Неравенства

(избранные вопросы по математике на ЕГЭ)

Содержание

Неравенства вида $f(x) > g(x); f(x) \geq g(x); f(x) < g(x); f(x) \leq g(x)$
Где $f(x)$ и $g(x)$ - линейные функции, называются ***неравенствами с одной неизвестной.***

Решением неравенства с одной переменной называется такое значение переменной, при подстановке которого неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax+b<0$ (или $ax+b>0$)

Решая линейное неравенство вида $ax+b>0$, получим: $ax>-b$

1 случай: $a>0$, тогда $x>-\frac{b}{a}$

2 случай: $a<0$, тогда $x<-\frac{b}{a}$

3 случай: $a=0$, тогда $0\cdot x>-b$

Если при этом $b\leq 0$, то решений нет

Если $b>0$, то $x\in R$

А1. Укажите наименьшее целое решение неравенства $-x+0{,}5(x+4)<4$

1) – 5;

2) – 4;

3) – 3;

4) – 2;

Решение.

$$-x+0{,}5(x+4)<4$$

$$-x+0{,}5x+2<4$$

$$-0{,}5x<2$$

$$x>-4$$

Ответ: - 3

Квадратными неравенствами называются неравенства вида
$ax^2+bx+c>0; ax^2+bx+c\ge 0; ax^2+bx+c<0; ax^2+bx+c\le 0,$
где *x* – переменная; *a,b,c* – действительные числа, причем $a\neq 0$.

Способы решения

графический

аналитический

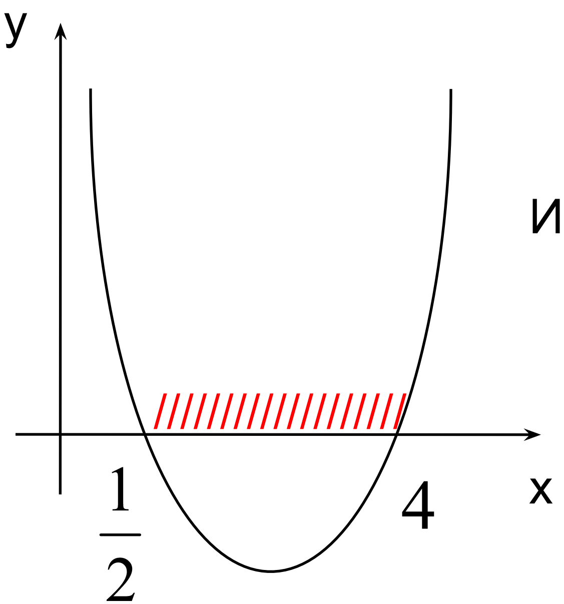
А1. Решите неравенство $2x^2 - 9x + 4 < 0$

1) $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (4;+\infty)$; 2) $(\frac{1}{2}; 4)$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [4;+\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$

Решение.

$2x^2 - 9x + 4 < 0$ D = 49; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 4$

Построим эскиз графика функции $y = 2x^2 - 9x + 4$



Из графика следует, что y<0, если $x \in (\frac{1}{2}; 4)$

Ответ: $(\frac{1}{2}; 4)$

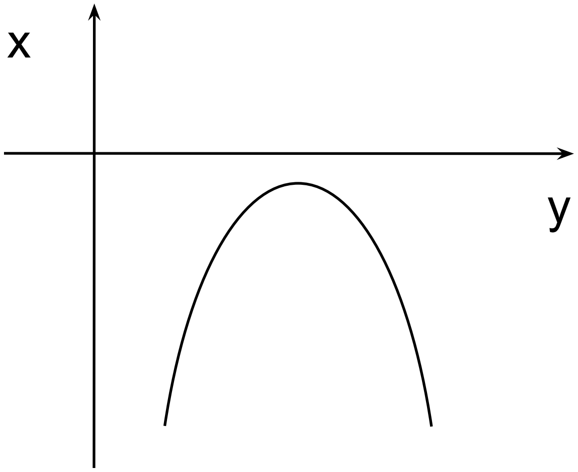
А2. Решите неравенство $-x^2-6x-10<0$

1) (-∞;+∞); 2) – 0,5; 3) решений нет; 4) 5;

