

Устойчивость решений дискретных систем

В дискретных динамических системах могут существовать частные решения, представляющие собой стационарные, периодические, квазипериодические и хаотические последовательности $(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, которые мы будем обозначать x_n^* .

Рассмотрим первое частное решение дискретной системы – *стационарное*, или решение в виде *неподвижной точки*.

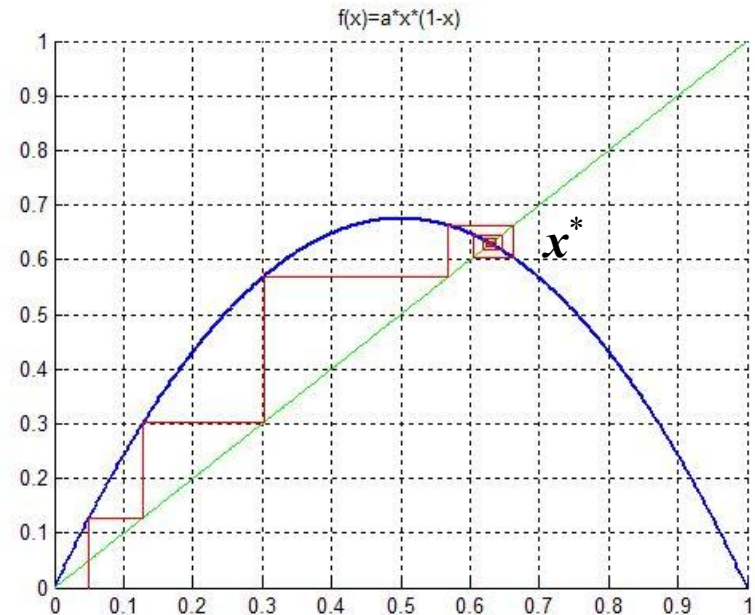
Определение. Точка x^* называется **неподвижной точкой отображения** $x_{n+1} = F(x_n)$ (2), если выполняется следующее условие:

$$x^* = F(x^*). \quad (5)$$

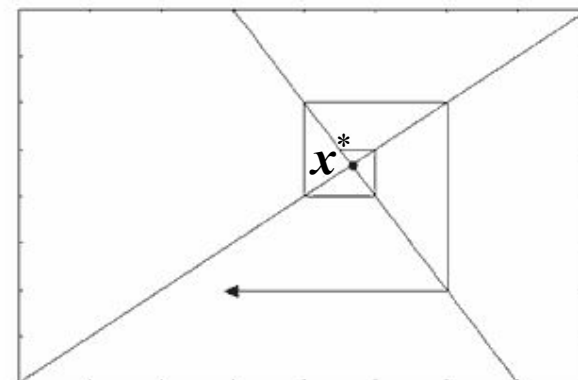
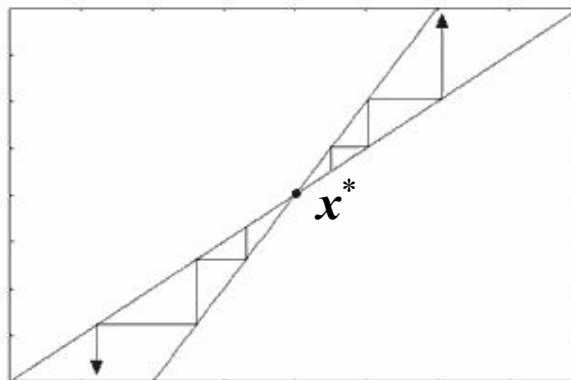
Это условие означает, что при графической итерации отображения движение при попадании в x^* прекращается. Итерации вновь и вновь помещают очередное x_n в x^* .

Решение в виде неподвижной точки еще называется *состоянием покоя* или *состоянием равновесия*.

Неподвижная точка x^* отображения F называется *притягивающей*, если все точки из некоторой ее малой окрестности стремятся к x^* при итерациях отображения (сходящаяся последовательность).



Неподвижная точка x^* отображения F является *отталкивающей*, если все точки из некоторой окрестности покидают эту окрестность (расходящаяся последовательность).



Помимо самого факта существования в дискретных системах решений в виде неподвижных точек (состояний покоя или равновесия системы), важную роль играет информация об их *устойчивости* или *неустойчивости*.



Слегка толкнем шарик и пронаблюдаем за движением. После совершения нескольких затухающих колебаний шарик вновь займет прежнее положение на дне ямки. Положение равновесия **устойчиво**: малые возмущения исходного состояния затухают во времени.



При любом сколь угодно малом отклонении шарика от состояния равновесия он скатится с вершины. Положение равновесия **неустойчиво**: малые возмущения исходного состояния нарастают во времени.

Устойчивость какого-либо состояния (движения) динамической системы определяется просто: введем небольшое отклонение (возмущение) динамической системы от исследуемого состояния и проанализируем, каким будет ее дальнейшее поведение. Если со временем система вернется в исходное состояние (возмущение затухает), то такое состояние называется **устойчивым**. Если начальное отклонение нарастает со временем - состояние **неустойчиво**.

Найдем **условия устойчивости неподвижной точки x^*** . В связи с тем, что проблема устойчивости связана с анализом реакции системы на малое возмущение ее состояния, на первом этапе она может быть исследована в рамках линейного приближения.

Пусть $x = x^* + \xi$, ξ - отклонение от состояния равновесия, малая по сравнению с x^* величина. Тогда отображение (2) примет вид:

$$x^* + \xi_{n+1} = F(x^* + \xi_n). \quad (6)$$

Применяя для правой части (6) разложение в степенной ряд в окрестности неподвижной точки и отбрасывая члены порядка малости выше первого, находим:

$$x^* + \xi_{n+1} = F(x^*) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x^*} \xi_n + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x^*} x \xi_n^2 + \dots \quad (7)$$

С учетом (5), из соотношения (7) получаем

$$\xi_{n+1} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x^*} \xi_n. \quad (8)$$

Производные берутся в точках частного решения, в данном случае в неподвижной точке x^* .

Введем обозначение $a_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{\bar{x}}$. Здесь индексы $i, k = 1, \dots, N$ – размерность отображения (2*).

Тогда выражение (8) можно переписать в координатной форме (или покомпонентно):

$$\xi_{n+1}^i = \sum_{k=1}^N a_{ik} \xi_n^k. \quad (9)$$

Данное линейное точечное отображение есть **линейное дискретное уравнение в вариациях**. В матричной форме (9) можно записать в следующем виде:

$$\xi_{n+1} = A \xi_n. \quad (10)$$

Матрица A с элементами a_{ik} является квадратной и называется **матрицей линеаризации** или **матрицей Якоби**.

Устойчивость неподвижной точки отображения определяется **мультипликаторами** ρ_k , которые являются собственными значениями матрицы A , или корнями характеристического уравнения:

$$\det[A - \rho E] = 0. \quad (11)$$

E – единичная матрица.

Неподвижная точка x^* исходного отображения (2) является **устойчивой**, если все мультипликаторы ρ_k удовлетворяют условию $|\rho_k| < 1$.

Если среди мультипликаторов имеются такие, для которых $|\rho_k| > 1$, то неподвижная точка отображения (2) будет **неустойчивой**.

