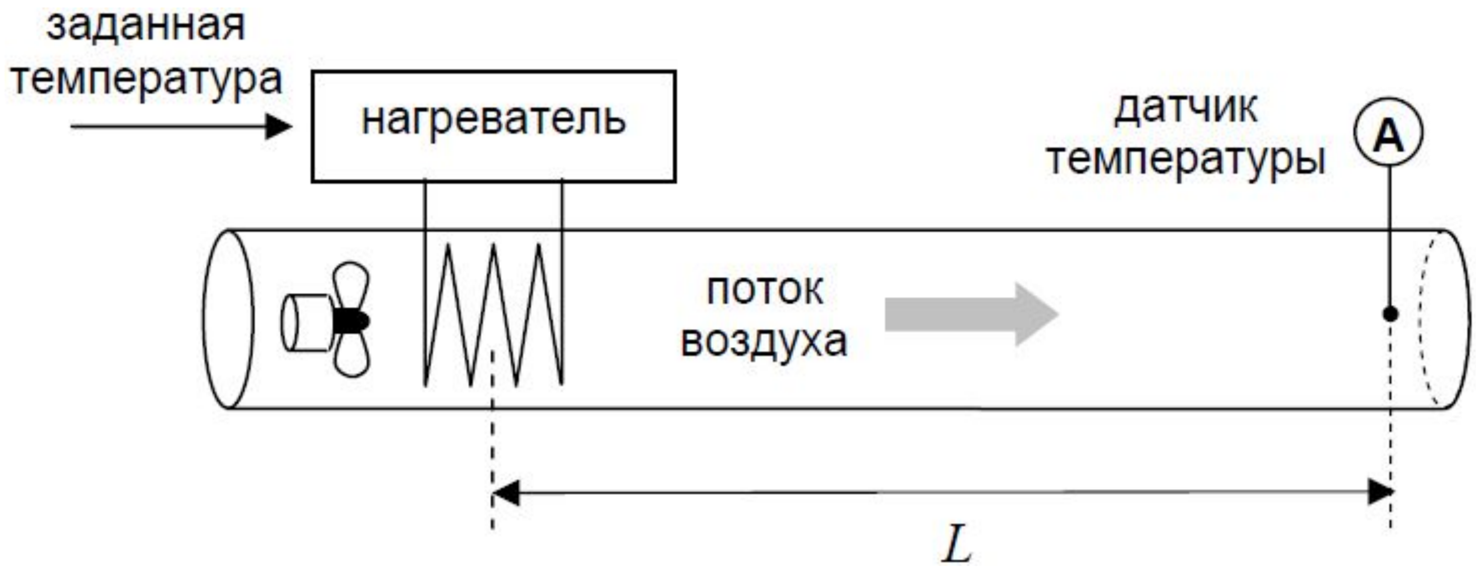
4. Типовые динамические звенья

- Поскольку передаточная функция имеет равные степени числителя и знаменателя, на высоких частотах (выше *сопрягающей частоты* $\omega_c = 1/T$) ЛАЧХ имеет нулевой наклон,
- поэтому неограниченного роста коэффициента усиления не происходит.
- Одновременно теряется точность дифференцирования, так как фазовая характеристика изменяется от 90° до нуля.



4. Типовые динамические звенья

- ***4.6. Запаздывание***
- Представим себе трубу, через которую вентилятор прокачивает воздух. В начале трубы установлен нагреватель, а температура воздуха измеряется датчиком в точке А.