Решение.

$$-x^2-6x-10<0$$

D < 0 => график функции $y=-x^2-6x-10$ с осью абсцисс не пересекается



Из графика следует, что y<0, если $x \in R$

Ответ: $(-\infty;+\infty)$

Рациональным неравенством называется неравенство вида

$P_n(x) > 0$, $P_n(x) < 0$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены

Основной метод решения – метод интервалов

При решении рациональных неравенств методом интервалов нужно:

- все члены неравенства перенести в левую часть; если неравенство дробно – рациональное, то привести левую часть к общему знаменателю;
- найти все значения переменной, при которых числитель и знаменатель обращаются в 0;
- нанести найденные точки на числовую прямую, разбивая ее при этом на интервалы, в каждом из которых рациональная функция сохраняет знак;
- определить знак функции на любом из интервалов (лучше крайнем);
- определить знаки на остальных интервалах: при переходе через точку знак меняется на противоположный, если точка является корнем нечетной степени кратности; при переходе через точку четной кратности знак сохраняется;
- множеством решений неравенства является объединение интервалов с соответствующим знаком функции. В случае нестрогого неравенства к этому множеству добавляются корни числителя.

А1. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$(x-3)(x+4)(7-x) \le 0$$

1) -5

2) -4

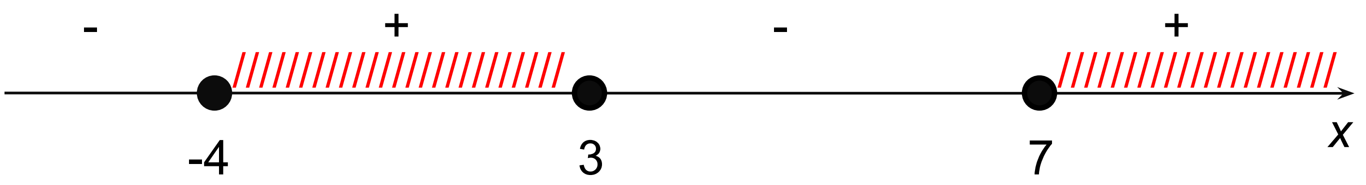
3) -3

4) -1

Решение.

$$(x-3)(x+4)(7-x) \le 0$$

$$(x-3)(x+4)(x-7) \ge 0$$



Ответ: -4

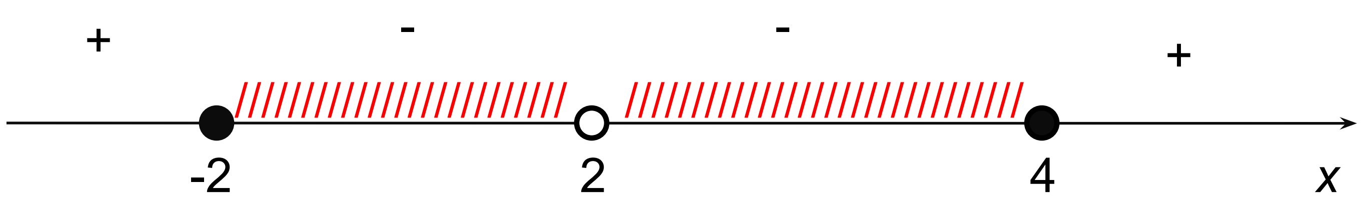
А2. Укажите число целых решений неравенства $\dfrac{(x+2)(x-4)}{-x^2+4x-4} \geq 0$

1) 7; 2) 5; 3) 6; 4) целых решений бесконечно много

Решение.

$$\frac{(x+2)(x-4)}{-(x-2)^2} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x-2)^2} \leq 0$$