Устойчивость неподвижных точек одномерного отображения

Одномерное отображение:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (12)$$

Пусть x^* - неподвижная точка отображения. Введем малое возмущение ξ :

$$x_n = x^* + \xi_n.$$

Тогда отображение (12) примет вид:

$$x_{n+1} = x^* + \xi_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \xi_n). \quad (13)$$

Используя выражения (7), (8), приходим к новому одномерному *линейному* отображению, описывающему эволюцию малого возмущения неподвижной точки, которое имеет вид:

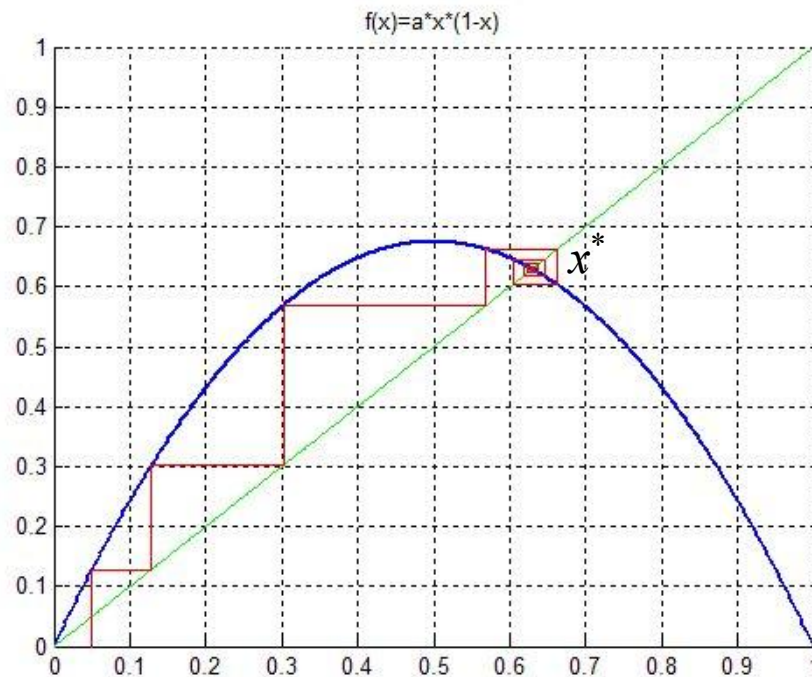
$$\xi_{n+1} = A\xi_n \quad \Rightarrow \quad \xi_{n+1} = f'(x^*)\xi_n. \quad (14)$$

Из сопоставления выражений (10), (11) и (14) следует, что собственное значение матрицы линеаризации A или мультипликатор неподвижной точки одномерного отображения (12) есть

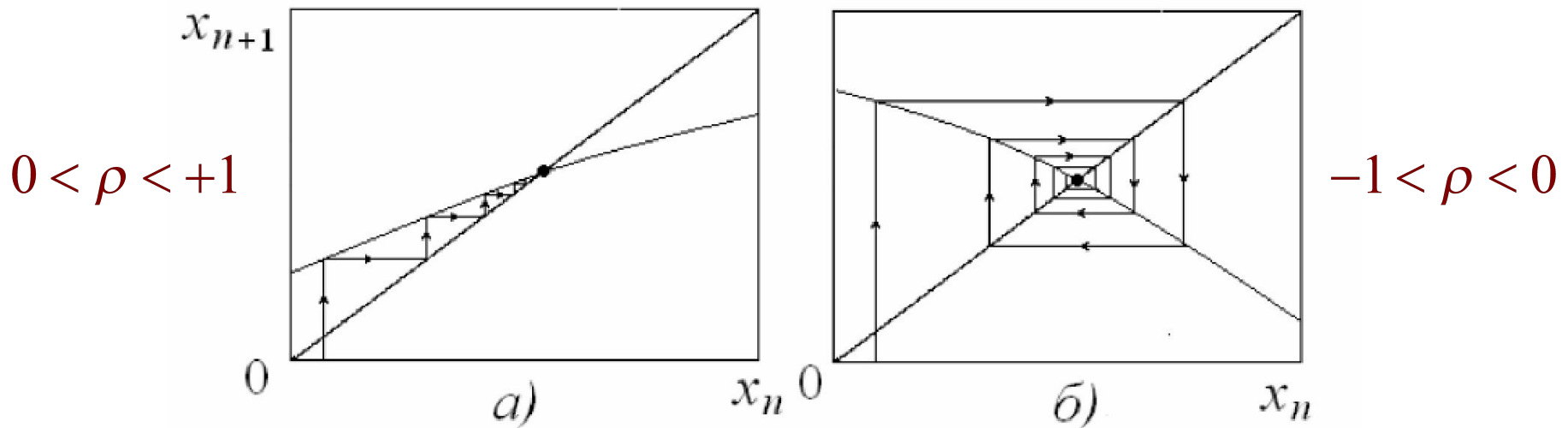
$$\det[A - \rho E] = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x^*) - \rho = 0 \quad \} \quad \rho = f'(x^*).$$

Следовательно, условие устойчивости неподвижной точки x^* сводится к выполнению неравенства $|\rho| = |f'(x^*)| < 1$, или $-1 < \rho < +1$. Если $|f'(x^*)| > 1$, неподвижная точка неустойчива.

Геометрически неподвижная точка x^* одномерного отображения (12) есть точка пересечения графика функции $x_{n+1} = f(x_n)$ с биссектрисой $x_{n+1} = x_n$.



По характеру приближения траектории к неподвижной точке на итерационной диаграмме можно дополнительно выделить два типа неподвижных точек. Первый тип отвечает положительным значениям мультипликатора. В этом случае изображающая точка (дискретная траектория) приближается к неподвижной точке таким образом, что все время находится от нее с одной и той же стороны (рис. (а)). Если же мультипликатор отрицателен, то изображающая точка приближается к неподвижной точке, перемещаясь по итерационной диаграмме так, что попеременно оказывается то справа, то слева от нее (рис. (б)). Используя терминологию систем с непрерывным временем, можно назвать первую точку точкой типа «**узел**», а вторую – точкой типа «**фокус**».



1) $f'(x^*) > 1$: отклонение ξ_n растет по модулю, не меняя своего знака, неподвижная точка x^* неустойчива;

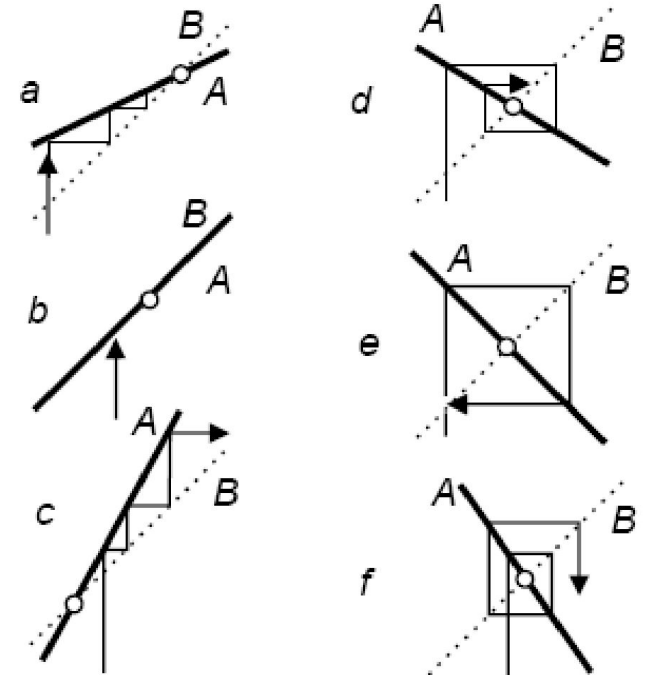
2) $0 < f'(x^*) < 1$: отклонение ξ_n монотонно убывает, неподвижная точка x^* устойчива;

3) $f'(x^*) < -1$: отклонение ξ_n нарастает по модулю, меняя свой знак при каждой итерации, неподвижная точка x^* неустойчива;

4) $-1 < f'(x^*) < 0$: отклонение ξ_n убывает по модулю, меняя свой знак при каждой итерации, неподвижная точка x^* устойчива;