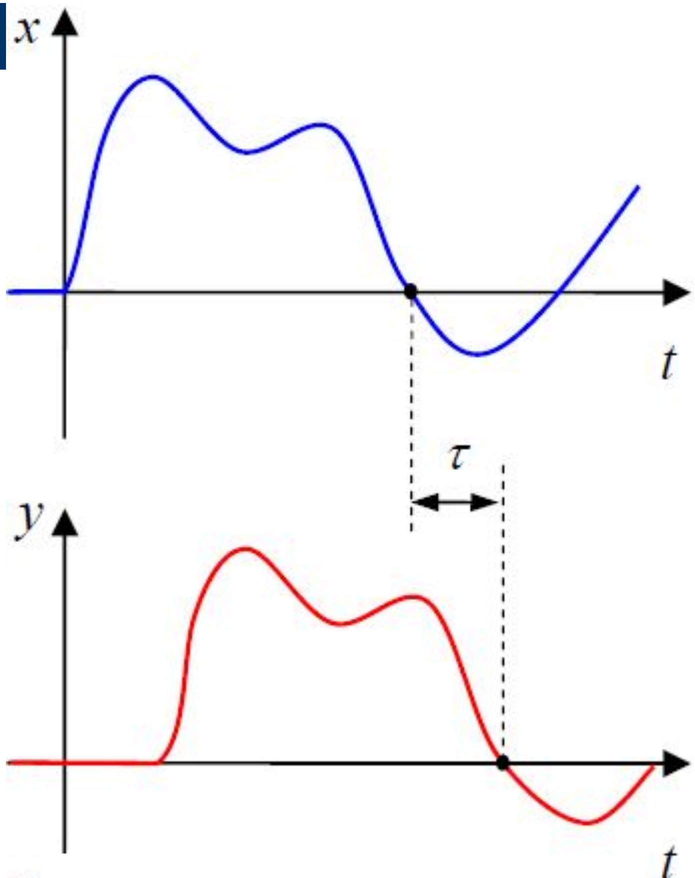


4. Типовые динамические звенья

- Очевидно, что при изменении температуры воздуха датчик обнаружит это не сразу, а через время τ = *L* / *v* , где *L* – длина трубы (в *метрах*), а *v* – скорость потока воздуха (в *м/с*). В этом случае говорят, что в системе есть транспортное **запаздывание** на величину τ (в *секундах*).
- Другой распространенный пример – вычислительное запаздывание в компьютере. Так называется время, которое необходимо для расчета нового управляющего сигнала после получения всех исходных данных.

4. Типовые динамические звенья

- Запаздывание в системе просто сдвигает сигнал вправо на временной оси, не меняя его формы. Математически это можно записать в виде *y*(*t*) = *x*(*t* −т) .
- Изображение сигнала на выходе звена запаздывания вычисляется по *теореме о смещении аргумента* для преобразования Лапласа:



$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty x(t-\tau)\, e^{-st}\, dt = e^{-s\tau}\int_0^\infty x(t)\, e^{-st}\, dt = e^{-s\tau} X(s),$$

4. Типовые динамические звенья

- Передаточная функция звена чистого запаздывания равна

$$W_\tau(s) = e^{-s\tau}$$

- Очевидно, что при гармоническом входном сигнале запаздывание не изменяет амплитуду, но вносит дополнительный отрицательный сдвиг фазы. Частотная характеристика этого звена имеет вид
- По общим с $W_\tau(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ ходим:
- Таким $A(j\omega) = \left| W_\tau(j\omega) \right| = 1, \quad \phi(j\omega) = \arg W_\tau(j\omega) = -\omega\tau$ вена запаздывания – линейная функция частоты ω , чем больше частота, тем больше фазовый сдвиг.

4. Типовые динамические звенья

- ***4.7. «Обратные» звенья***
- Звено с передаточной функцией $\widetilde{W}(s) = \dfrac{1}{W(s)}$
- назовем *«обратным» звеном* для звена с передаточной функцией *W*(*s*) (или *инверсией* для этого звена).
- Предположим, что мы знаем ЛАФЧХ для исходного звена и хотим найти ЛАФЧХ «обратного» звена без вычислений.
- Эта задача имеет простое решение.
- Для исходного звена $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ – соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики. Амплитудная и фазовая характеристики имеют вид

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}\,, \qquad \phi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

4. Типовые динамические звенья

- Для «обратного» звена получим

$$\widetilde{W}(j\omega)=\frac{1}{W(j\omega)}=\frac{1}{P(\omega)+jQ(\omega)}=\frac{P(\omega)-jQ(\omega)}{P^2(\omega)+Q^2(\omega)},$$

- что после простых преобразований дает

$$\widetilde{A}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}}=\frac{1}{A(\omega)},\quad \widetilde{\phi}(\omega)=-\mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=-\phi(\omega)$$

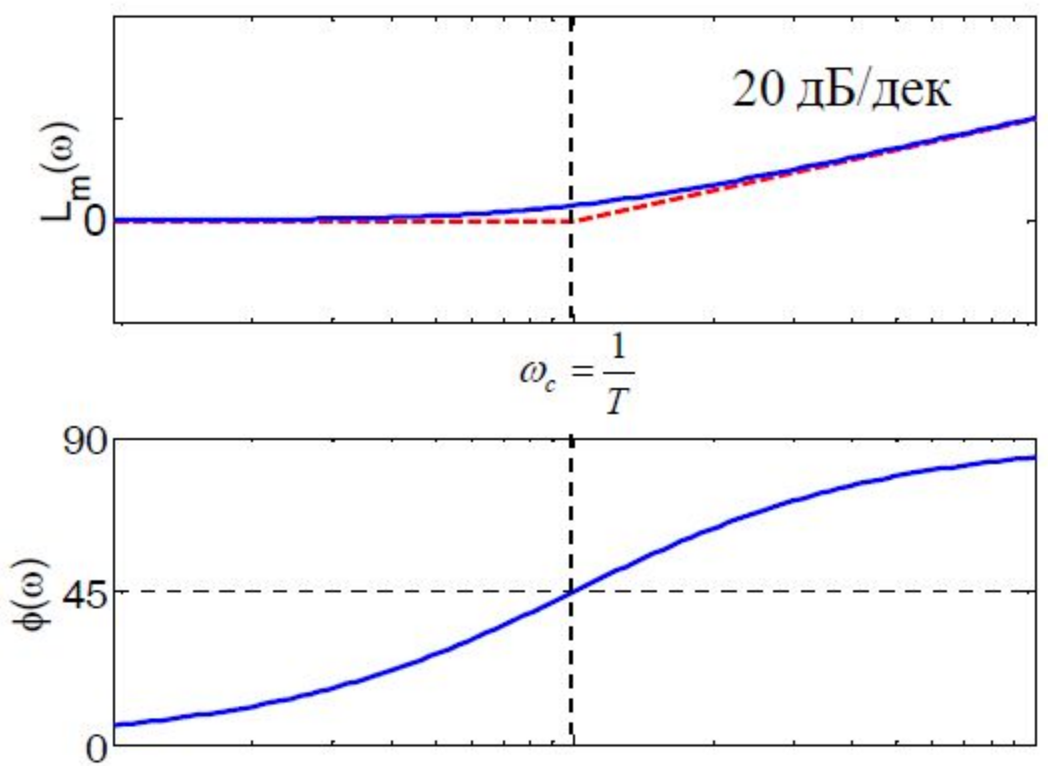
- Таким образом, для логарифмических характеристик получаем