-2; -1; 0; 1; 3; 4 – целые решения неравенств

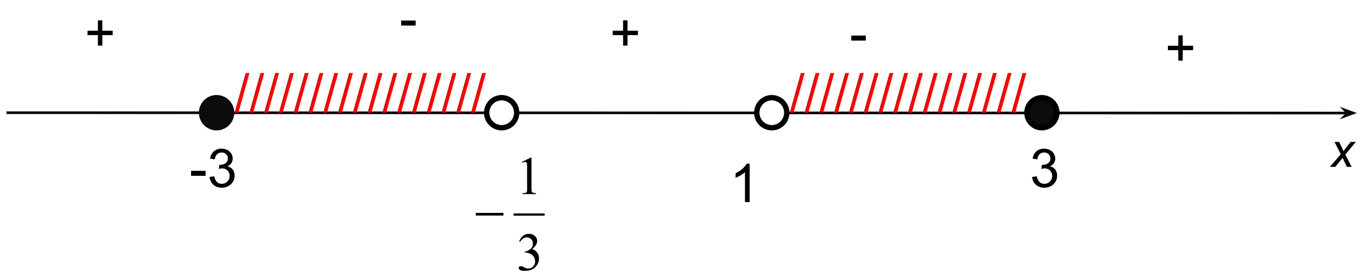
Ответ: 6

В1. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{9-x^2}{3x^2-2x-1} \geq 0$

Решение.

$$\frac{x^2-9}{3x^2-2x-1} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{3(x-1)(x+\frac{1}{3})} \leq 0$$



-3; -2; -1; 2; 3 – целые решения неравенства.

-3 + (-2) + (-1) + 2 + 3 = -1

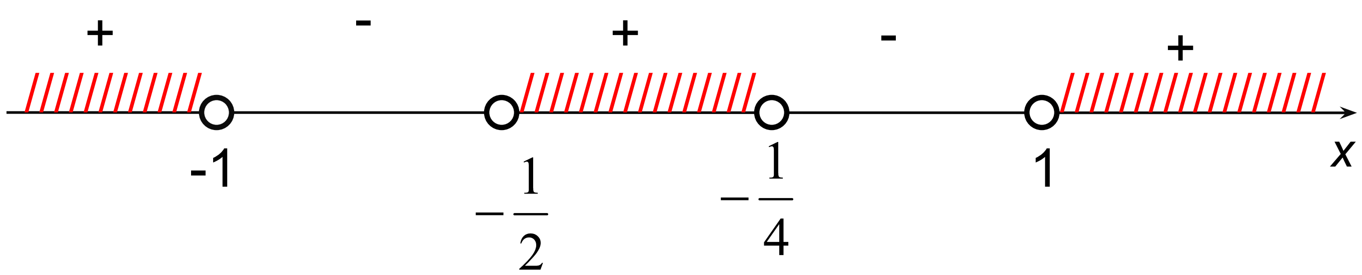
Ответ: -1

В2. Укажите сумму целых чисел, **не являющихся** решением неравенства

$$\frac{4x^2-3x-1}{2x^2+3x+1}>0$$

Решение.

$$\frac{4(x-1)(x+\frac{1}{4})}{2(x+\frac{1}{2})(x+1)}>0$$



-1; 0; 1 – целые числа, не являющиеся решениями неравенства

-1+ 0 + 1 = 0

Ответ: 0

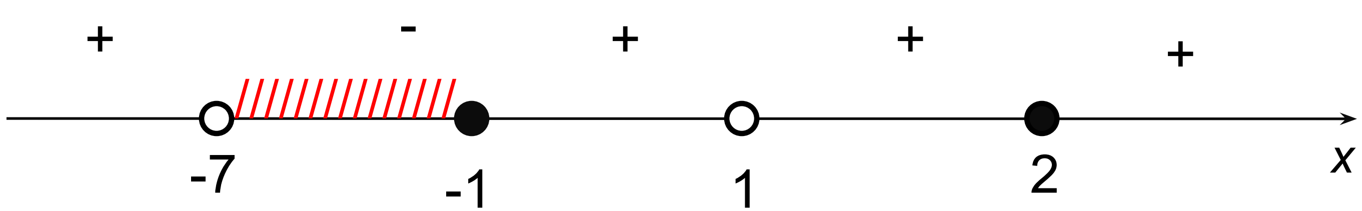
С1. Решите неравенство $\dfrac{(x^4-2x^3+2x-1)(x^2-4x+4)}{7-6x-x^2} \ge 0$