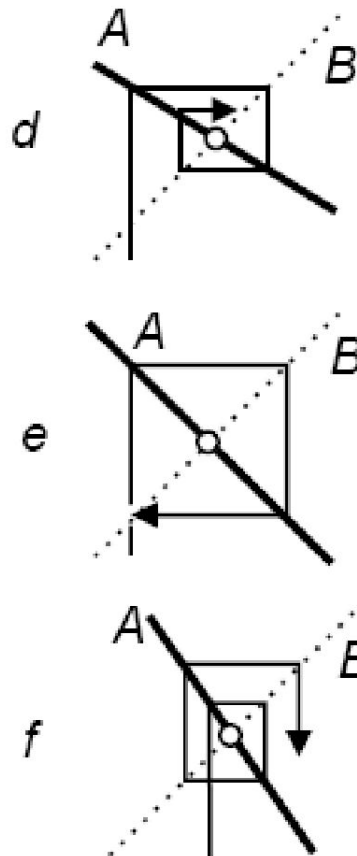
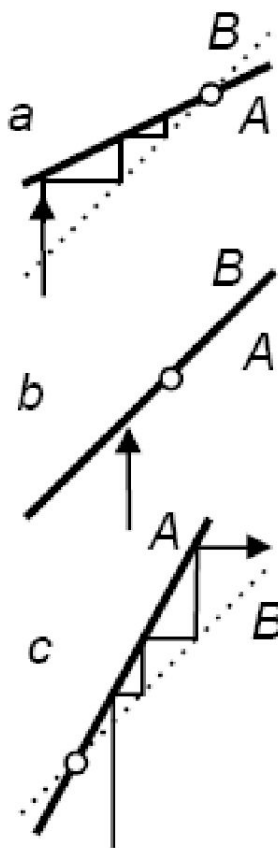
5) $f'(x^*) = 1$: отклонение ξ_n не меняется, исходное состояние x^* **нейтрально** по отношению к возмущению ξ ;

6) $f'(x^*) = -1$: ξ_n меняет знак на каждом шаге итерирования, не нарастая и не убывая по модулю, x^* нейтрально.



Типы неподвижных точек в одномерном отображении

Устойчивый обратный узел



$$0 < f'(x^*) < 1$$

$$-1 < f'(x^*) < 0$$

Устойчивый узел (фокус)

$$f'(x^*) = \pm 1$$

Состояние нейтрально.

Переходные значения параметра называются *критическими*. Им соответствуют **точки бифуркации**.

$$f'(x^*) > 1$$

$$f'(x^*) < -1$$

Неустойчивый узел (фокус)

Неустойчивый обратный узел

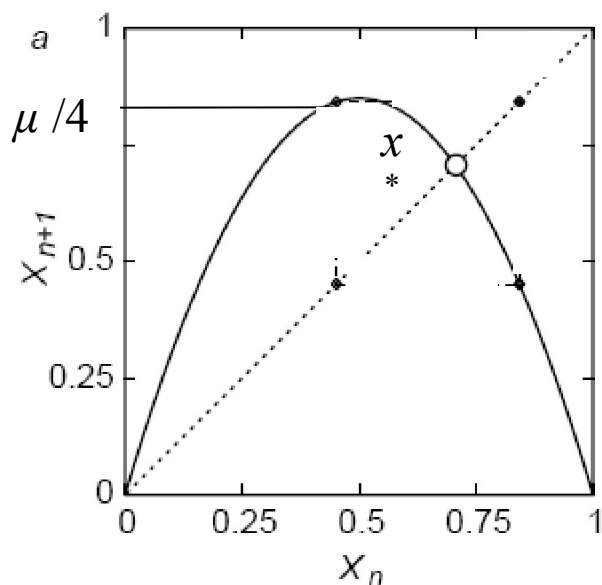
Если возмущение меняет знак при каждой итерации, то к названию неподвижных точек добавляют слово «обратный».

Пример. Рассмотрим **логистическое отображение**. Это одномерное квадратичное отображение, определяемое следующим образом:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n),$$

где μ – управляющий параметр, а x_n принадлежит интервалу $[0, 1]$. Данное отображение было введено еще в 1845 г. П. Ферхюльстом для описания динамики популяций в замкнутой среде. Относительная численность особей x_{n+1} в $(n + 1)$ -й год пропорциональна численности особей в предыдущий год (x_n принимает значения от 0 до 1 и отражает численность популяции в n -м году), а также свободной части жизненного пространства, которая пропорциональна $(1 - x_n)$, т.е.

Положительный параметр μ характеризует скорость роста популяции.



Другой пример дает задача о банковских сбережениях при стабилизирующемся росте процента. Как было установлено, в частности, М. Фейгенбаумом, при варьировании параметра μ данное отображение демонстрирует довольно сложное поведение, которое становится хаотическим при больших μ .

По мере увеличения параметра μ крутизна параболы плавно растет и вместе с этим будет меняться и устойчивый режим отображения.

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

Найдем неподвижные точки логистического отображения и исследуем их устойчивость.

Согласно определению (5) неподвижная точка отображения определяется следующим условием:

$$x^* = \mu x^* (1 - x^*).$$

Получаем две неподвижные точки:

$$x^* = 0, \quad x^* = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Значение мультипликатора неподвижных точек находим из решения характеристического уравнения (11) (для одномерного случая $f'(x^*) - \rho = 0$):

$$\mu - 2\mu x^* - \rho = 0.$$

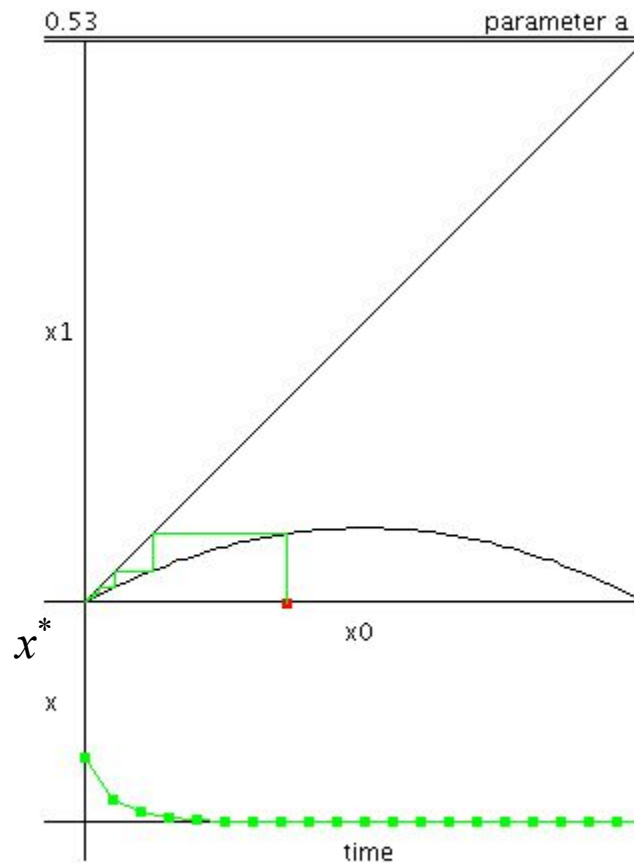
Получаем

$$\rho = \mu(1 - 2x^*).$$

1) Неподвижная точка $x^* = 0$.

Ее мультипликатор $\rho = \mu$
($\mu > 0$ всегда!).

Данная точка является устойчивой
при $\mu < +1$ и становится
неустойчивой при $\mu > +1$.