$$20\lg\widetilde{A}(\omega)=20\lg\frac{1}{A(\omega)}=-20\lg A(\omega),\quad \widetilde{\phi}(\omega)=-\phi(\omega).$$

- Это значит, что при переходе к «обратной» передаточной функции ЛАЧХ и ЛФЧХ просто меняют знак.

4. Типовые динамические звенья

- Рассмотрим, например, звено с передаточной функцией $W(s) = Ts + 1$. Оно является «обратным» для апериодического звена, поэтому можно сразу нарисовать его ЛАФЧХ так, как на рисунке.



4. Типовые динамические звенья

- Для звена чистого запаздывания «обратным» будет звено с передаточной функцией $\widetilde{W}_{\tau}(s) = e^{s\tau}$, его амплитудная частотная характеристика равна 1 на всех частотах, а фазовая вычисляется как $\phi(\omega) = \omega\tau$. Положительный сдвиг фазы говорит о том, что сигнал на выходе является *раньше*, чем на входе. Такое звено называется *звеном упреждения* или *предсказания*.
- Понятно, что в реальных системах нельзя «заглянуть в будущее», поэтому звено упреждения физически нереализуемо. Тем не менее, модели некоторых практических задач могут включать звенья упреждения.
- Например, известны «автопилоты» для автомобилей, которые используют данные о рельефе дороги на некотором расстоянии *впереди* машины (будущие значения!), полученные с помощью лазерного измерителя.

4. Типовые динамические звенья

- ***4.8. ЛАФЧХ сложных звеньев***
- Для построения ЛАФЧХ звеньев со сложными передаточными функциями их числитель и знаменатель разбивают на сомножители первого и второго порядков.
- Фактически сложное звено при этом представляется как последовательное соединение простых звеньев, для которых известны все характеристики. При этом асимптотическую ЛАЧХ можно легко построить даже вручную.
- Рассмотрим звено второго порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{k(T_2 s - 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

- Здесь T_i ($i = 1,...3$) – положительные постоянные времени. Для определенности примем $T_1 > T_2 > T_3$.

4. Типовые динамические звенья

- Представим передаточную функцию в виде произведения

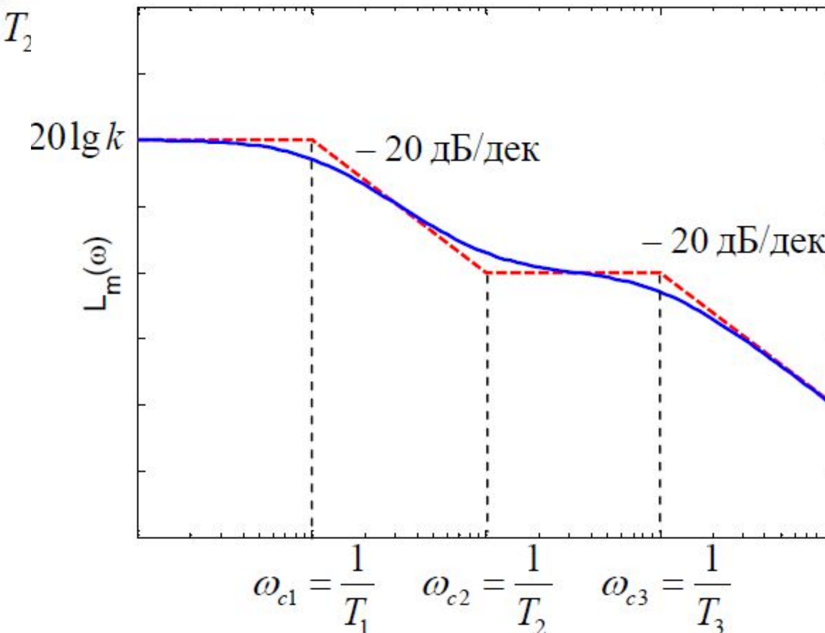
$$W(s) = k \cdot \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot (T_2 s - 1) \cdot \frac{1}{T_3 s + 1}. \qquad (43)$$

- Таким образом, это звено представляет собой последовательное соединение усилителя, двух апериодических звенье $T_2 s - 1$ лителя с дифференцированием (его передаточная функция 1 2 *T*).