Решение.

$$x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-(2x^3-2x)=(x^2-1)(x^2+1)-2x(x^2-1)=$$
$$=(x^2-1)(x^2+1-2x)=(x-1)(x+1)(x-1)^2=(x-1)^3(x+1)$$

$$7-6x-x^2=-(x-1)(x+7)$$

$$\frac{(x-1)^3(x+1)(x-2)^2}{-(x-1)(x+7)} \ge 0$$



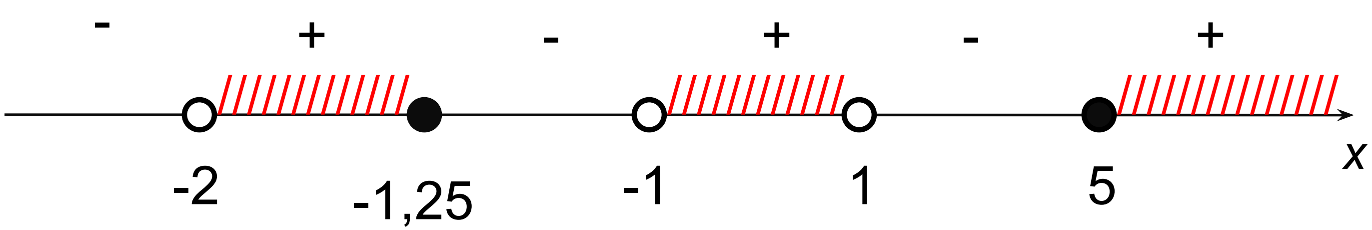
Ответ: $-7 < x \le -1; x = 2$

С2. Решите неравенство $\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{7}{x+2}\le 0$

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства, приведя дроби к общему знаменателю: $\dfrac{6(x+1)(x+2)-3(x-1)(x+2)-7(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}\le 0$

$$\frac{-4x^2+15x+25}{(x-1)(x+1)(x+2)}\le 0;\quad \frac{4x^2-15x-25}{(x-1)(x+1)(x+2)}\ge 0;\quad \frac{4(x+1{,}25)(x-5)}{(x-1)(x+1)(x+2)}\ge 0;$$



$$-2<x\le -1{,}25;\quad -1<x<1;\quad x\ge 5$$

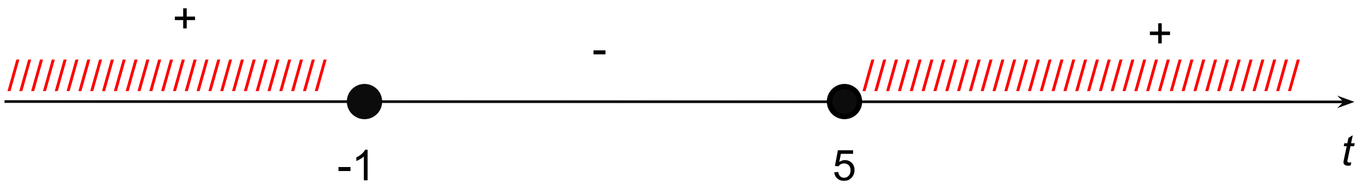
Ответ: $(-2;-1{,}25]\cup(-1;1)\cup[5;+\infty)$

С3. Решите неравенство $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\ge 5$

Решение.