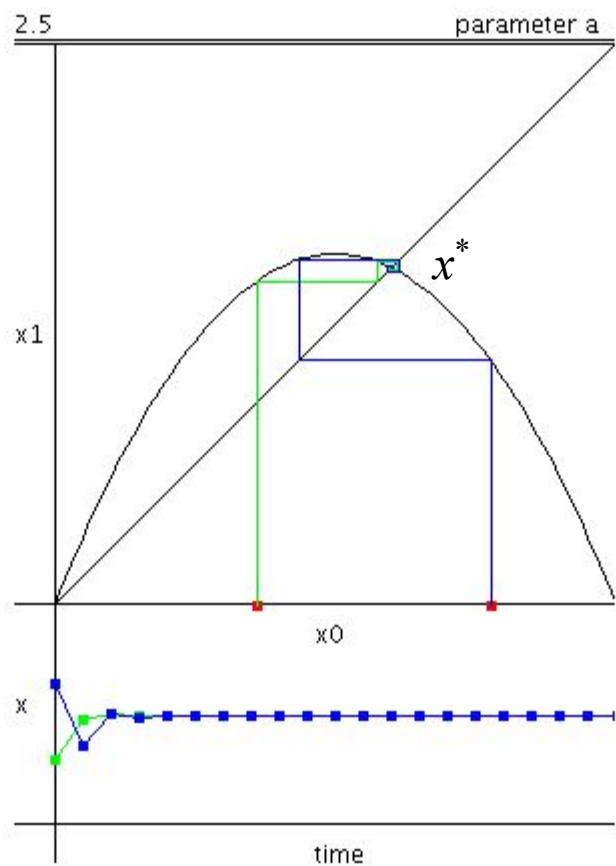


2) Неподвижная точка $x^* = 1 - 1/\mu$.

Ее мультипликатор $\rho = 2 - \mu$.

Условие устойчивости для данной неподвижной точки: $|\rho| = |2 - \mu| < 1$.

Следовательно, точка устойчива при $1 < \mu < 3$ и теряет свою устойчивость при $\mu > 3$.



Циклы отображения и их устойчивость

Рассмотрим 2-й тип частного решения дискретной системы – *периодическое* решение.

Определение. Последовательность точек \mathbf{x}_1^* , \mathbf{x}_2^* , ..., \mathbf{x}_m^* называется *циклом периода t* или *t -циклом* дискретного отображения (2), если они удовлетворяют условиям

$$\mathbf{x}_{n+m}^* = F(\mathbf{x}_n^*): \quad \mathbf{x}_2^* = F(\mathbf{x}_1^*), \quad \mathbf{x}_3^* = F(\mathbf{x}_2^*), \quad \dots, \quad \mathbf{x}_1^* = F(\mathbf{x}_m^*), \quad (15)$$

причем никакие два элемента в наборе \mathbf{x}_1^* , \mathbf{x}_2^* , ..., \mathbf{x}_m^* не совпадают.

Точки цикла \mathbf{x}_1^* , \mathbf{x}_2^* , ..., \mathbf{x}_m^* называют также *t -кратными неподвижными точками* и для них можно записать:

$$\mathbf{x}_1^* = F(\mathbf{x}_m^*) = F(F(F \dots F(\mathbf{x}_1^*) \dots)) = F^{(m)}(\mathbf{x}_1^*).$$

Отсюда следует, что элемент t -цикла является неподвижной точкой t -раз примененного отображения. Следовательно, *неподвижная точка* отображения является *циклом периода 1* (когда $t = 1$).

Устойчивость m -цикла дискретного отображения можно определить, применив рассмотренный выше способ анализа устойчивости неподвижной точки.

Матрица линеаризации A_m является m -периодичной и для нее справедливо следующее равенство:

$$A_m = A(m) \cdot A(m-1) \dots A(2) \cdot A(1). \quad (16)$$

Мультипликаторы ρ_{km} m -кратной неподвижной точки отображения или m -цикла определяются как собственные значения характеристического уравнения:

$$\mathbf{det}[A_m - \rho_m E] = 0. \quad (17)$$

Условие устойчивости m -цикла:

$$|\rho_{km}| < 1. \quad (18)$$

k – размерность системы, $k = 1, 2, \dots, N$;

m – период цикла (кратность точки), $m = 1, 2, \dots, n$.

В качестве примера рассмотрим цикл периода 2 (2-цикла) одномерного отображения, для которого выполняется следующее условие:

$$x_2^* = f(x_1^*), \quad x_1^* = f(x_2^*) = f(f(x_1^*)). \quad (19)$$

Элемент 2-цикла есть неподвижная точка двукратно проитерированного отображения. Для исследования ее устойчивости необходимо использовать правило дифференцирования сложной функции. Мультипликатор или собственное значение определяется следующим образом:

$$\rho = \left[f(f(x_1^*)) \right]' = f'(f(x_1^*))f'(x_1^*) = f'(x_2^*)f'(x_1^*). \quad (20)$$

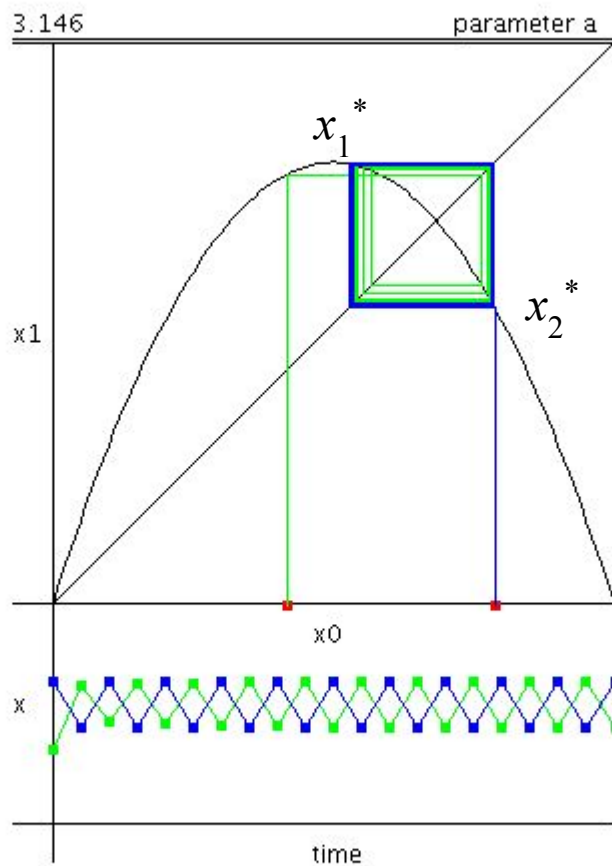
Если обобщить выражение (20) на случай m -цикла одномерного отображения, то получим, что мультипликатор m -цикла представляет собой произведение производных отображения, которые необходимо вычислять в точках цикла:

$$\rho_m = \prod_{i=1}^m f'(x_i^*) = f'(x_1^*)f'(x_2^*) \dots f'(x_m^*). \quad (21)$$

Таким образом, условие устойчивости цикла периода m одномерного отображения определяется неравенством:

$$\left| \prod_{i=1}^m f'(x_i^*) \right| < 1. \quad (22)$$

Цикл периода 2 или 2-цикл логистического отображения



Сверхустойчивый цикл

Из соотношения (22) видно, что устойчивость цикла в целом определяется совокупными свойствами всех его точек. При итерации на одних из них начальное отклонение может локально нарастать, тогда как на других – уменьшаться. Однако имеется особый случай, когда свойства одной точки определяют устойчивость цикла в целом, а именно, если для одной из точек x_i^* цикла выполняется условие

$$f'(x_i^*) = 0,$$

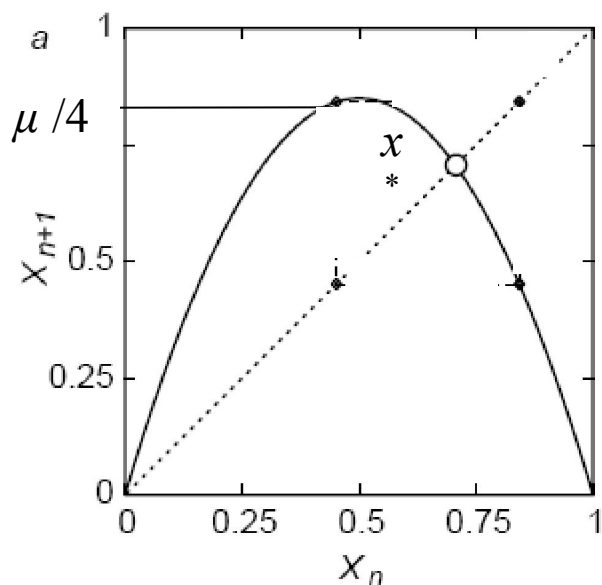
то, очевидно, автоматически равно нулю и произведение производных по всем точкам. Это означает, что малое начальное отклонение от такого цикла *полностью* затухнет не более чем за t итераций, что и определяет название такого цикла. Поскольку с точки зрения геометрии функции последования $f(x_n)$ данное условие означает наличие экстремума (минимум, максимум, либо точка перегиба), то можно сказать, что *сверхустойчивый цикл содержит хотя бы одну критическую точку функции последования.*