- Как следует из свойств ЛАФЧХ (37)–(38), для построения ЛАЧХ системы с передаточной функцией *W*(*s*) (43) достаточно сложить ЛАЧХ всех ее сомножителей.

4. Типовые динамические звенья

- На низких частотах, до первой сопрягающей частоты $\omega_{c1} = \dfrac{1}{T_1}$
- , «работает» только усилитель, и асимптотическая ЛАЧХ идет
- на постоянном уровне 20lg *k* . Начиная с частоты $\omega_{c1} = \dfrac{1}{T_1}$
- первое апериодическое звено дает наклон
- ЛАЧХ − 20 дБ/дек, а с частоты $\omega_{c2} = \dfrac{1}{T_2}$ звено $T_2 s - 1$
- восстанавливает нулевой наклон. На частотах выше $\omega_{c3} = \dfrac{1}{T_3}$
- включается второе (быстродействующее) апериодическое звено, которое определяет наклон − 20 дБ/дек оставшейся высокочастотной части ЛАЧХ.

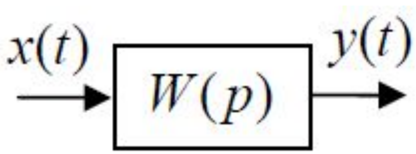


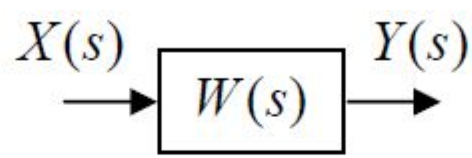
4. Типовые динамические звенья

- Для построения фазовой характеристики желательно использовать компьютерные программы.
- Однако принцип остается тот же, что и для ЛАЧХ: полная фазовая характеристика равна сумме фазовых характеристик отдельных звеньев, входящих в произведение.

5. Структурные схемы

- ***5.1. Условные обозначения***
- Систему управления можно разбить на блоки, имеющие вход и выход (объект, регулятор, привод, измерительная система).
- Для того, чтобы показать взаимосвязи этих блоков, используют структурные схемы. На них каждый элемент изображается в виде прямоугольника, внутри которого записывается его передаточная функция.
- Вход и выход блока показывают соответственно «входящей» и «выходящей» стрелками.



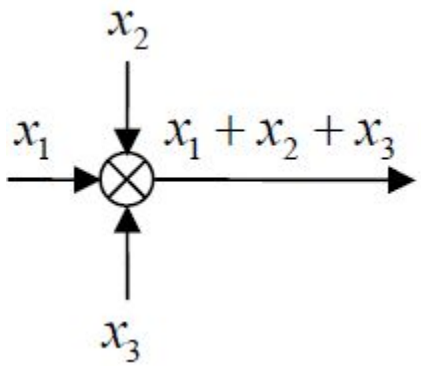


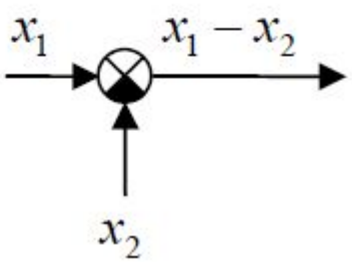
5. Структурные схемы

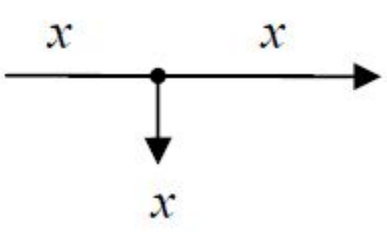
- Строго говоря, есть две формы записи:
- • *операторная запись*, когда передаточная функция записывается как функция оператора дифференцирования *p* , входы и выходы блоков – функции времени;
- • *запись в изображениях*, когда передаточная функция записывается как функция комплексной переменной *s*, а для обозначения входов и выходов используют их изображения по Лапласу.
- Однако суть дела от этого не меняется. Поэтому дальше при обозначении сигналов мы, несколько жертвуя строгостью ради простоты записи, будем обозначать сигналы строчными буквами, не указывая независимую переменную (*t* или *s*), а в записи передаточных функций будем использовать переменную *s*, как принято в литературе.

5. Структурные схемы

- Для суммирующих элементов используют специальное обозначение – круг, разбитый на сектора.
- Если сектор залит черным цветом, поступающий в него сигнал вычитается, а не складывается с другими.
- Разветвление сигнала обозначается точкой, как и в радиотехнике.