Пусть $x^2+3x+1=t$, тогда $t(t-4)\ge 5;$

$t^2-4t-5\ge 0;\quad (t-5)(t+1)\ge 0;$

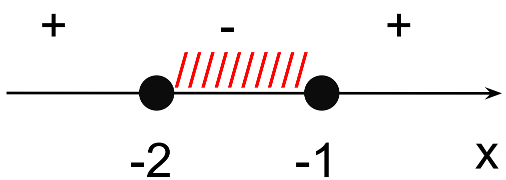


$t\le -1$ или $t\ge 5$

1) $x^2+3x+1\le -1$

$x^2+3x+2\le 0$

$(x+1)(x+2)\le 0$

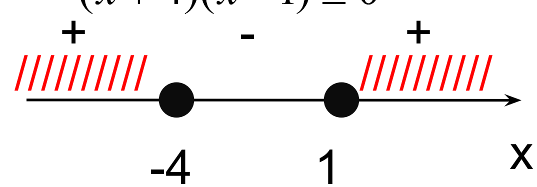


$-2\le x\le -1$

2) $x^2+3x+1\ge 5$

$x^2+3x-4\ge 0$

$(x+4)(x-1)\ge 0$



$x\le -4$ или $x\ge 1$

Ответ: $(-\infty;-4]\cup[-2;-1]\cup[1;+\infty)$

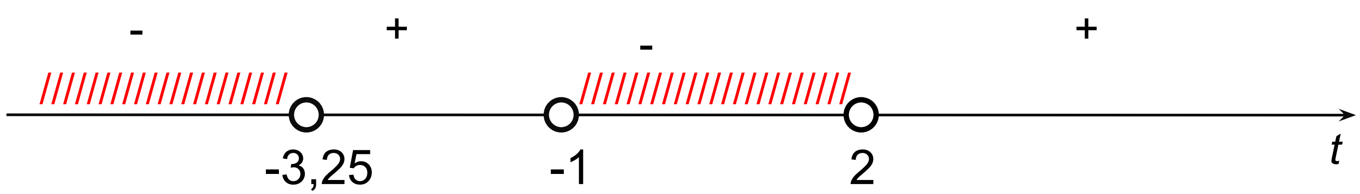
С4. Решите неравенство $2x^2+2x+1-\dfrac{15}{x^2+x+1}<0$

Решение.

Пусть $x^2+x=t$, тогда $2t+1-\dfrac{15}{t+1}<0$

$$\frac{2t^2+3t-14}{t+1}<0$$

$$\frac{2(t-2)(t+3{,}5)}{t+1}<0$$



t < -3,5 или -1 < t < 2

1) $x^2 + x < -3{,}5;$

$x^2 + x + 3{,}5 < 0;$

$2x^2 + 2x + 7 < 0;$

решений нет;

2) $-1 < x^2 + x < 2$

$$\begin{cases} x^2 + x < 2 \\ x^2 + x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) < 0 \\ x \in R \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 1 \\ x \in R \end{cases}$$

$-2 < x < 1$

Ответ: (- 2; 1)

Неравенства, содержащие знак модуля

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| < g(x) <=> \left[\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{array} \right.$$

$$|f(x)| > g(x) <=> \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array} \right.$$

$$|f(x)| > |g(x)| <=> f^2(x) > g^2(x)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - некоторые функции

А1. Найдите число целых решений неравенства $|3-2x|<4$

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) целых решений бесконечно много.

Решение.

$$-4<3-2x<4$$

$$-7<-2x<1$$

$$-\frac{1}{2}<x<3\frac{1}{2}$$

0; 1; 2; 3 – целые решения неравенства

Ответ: 4

А2. Решите неравенство $|3x+61|<-1$

$1)(-\infty;-20\frac{2}{3})\cup(-20;+\infty)$ $2)(-\infty;-20\frac{2}{3})$ $3)(-\infty;+\infty)$ 4) решений нет

Решение.

Так как $|3x+61|\geq 0$, то исходное неравенство решений не имеет

Ответ: решений нет

А3. Решите неравенство $|3x-2|>-2$

1)Решений нет 2)$(-\infty;+\infty)$ 3)(-1;1) 4)$(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Решение.