Пример. Рассмотрим **логистическое отображение**. Это одномерное квадратичное отображение, определяемое следующим образом:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n),$$

где μ – управляющий параметр, а x_n принадлежит интервалу $[0, 1]$. Данное отображение было введено еще в 1845 г. П. Ферхюльстом для описания динамики популяций в замкнутой среде. Относительная численность особей x_{n+1} в $(n + 1)$ -й год пропорциональна численности особей в предыдущий год (x_n принимает значения от 0 до 1 и отражает численность популяции в n -м году), а также свободной части жизненного пространства, которая пропорциональна $(1 - x_n)$, т.е.

Положительный параметр μ характеризует скорость роста популяции.



Другой пример дает задача о банковских сбережениях при стабилизирующемся росте процента. Как было установлено, в частности, М. Фейгенбаумом, при варьировании параметра μ данное отображение демонстрирует довольно сложное поведение, которое становится хаотическим при больших μ .

По мере увеличения параметра μ крутизна параболы плавно растет и вместе с этим будет меняться и устойчивый режим отображения.

Найдем неподвижные точки логистического отображения и исследуем их устойчивость.

Неподвижная точка периода 1 определяется условием

$$\mu x^* (1 - x^*) = x^* .$$

Получаем две неподвижные точки:

$$x^* = 0, \quad x^* = 1 - \frac{1}{\mu} .$$

Значение мультипликатора неподвижных точек находим из решения характеристического уравнения (для одномерного случая $f'(x^*) - \rho = 0$):

$$\mu - 2\mu x^* - \rho = 0 .$$

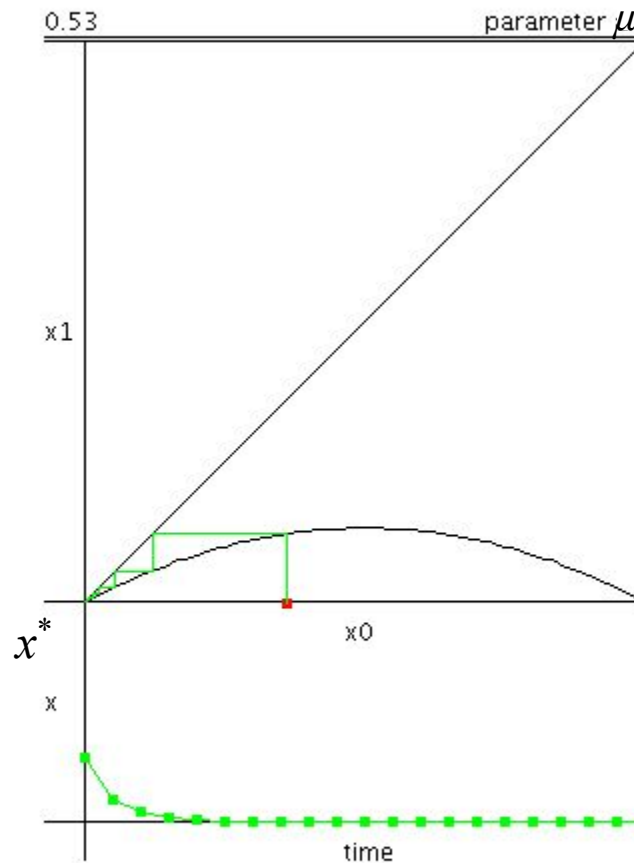
Получаем

$$\rho = \mu(1 - 2x^*) .$$

1) Неподвижная точка $x^* = 0$.

Ее мультипликатор $\rho = \mu$.

Данная точка является устойчивой при $\mu < 1$ и становится неустойчивой при $1 < \mu < 3$.

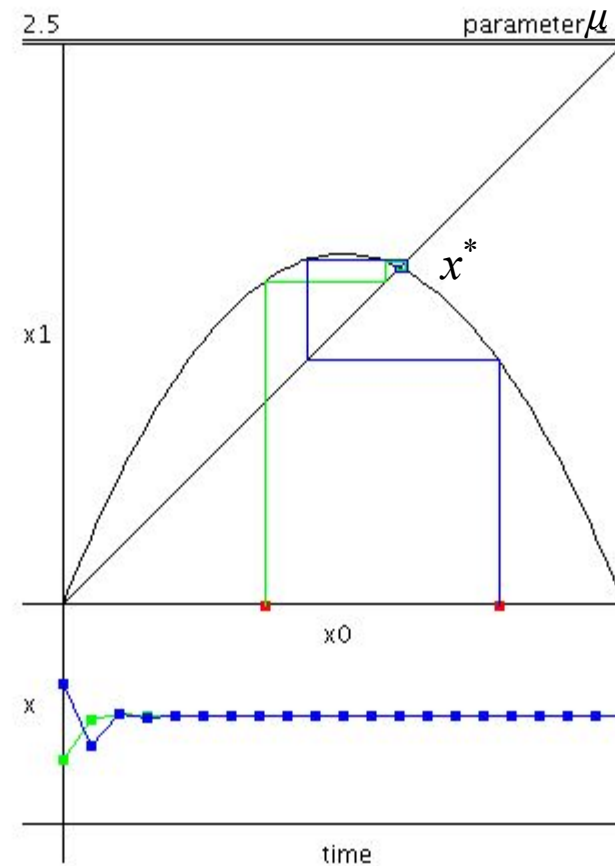


2) Неподвижная точка $x^* = 1 - 1/\mu$.

Ее мультипликатор $\rho = 2 - \mu$.

Условие устойчивости для данной неподвижной точки: $|\rho| = |2 - \mu| < 1$.

Следовательно, точка устойчива при $1 < \mu < 3$ и теряет свою устойчивость при $\mu > 3$.



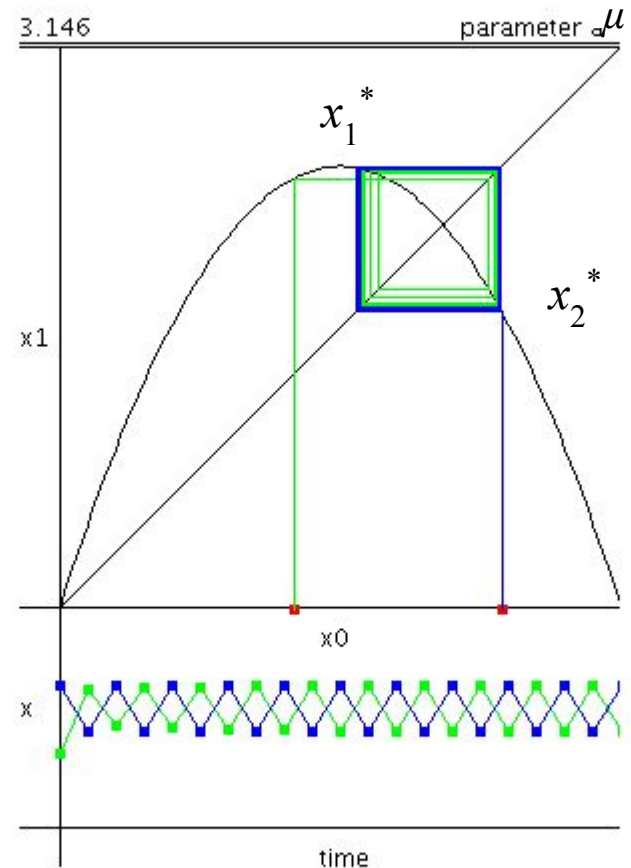
3) При $\mu = 3$ точка x^* становится неустойчивой и в системе рождаются две устойчивые точки x_1^* и x_2^* . Для исходного логистического отображения они образуют цикл периода 2. Эти точки удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_2^* = \mu x_1^* (1 - x_1^*),$$

$$x_1^* = \mu x_2^* (1 - x_2^*),$$

что дает

$$x_{1,2}^* = (1 + \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}) / 2\mu.$$