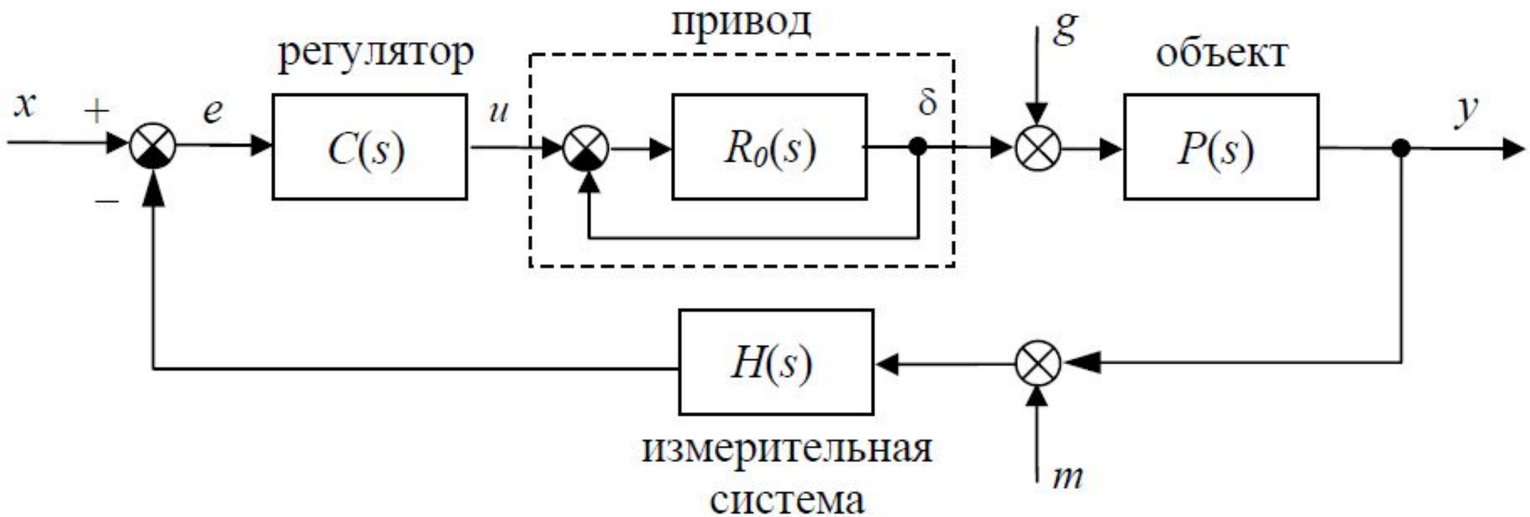






5. Структурные схемы

- На следующем рисунке показана типичная схема системы управления кораблем по курсу. Здесь вход *x* – заданный курс, выход *y* – фактический курс. Сигналы *e* , *u* и δ обозначают соответственно ошибку регулирования, сигнал управления и управляющее воздействие привода на объект (угол поворота руля). Сигнал *g* – это возмущение (влияние ветра и морского волнения), а *m* – шум измерений.

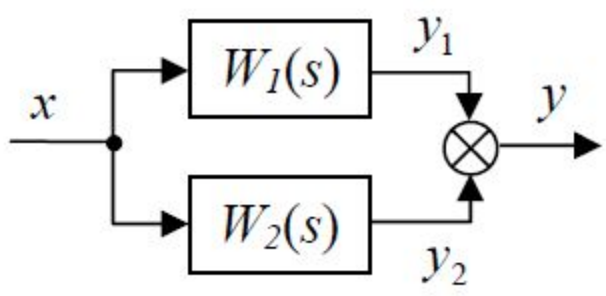


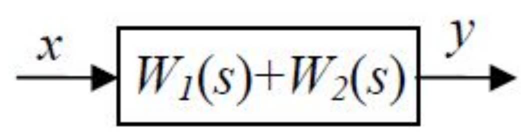
5. Структурные схемы

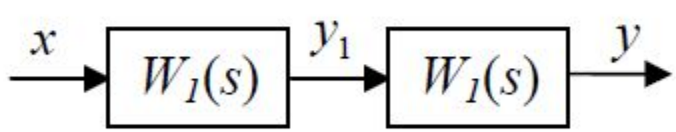
- В системе управления курса кроме «большого» контура управления (регулятор – привод – объект) есть еще внутренний контур привода (звено с передаточной функцией $R_0(s)$ которое охвачено *отрицательной обратной связью*).
- ***5.2. Правила преобразования***
- Многие инженерные (классические) методы исследования систем управления основаны на использовании передаточных функций.
- Для построения передаточной функции системы между заданными входом и выходом нужно преобразовать структурную схему так, чтобы в конечном счете остался один блок с известной передаточной функцией.
- Для этого используют *структурные преобразования.*

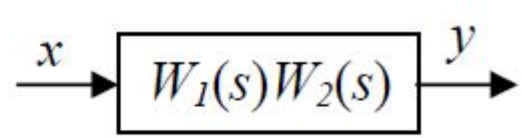
5. Структурные схемы

- Легко показать, что передаточные функции параллельного и последовательного соединений равны соответственно сумме и произведению исходных передаточных функций:









- Действительно, в изображениях по Лапласу для параллельного соединения получаем

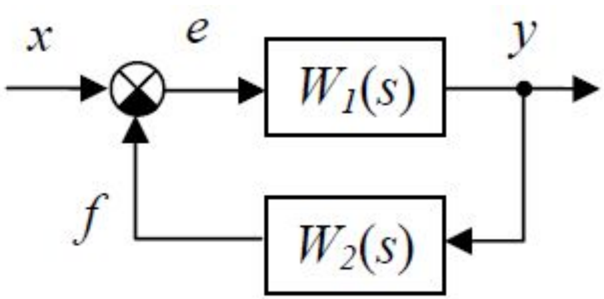
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = W_1(s)X(s) + W_2(s)X(s) = \left[W_1(s) + W_2(s)\right]X(s),$$