Так как $|3x-2|\geq 0$, то исходное неравенство справедливо

для любого действительного х

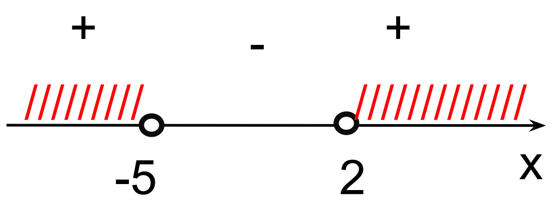
Ответ: (-∞;+∞)

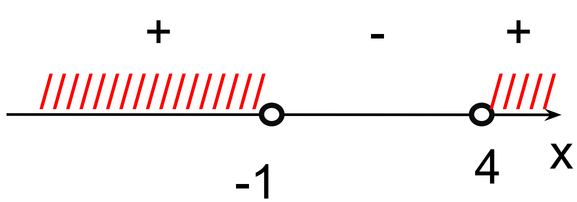
C1. Решите неравенство $3|x-1|+x^2>7$

Решение.

$$3|x-1|>7-x^2$$

$$\left[\begin{array}{l} 3(x-1)>7-x^2 \\ 3(x-1)<-(7-x^2) \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+3x-10>0 \\ x^2-3x-4>0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} (x+5)(x-2)>0 \\ (x+1)(x-4)>0 \end{array}\right.;$$





$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<-5 \\ x>2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>4 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$x<-1$ или $x>2$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$

С2. Решите неравенство $|x-6|>|x^2-5x+9|$

Решение.

$$(x-6)^2>(x^2-5x+9)^2$$

$$(x-6)^2-(x^2-5x+9)^2>0$$

Применим формулу разности квадратов

$$(x-6-x^2+5x-9)-(x-6+x^2-5x+9)>0$$

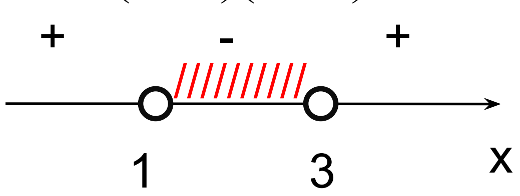
$$(-x^2+6x-15)(x^2-4x+3)>0$$

$$(x^2-6x+15)(x^2-4x+3)<0$$

Так как $x^2-6x+15>0$ для всех x, то

$$x^2-4x+3<0$$

$$(x-1)(x-3)<0$$



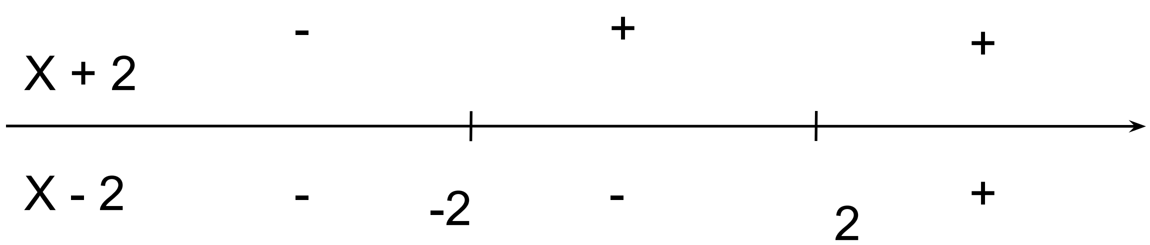
1<x<3

Ответ: 1<x<3

С3. Решите неравенство $|x+2|+|x-2|<6$

Решение.

Используем метод интервалов для модулей



Решим неравенство в каждом из трех промежутков

1) $\begin{cases} x<-2 \\ -(x+2)-(x-2)<6 \end{cases}$

$\begin{cases} x<-2 \\ -2x<6 \end{cases}$

$\begin{cases} x<-2 \\ x>-3 \end{cases}$

$-3<x<-2$

2) $\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ (x+2)-(x-2)<6 \end{cases}$

$\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ 4<6 \end{cases}$

$\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\in R \end{cases}$

$-2\le x\le 2$

3) $\begin{cases} x > 2 \\ (x+2)+(x-2) < 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 2 \\ 2x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$2 < x < 3$$

$$\left[\begin{array}{l} -3 < x < -2 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ 2 < x < 3 \end{array}\right.$$