Условие устойчивости цикла периода 2 определяется с помощью неравенства (22):

$$\left| \prod_{i=1}^m f'(x_i^*) \right| = |f'(x_1^*)f'(x_2^*) \dots f'(x_m^*)| < 1.$$

Вычислим сначала производные функции последования в точках x_1^* и x_2^*

$$f'(x_2^*) = \mu(1 - 2x_2^*),$$

$$f'(x_1^*) = \mu(1 - 2x_1^*).$$

Согласно (22) условие устойчивости для цикла периода 2 есть

$$\left| f'(x_1^*)f'(x_2^*) \right| = \left| \mu^2 (1 - 2x_1^*)(1 - 2x_2^*) \right| < 1.$$

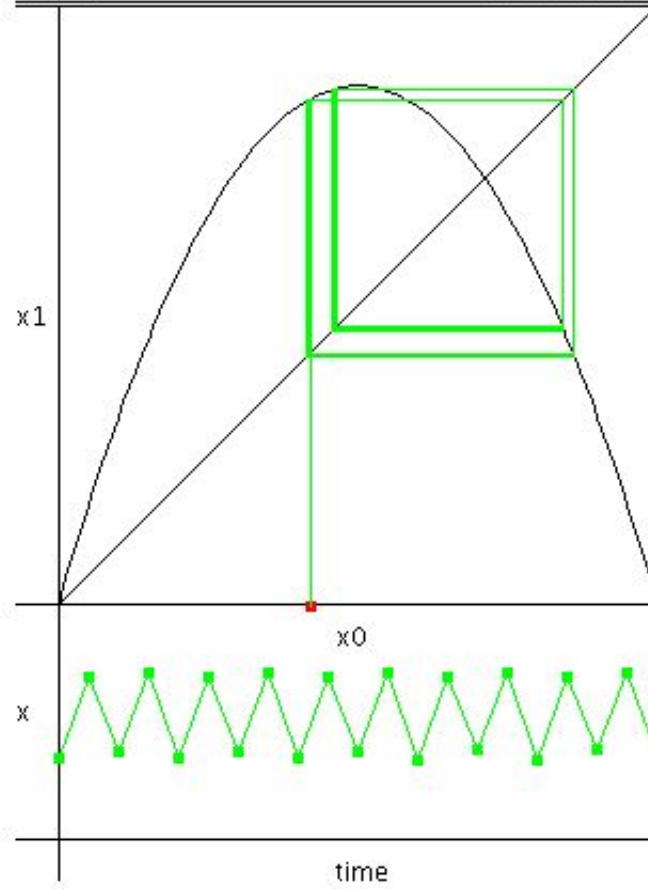
Подставляя в данное неравенство значения неподвижных точек, получим:

$$3.0 < \mu < 1 + \sqrt{6} = 3.44949\dots$$

Таким образом, цикл периода 2 логистического отображения будет устойчив в данном диапазоне значений параметра μ . При $\mu = 3.44949\dots$ 2-цикл потеряет свою устойчивость и в системе родится цикл периода 4.

3.461

parameter a



Устойчивость неподвижных точек двумерного отображения

Рассмотрим теперь устойчивость неподвижной точки двумерного отображения:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{23}$$

Неподвижная точка (x^*, y^*) задается условием

$$\begin{aligned}x^* &= f(x^*, y^*), \\ y^* &= g(x^*, y^*).\end{aligned}\tag{24}$$

Следуя логике предыдущего раздела, введем малые отклонения ξ и η :

$$\begin{aligned}x_n &= x^* + \xi_n, \\ y_n &= y^* + \eta_n.\end{aligned}\tag{25}$$

Тогда

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x^* + \xi_{n+1} = f(x^* + \xi_n, y^* + \eta_n), \\ y_{n+1} &= y^* + \eta_{n+1} = g(x^* + \xi_n, y^* + \eta_n).\end{aligned}\tag{26}$$

Раскладывая правые части (26) в ряд Тейлора и учитывая (24), получим

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= f_x \xi_n + f_y \eta_n + \frac{1}{2}(f_{xx} \xi_n^2 + 2f_{xy} \xi_n \eta_n + f_{yy} \eta_n^2) + \dots, \\ \eta_{n+1} &= g_x \xi_n + g_y \eta_n + \frac{1}{2}(g_{xx} \xi_n^2 + 2g_{xy} \xi_n \eta_n + g_{yy} \eta_n^2) + \dots,\end{aligned}\quad (27)$$

где нижние индексы у f и g означают производные по соответствующей координате, взятые в неподвижной точке (x^*, y^*) .

Для достаточно малых ξ и η можно ограничиться линейной частью (27). Тогда, обозначая $a = f_x$, $b = f_y$, $c = g_x$, $d = g_y$, получим уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= a\xi_n + b\eta_n, \\ \eta_{n+1} &= c\xi_n + d\eta_n,\end{aligned}\quad (28)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix}.\quad (29)$$

Чтобы найти мультипликаторы неподвижных точек отображения или собственные значения матрицы линеаризации, необходимо найти корни характеристического уравнения (11) в двумерном случае:

$$\det[A - \rho E] = 0 \quad \} \quad \det \begin{Bmatrix} a - \rho & b \\ c & d - \rho \end{Bmatrix} = 0. \quad (30)$$

Характеристическое уравнение (30) можно переписать в виде

$$\rho^2 - (a + d)\rho + (ad - bc) = 0. \quad (31)$$

Корни характеристического уравнения (31)

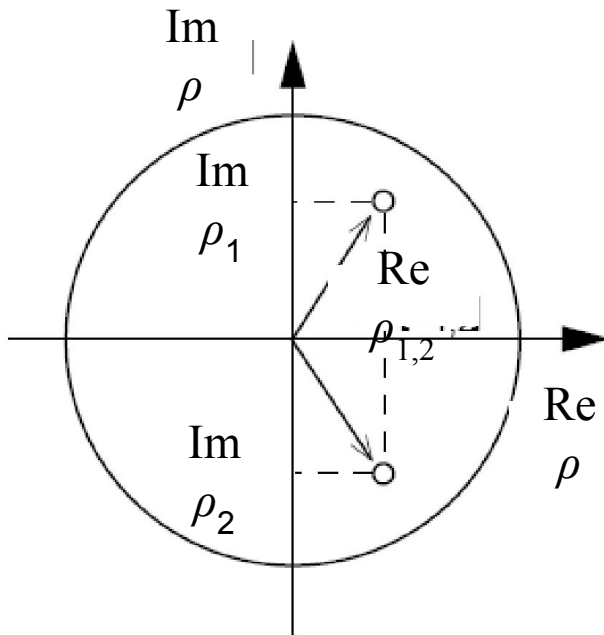
$$\rho_{1,2} = \frac{(a + d)}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2}{4} - (ad - bc)} \quad (32)$$

определяют решение системы (28), следовательно, и поведение фазовых траекторий в окрестности неподвижной точки отображения (23).