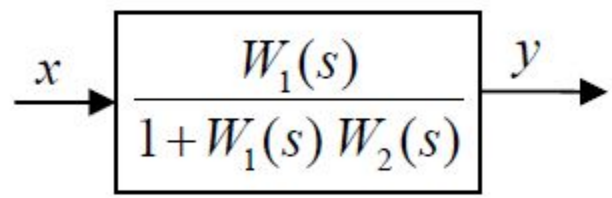
5. Структурные схемы

- а для последовательного

$$Y(s)=W_2(s)Y_1(s)=W_1(s)W_2(s)X(s)$$

- Для контура с отрицательной обратной связью имеем





Для доказательства заметим, что $Y(s)=W_1(s)\,E(s)$, а изображение ошибки равно

$$E(s)=X(s)-F(s)=X(s)-W_2(s)Y(s)\,.$$

Поэтому

$$Y(s)=W_1(s)\big[X(s)-W_2(s)Y(s)\big].$$

5. Структурные схемы

- Перенося *X* (*s*) в левую часть, получаем

$$Y(s)\left[1+W_1(s)\,W_2(s)\right]=W_1(s)\,X(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s)=\frac{W_1(s)}{1+W_1(s)\,W_2(s)}X(s).$$

- Если обратная связь – положительная (сигналы *x* и *f* складываются), в знаменателе будет стоять знак «минус»:

$$W(s)=\frac{W_1(s)}{1-W_1(s)\,W_2(s)}$$

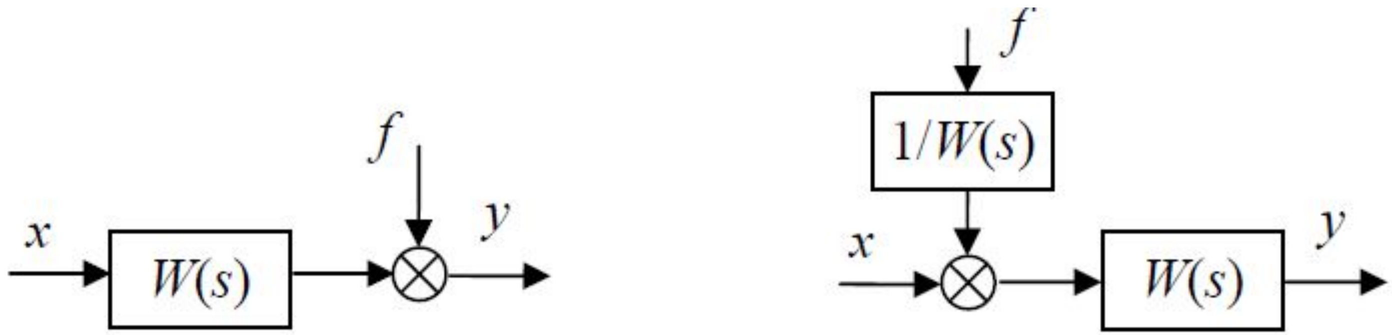
5. Структурные схемы

Звено можно переносить через сумматор как вперед, так и назад. Чтобы при этом передаточные функции не изменились, перед сумматором нужно поставить дополнительное звено:

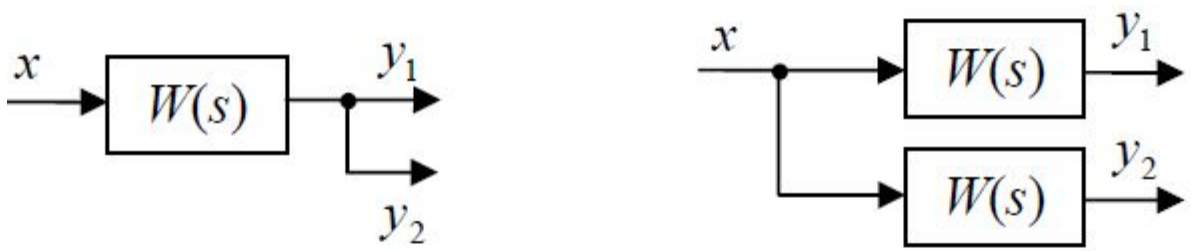
- Обратите внимание, что передаточные функции от обоих входов к выходу на двух схемах одинаковые.