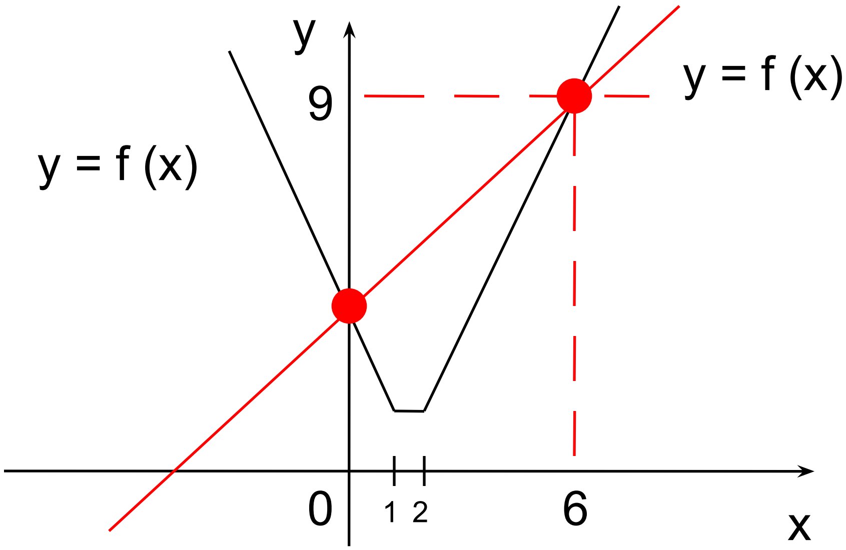
$$-3 < x < 3$$

Ответ: $-3 < x < 3$

С4. Решите неравенство $|x-1|+|2-x|<x+3$

Решение.

Построим графики функций $f(x)=|x-1|+|2-x|$ и $g(x)=x+3$



Найдем абсциссы точек пересечения графиков

График функции f(x) расположен ниже графика функции g(x) при $x \in (0;6)$

Ответ: (0; 6)

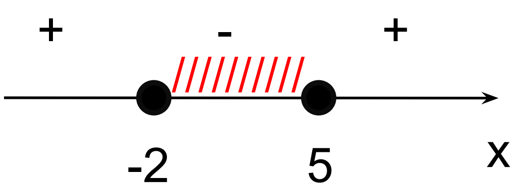
В1.Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2-3x-10}{1+\sqrt{4-x^2}} \le 0$$

Решение.

Так как $1+\sqrt{4-x^2} > 0$ при $-2 \le x \le 2$, то

$$x^2-3x-10 \le 0$$
$$(x+2)(x-5) \le 0$$



$$-2 \le x \le 5$$

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le x \le 5 \end{cases}$$
$$-2 \le x \le 2$$

- 2; -1; 0; 1; 2 - целые решения неравенства

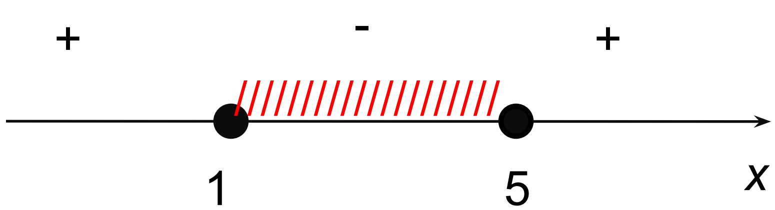
Ответ: 5

В2.Найти количество целочисленных решений неравенства $\dfrac{6x-x^2-5}{2+tg^2\dfrac{\pi x}{2}} \geq 0$

Решение.

$$2+tg^2\frac{\pi x}{2} > 0, \qquad \cos\frac{\pi x}{2} \neq 0; \qquad \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z; \qquad x \neq 1+2k, k \in Z$$

$$6x-x^2-5 \geq 0; \;\; x^2-6x+5 \leq 0; \;\; (x-5)(x-1) \leq 0$$



$1 \leq x \leq 5$ 1; 2; 3; 4; 5 – целые решения неравенства

Условию $x \neq 1+2k, k \in Z$ удовлетворяют числа 2 и 4

Ответ: 2

С1.Найдите все значения x, для которых точки графика функции $f(x) = \frac{4^{2x} - 9\cdot 4^x}{17 - 10x}$

лежат выше соответствующих точек графика функции $g(x) = \frac{8}{10x - 17}$

Решение.