Типы неподвижных точек в двумерном отображении

Как видно из выражения (32), собственные значения $\rho_{1,2}$ могут быть действительными числами или комплексно сопряженными.

Как было показано в случае одномерного отображения, характер устойчивости неподвижной точки меняется при $|\rho_{1,2}| = 1$. Поэтому удобно характеризовать неподвижную точку, изображая расположение собственных чисел ρ_1 и ρ_2 на комплексной плоскости относительно единичной окружности.



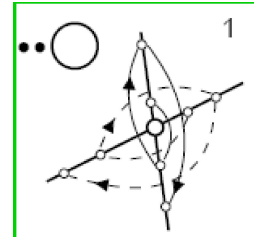
На рисунке показана пара комплексно сопряженных значений $|\rho_{1,2}| < 1$, имеющих равные действительные части, а их мнимые части различаются только знаком.

Положение точек внутри окружности означает, что

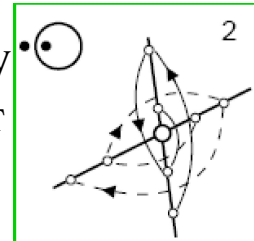
$$\sqrt{\text{Re}^2 \rho_{1,2} + \text{Im}^2 \rho_{1,2}} < 1.$$

Случай действительных ρ_1 и ρ_2 .

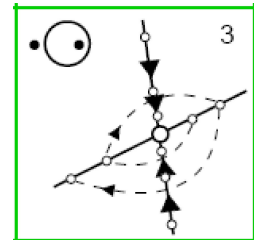
1. $\rho_1 < -1$ и $\rho_2 < -1$ – **неустойчивый обратный узел**. Траектория расходится от неподвижной точки по обоим собственным векторам, причем отклонение каждый раз меняет свой знак.



2. $-1 < \rho_1 < 0$ и $\rho_2 < -1$ – **обратное седло**. Траектория сходится по одному из собственных векторов, но расходится по другому. Отклонение меняет знак при каждой итерации.

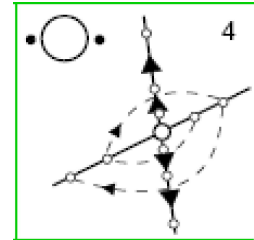


3. $0 < \rho_1 < +1$ и $\rho_2 < -1$ – **неориентируемое седло 1**. По одному из направлений траектория расходится, причем отклонение меняет знак на каждой итерации. По другому направлению отклонение монотонно убывает.

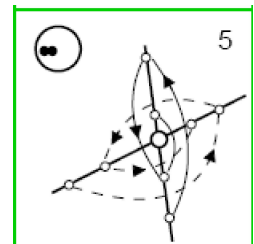


4. $\rho_1 > +1$ и $\rho_2 < -1$ – **неустойчивый неориентируемый узел**.

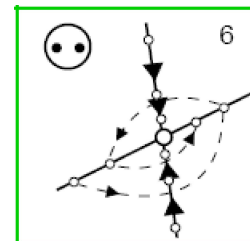
Траектория расходится от неподвижной точки по обоим направлениям, причем по одному из них отклонение меняет знак на каждой итерации.



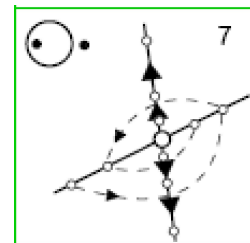
5. $-1 < \rho_1 < 0$ и $-1 < \rho_2 < 0$ – **устойчивый обратный узел**. Меняя знак отклонения на каждой итерации, возмущенная траектория сходится к неподвижной точке по любому направлению.



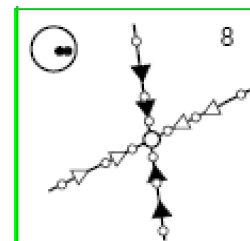
6. $0 < \rho_1 < +1$ и $-1 < \rho_2 < 0$ – **устойчивый неориентируемый узел**. То же, что и 5-й случай, но по одному из собственных направлений отклонение монотонно убывает, не изменяя своего знака.



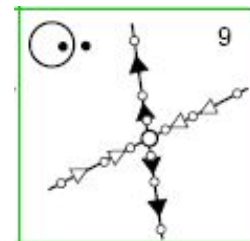
7. $\rho_1 > +1$ и $-1 < \rho_2 < 0$ – **неориентируемое седло 2**. То же, что и 3-й случай, но отклонение меняет знак на каждой итерации для устойчивого направления.



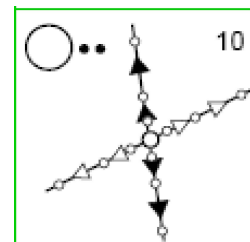
8. $0 < \rho_1 < +1$ и $0 < \rho_2 < +1$ – **устойчивый узел**. Траектория монотонно сходится к неподвижной точке по любому направлению.



9. $\rho_1 > +1$ и $0 < \rho_2 < +1$ – **седло**. Траектория монотонно сходится к неподвижной точке по одному направлению, но разбегается по другому.



10. $\rho_1 > +1$ и $\rho_2 > +1$ – **неустойчивый узел**. Траектория монотонно удаляется от неподвижной точки по любому направлению. Отклонение не меняет знака.



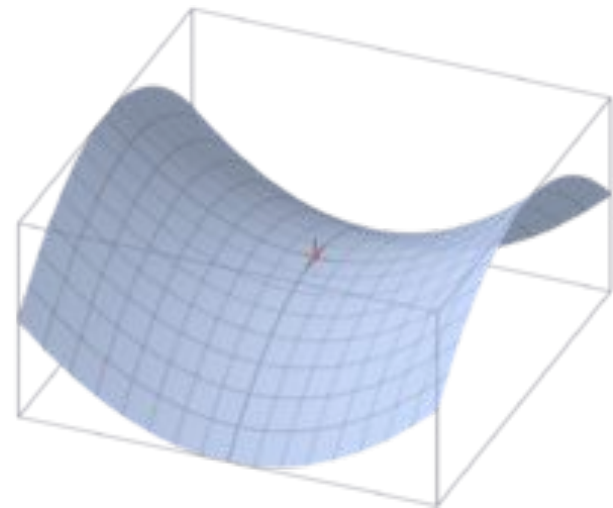
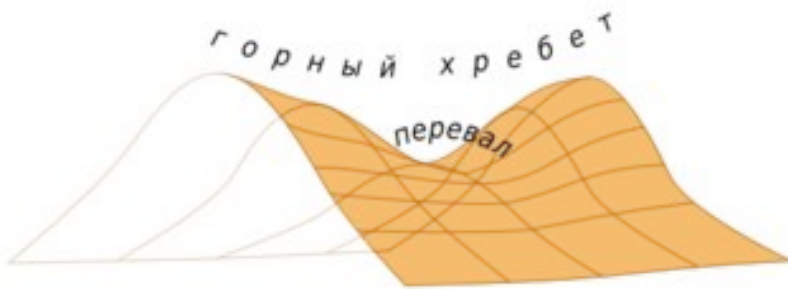
Таким образом, при действительных ρ_1 и ρ_2 мы имеем 2 типа неподвижных точек:

- 1) **узел**, когда оба собственных значения по модулю либо больше (*неустойчивый узел*), либо меньше единицы (*устойчивый узел*),
- 2) **седло**, когда одно из собственных значений по модулю больше единицы, а другое – меньше.

В зависимости от знаков ρ_1 и ρ_2 к названию неподвижной точки может добавляться характеристика типа сходимости: «обратный», если оба мультипликатора отрицательны, либо «неориентируемый», если ρ_1 и ρ_2 имеют разные знаки.

Почему неподвижная точка называется седлом или седловой?