5. Структурные схемы

- Для следующей пары это условие тоже выполняется:

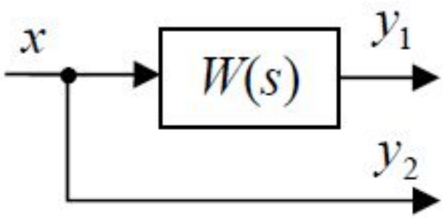


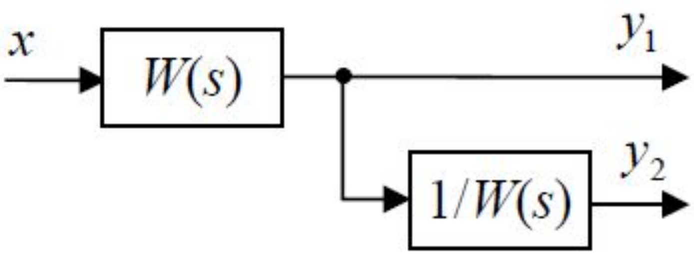
- Звено можно переносить также через точку разветвления, сохраняя все передаточные функции:



5. Структурные схемы

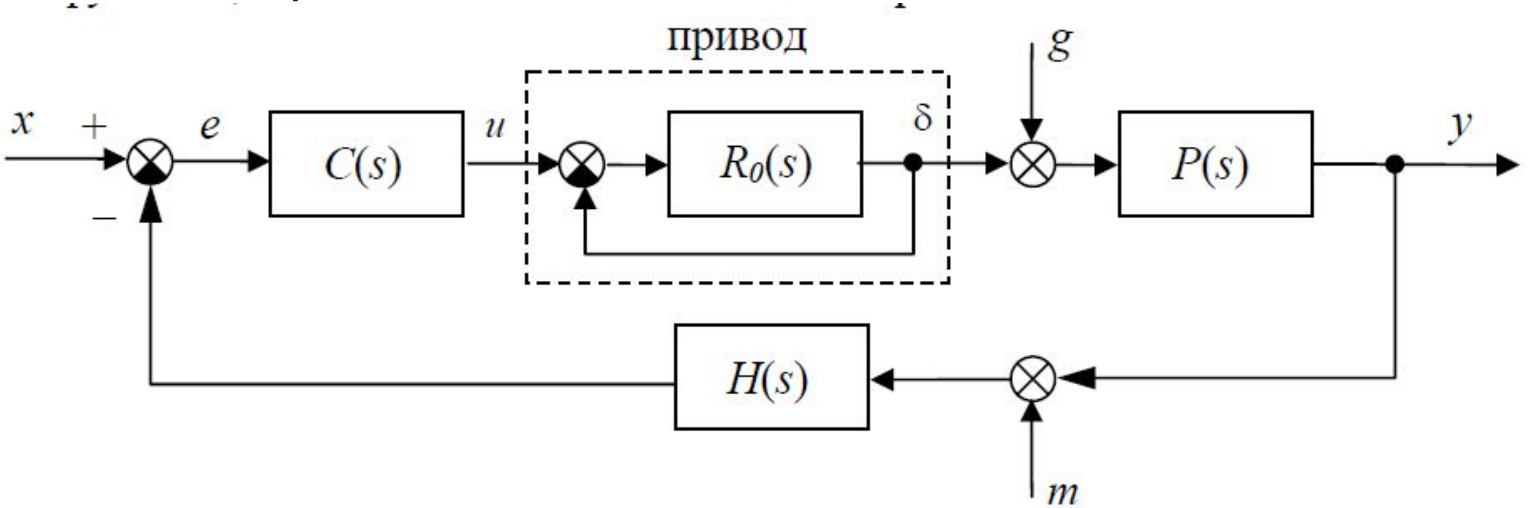
- Эти две схемы тоже равносильны:





5. Структурные схемы

- ***5.3. Типовая одноконтурная система***
- Применим показанные выше приемы для вычисления передаточных функций рассмотренной выше системы. Здесь три входа (*x*, *g* и *m*), а в качестве выходов обычно рассматривают выход системы *y*, сигнал управления *u* и ошибку *e*. Таким образом, всего можно записать 9 передаточных функций, соединяющих все возможные пары вход-выход.