Составим неравенство, которому удовлетворяют значения x:

$$f(x) > g(x); \qquad \frac{4^{2x} - 9\cdot 4^x}{17 - 10x} > \frac{8}{10x - 17}; \qquad \frac{4^{2x} - 9\cdot 4^x + 8}{17 - 10x} > 0$$

Решим данное неравенство методом интервалов

Найдем те точки, в которых обращаются в ноль числитель и знаменатель дроби:

а) $4^{2x} - 9\cdot 4^x + 8 = 0$

$4^x = t, \quad t > 0$

$t^2 - 9t + 9 = 0$

$t = 8, \quad t = 1,$

$4^x = 1, \quad 4^x = 8,$

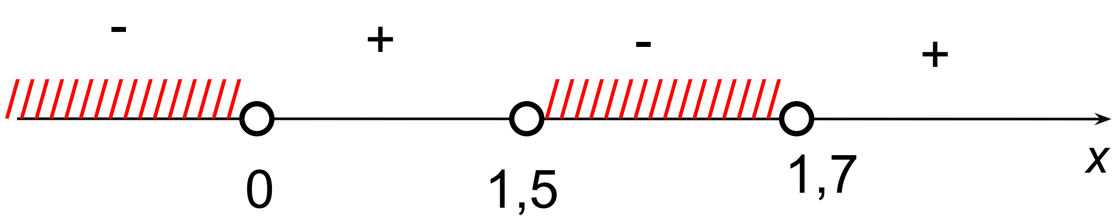
$x = 0. \quad x = 1{,}5.$

б) $17 - 10x = 0$

$x = 1{,}7$

Запишем неравенство в виде $$\frac{(4^x-4^0)(4^x-4^{1,5})}{-10(x-1,7)}>0;$$

$$\frac{(4^x-4^0)(4^x-4^{1,5})}{x-1,7}<0$$



x<0; 1,5<x<1,7

Ответ: $(-\infty;0)\cup(1,5;1,7)$

С2. Решите неравенство $5^{\log_5^2 x+1} + x^{\log_5 x} \geq 6\sqrt[4]{5}$

Решение.

ОДЗ: x > 0; пусть $\log_5 x = t$, тогда $x = 5^t$

$$5^{t^2+1} + 5^{t^2} \geq 6\sqrt[4]{5}$$

$$5 \cdot 5^{t^2} + 5^{t^2} \geq 6\sqrt[4]{5}$$

$$6 \cdot 5^{t^2} \geq 6 \cdot 5^{\frac{1}{4}}$$

$$5^{t^2} \geq 5^{\frac{1}{4}}$$

$$t^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$|t| \geq \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} t \geq \dfrac{1}{2} \\ t \leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x \geq \dfrac{1}{2} \\ \log_5 x \leq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{5} \\ x \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{5} \\ x \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{5} \\ 0 < x \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

$$\text{Ответ}: \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$$

Литература

- ЕГЭ 2009. Математика: сборник заданий/ В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. – М.: Эксмо, 2008
- ЕГЭ 1009. Математика: сборник экзаменационных заданий / Авт.- сост. Л.О. Денищева и др. – М.: Эксмо, 2009
- Математика. Подготовка К ЕГЭ / Г.Г. Мамонтова. – М.: Новое знание, 2008
- ЕГЭ 2009, Математика. Справочник / Авт. – сост. А.М. Титаренко и др. – М.: Эксмо, 2008
- Математика: практикум для старшеклассников и абитуриентов / Авт. – сост. А.В. Борзенков. – Волгоград: Учитель, 2009
- ЕГЭ. Математика: Раздаточный материал тренировочных тестов / С.Л. Никушкина, О.И. Судавная. – СПб.: Тригон, 2009
- Система подготовки к ЕГЭ по математике. А.Семенов, Е. Юрченко. – Газета «Математика» №21, 2008