Седло или седловая неподвижная точка всегда неустойчива. Но в отличие от неустойчивого узла, у седла одно из собственных значений по модулю больше единицы, а другое – меньше. Это означает, что по одному направлению (с мультипликатором, по модулю меньше единицы) траектории притягиваются к седлу, а по второму (с мультипликатором, по модулю больше единицы) – отталкиваются.

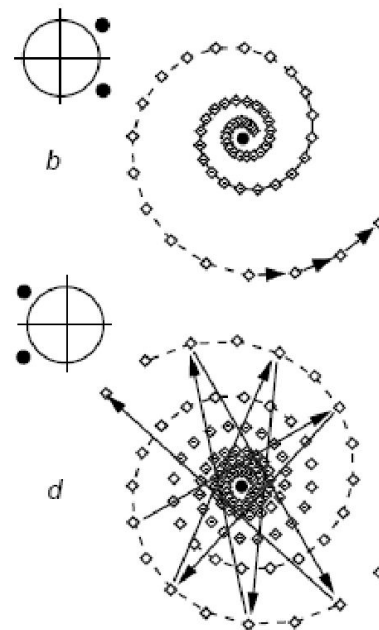
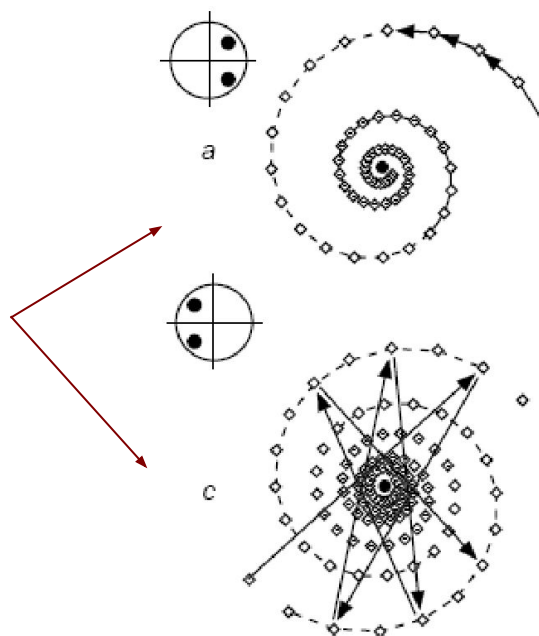


Случай комплексно сопряженных ρ_1 и ρ_2 . $\rho_{1,2} = \frac{(a+d)}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - (ad-bc)}$

В данном случае неподвижная точка является **фокусом**.

Если $r = \sqrt{Re^2 \rho_{1,2} + Im^2 \rho_{1,2}} < 1$, то неподвижная точка называется **устойчивым фокусом**. В этом случае точки итерации исходного отображения (23) лежат на скручивающейся спирали с центром в неподвижной точке, которая в этом случае устойчива. Если $r > 1$, то спираль раскручивается, удаляясь от неустойчивой неподвижной точки, которая в данном случае является **неустойчивым фокусом**. Характер сходимости возмущенной траектории к неподвижной точке меняется в зависимости от знака $Re \rho_{1,2}$. Случай $r = 1$ соответствует пограничной ситуации, когда возмущенная траектория не удаляется и не приближается к неподвижной точке, вращаясь вокруг нее с некоторой угловой скоростью.

Устойчивый
фокус



Неустойчивый
фокус

Пример. *Отображение Эно (Непон тар)*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \mu x_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= bx_n.\end{aligned}$$

x, y – динамические переменные, μ и b – параметры отображения.

Найдем неподвижные точки отображения и проведем их анализ на устойчивость.
Неподвижные точки находятся из условия

$$\begin{aligned}x^* &= 1 - \mu x^{*2} + y^*, \\y^* &= bx^*,\end{aligned}\tag{33}$$

что дает два решения:

$$\begin{aligned}P^1 : \quad x^* &= (-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4\mu}) / 2\mu, \quad y^* = bx^*, \\P^2 : \quad x^* &= (-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4\mu}) / 2\mu, \quad y^* = bx^*.\end{aligned}$$

Система уравнений для неподвижных точек имеет действительные корни при $\mu > -(1-b)^2/4$. Соответственно при этих значениях μ существуют 2 различные неподвижные точки отображения, P^1 и P^2 .

Уравнение в вариациях для малых отклонений ξ и η от состояния равновесия в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\mu x^* & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

Собственные числа ρ_1 и ρ_2 находятся из решения характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} -2\mu x^* - \rho & 1 \\ b & -\rho \end{bmatrix} = 0,$$

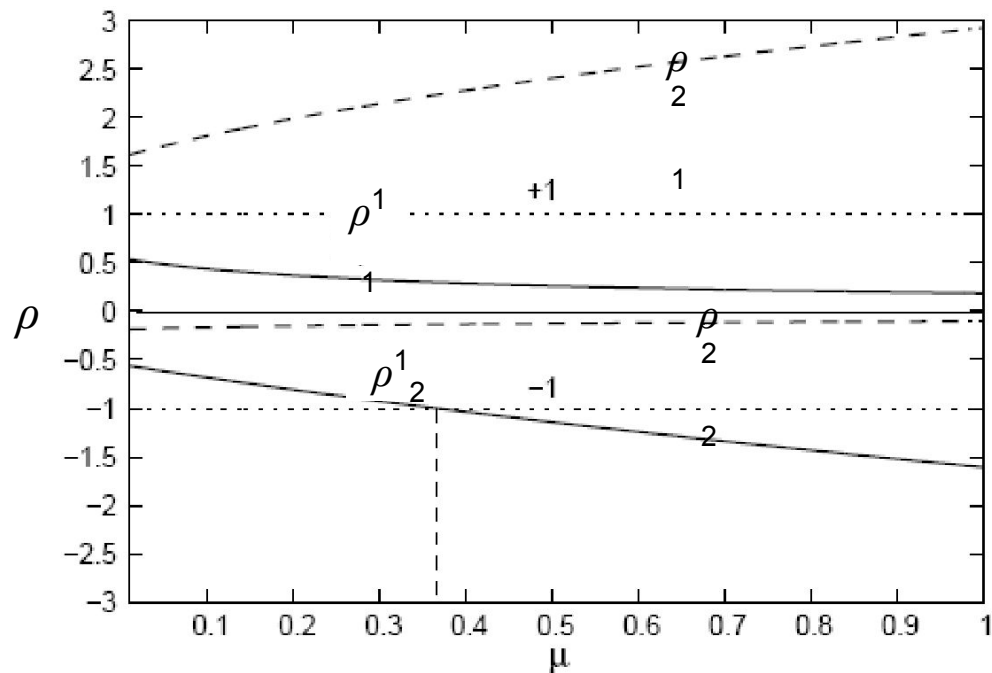
что дает

$$\rho_{1,2} = -\mu x^* \pm \sqrt{\mu x^{*2} + b}$$

для каждой из 2-х неподвижных точек.

Проанализируем характер устойчивости неподвижных точек в зависимости от значения параметра μ . Зафиксируем $b = 0.3$. При $\mu \rightarrow 0$ неподвижные точки «разъезжаются» в бесконечность, при этом значения собственных чисел стремятся к $\pm \sqrt{b}$ для P^1 и $\frac{1-b}{2} \pm \sqrt{b}$ для P^2 .

Зависимость собственных значений неподвижных точек отображения Эно от параметра μ



Точка P^2 является седлом при любых μ . Одно из ее собственных значений положительно и больше 1, а другое – отрицательно и близко к 0. Это означает, что по первому направлению траектория монотонно расходится, а по другому направлению отклонение убывает, меняя знак на каждой итерации.

Точка P^1 является устойчивым неориентируемым узлом при $0 < \mu < 0.3675$. При $\mu = 0.3675$ одно из собственных чисел достигает значения -1, что соответствует бифуркации удвоения и рождению цикла периода 2. По другому направлению точка всегда устойчива, т.к. собственное значение меньше 1.