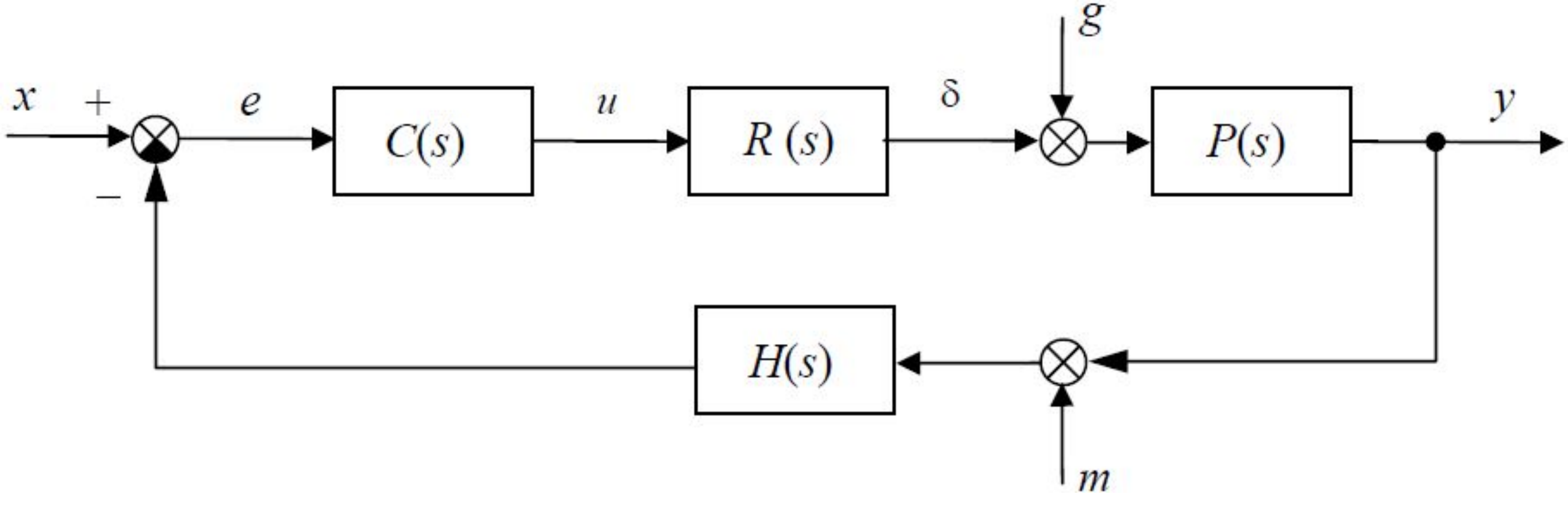


5. Структурные схемы

- Сначала найдем полную передаточную функцию привода (обведенного штриховой рамкой), используя формулу для контура с отрицательной обратной связью:

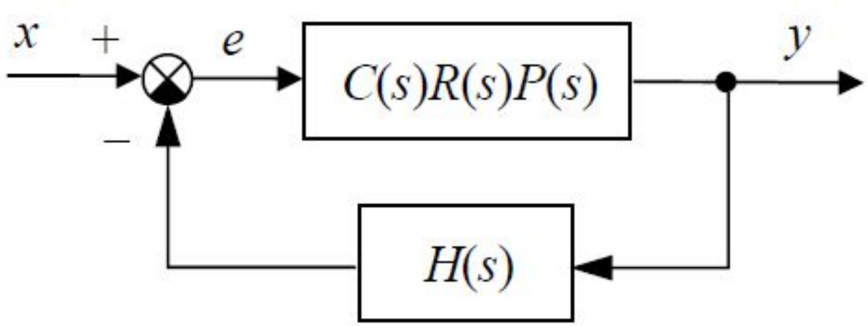
$$R(s) = \frac{R_0(s)}{1 + R_0(s)}$$

- Получаем следующую схему:



5. Структурные схемы

- Теперь найдем передаточные функции от входа *x* ко всем выходам. Для этого все остальные входы будем считать нулевыми и удалим со схемы.
- Кроме того, заменим последовательное соединение звеньев с передаточными функциями $C(s)$, $R(s)$ и $P(s)$ на одно звено:

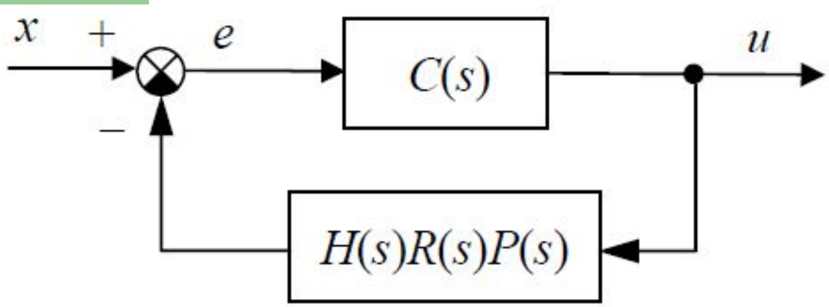


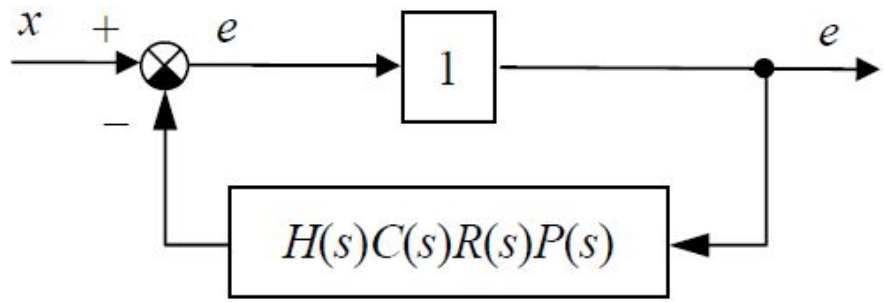
- Для получения окончательного результата снова используем формулу для контура с отрицательной обратной связью:

$$W(s) = \frac{C(s)R(s)P(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}.$$

5. Структурные схемы

- Принимая в качестве выходов управление *u* и ошибку *e*, получим похожие схемы:





- Первая из этих схем дает передаточную функцию по управлению $W_u(s)$, а вторая – передаточную функцию по ошибке $W_e(s)$ (здесь блок с передаточной функцией, равной единице, можно было вообще не рисовать). Снова применяя формулу для контура с отрицательной обратной связью, получаем:

$$W_u(s) = \frac{C(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}, \qquad W_e(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}$$