

Работа с задачами на математическом кружке

И. С. Рубанов, г. Киров

Одарённый ребёнок ...

- стремится понять суть и причины происходящего;
- упорно преодолевает трудности;
- хочет как можно больше сделать сам;
- не любит рутины, «разжёвывания», повторения однотипных действий.

Поэтому при работе с одарёнными необходимы

- обучение, моделирующее процесс создания математики; «Лучший способ изучить — это открыть самому.» (Д. Пойа)
- верхняя планка трудности - на пределе возможностей, а нередко - и немного выше;
- максимальная самостоятельность ученика, минимально необходимая помощь;
- акцент на идейную сторону материала, закрепление через новые задачи.

Основной метод работы с одаренными — обучение через решение задач.

История

- С. И. Шохор-Троцкий (1853 – 1923). Метод целесообразных задач.
- Д. Пойа. «Задачи и теоремы из анализа» (совм. с Г. Сеге), «Как решать задачу», «Математика и правдоподобные рассуждения», «Математическое открытие».
- Московский кружок 1930-х годов. «Революция Шклярского». «Библиотека математического кружка»
- 1960-е, Н.Н. Константинов и другие: появление математических школ и преподавания с помощью «листочков». Применяется во многих математических школах, летних лагерях и кружках по сей день.
- 1970-80-е. «Ленинградские математические кружки».
- Санкт-Петербург, 1980-е – наше время.

Листок и работа с ним

- *Листок* - это упорядоченный набор задач, составленный так, чтобы помочь ученику с наибольшей возможной степенью самостоятельности овладеть изучаемыми фактами, идеями, приёмами. Задачи подобраны и расположены таким образом, чтобы натолкнуть на нужные идеи, оставив при этом ученикам максимум посильной самостоятельной работы. Для более слабых заранее продумываются подсказки.
- Ученики сразу или после некоторой подготовки получают листки, решают задачи подряд и рассказывают решения преподавателю или его ассистентам. При необходимости даются индивидуальные подсказки. В некоторый момент прием решений прекращается и задача разбирается. В итоге все задачи должны быть разобраны, но иногда это случается не скоро.
- Плюсы работы по листкам:
 - каждый может самостоятельно работать в своем темпе, получая минимально необходимую индивидуальную помощь;
 - обеспечивается постоянный индивидуальный контроль;
 - преподавателям не надо диктовать, детям — записывать, материалы занятий остаются в упорядоченном виде;
 - ниже требования к опыту преподавателя.

Проблемы работы по листкам

- Искуссы:

- листки провоцируют на сведение к минимуму фронтальной работы;
- постоянная индивидуальная сдача задач провоцирует борьбу с сотрудничеством учеников на занятии и рейтингоманию;
- велико искушение вместо разработки своих листков брать готовые чужие.

Возможно (и необходимо!) сочетать индивидуальную работу и разборы с «колхозными» занятиями, где ученики могут сотрудничать, фронтальными беседами и диалогами.

- М. Лакатош, «Доказательства и опровержения».
И. Рубанов. Как обучать методу математической индукции.
- Минусы тематических листков:
 - знание темы листка сам по себе – сильная подсказка, при решении реальных задач таких подсказок нет;
 - листок сковывает преподавателя, лишает гибкости, сильно ограничивает возможность импровизации и реагирования на неожиданности;
 - раскрывая наперед все карты, листок лишает занятие интриги.

Тут в некоторой степени может помочь сочетание листка с соответствующей презентацией.
- Санкт-Петербург: работа по листкам из «разнобоя».

Некоторые типы листков

- 1) «Математический эксперимент» → формулировка утверждения → доказательство → приложения.
- 2) Доказательство факта, разбитое на шаги → приложения.
- 3) Демонстрация аналогии → её формализация → изучение свойств и приложения выявленной идеи или понятия.
- 4) Развитие изучаемой идеи.
- 5) «Разнобой».

Список, понятно, не исчерпывающий, и пункты частично пересекаются.

ЧЁТНОСТЬ ЧИСЛА НЕЧЁТНЫХ ВЕРШИН ГРАФА

- **1. Математический эксперимент.** Даются несколько рисунков, состоящих из точек, около каждой из которых написано натуральное число, и предлагается на каждом рисунке соединить точки линиями так, чтобы из каждой выходило указанное число линий. Когда выясняется, где получается, а где - нет, предлагается выделить отличительные признаки «хороших» и «плохих» рисунков. В итоге появляется
- **2. Гипотеза.** «Хорошие» рисунки – это в точности те, на которых количество (сумма) нечётных чисел чётно.
- **3. а)** 100 контактов соединили проводами так, что из каждого контакта выходит по 4 провода. Сколько использовано проводов? **б)** Подсчитайте число проводов в каждом из примеров задачи 1. **в)** Докажите гипотезу.

- 4. В классе 30 человек. Может ли случиться, что 9 из них имеют в этом классе по 3 друга, 11 – по 4 друга и 10 – по 5 друзей?
- 5. Земли короля поделены между 19 вассалами-баронами. Может ли случиться, что у каждого из них 1, 5 или 9 соседних баронств?
- 6. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.
- 7. Можно ли расположить в пространстве 11 карандашей так, чтобы каждый касался ровно трёх других?
- 8. Может ли в государстве, где из каждого города выходит по 3 дороги, а каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города, быть ровно 100 дорог?

КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН

Решите уравнения:

• 1. $x^2 - 2x + 1 = 0$;

• 2. $x^2 - 2x - 1 = 0$;

• 3. $x^2 - 2x + 2 = 0$;

• 4. $x^2 - 2x + c = 0$;

• 5. $x^2 - 4x + c = 0$;

• 6. $x^2 + 4x + c = 0$;

• 7. $x^2 + 5x + c = 0$;

• 8. $x^2 + 2kx + c = 0$;

• 9. $x^2 + bx + c = 0$;

ПЕРЕБОР

- 1. Число 607 – простое или составное?

Три правила перебора: по какому признаку перебирать, в каком порядке, когда остановиться.

- 2. Для подарков купили конфеты. Хулиган Вася одну конфету потихоньку спрятал. После этого, когда конфеты раскладывали по две, по три и по пять, то каждый раз одной конфеты не хватало, а вот по семь их удалось разложить. Сколько могло быть куплено конфет, если известно, что всего их было меньше трёхсот?

Очевиден перебор по числам, делящимся на 7, но если догадаться вернуть спрятанную конфету, то можно вести его по числам, делящимся на 30.

Четвертое правило перебора: оптимизируй это!

- 3. Летела стая сороконожек и трехголовых драконов. Вместе у них 26 голов и 298 ног. У сороконожки одна голова. Сколько ног у трехголового дракона?

Возможен перебор по числу драконов или по числу сороконожек. В первом случае перебор можно сократить, начав сразу с 7 драконов (иначе сороконожек слишком много), в втором – рассмотреть только случаи 2 и 5 сороконожек (иначе число голов, оставшихся на долю драконов, не делится на 3).

- **4.** Телеграф может передавать цифры, знаки сложения, вычитания, умножения и деления и знак равенства. Передавая верное числовое равенство, телеграфист один раз нажал не на ту клавишу, и получилось такое неверное равенство: $9 \times 5 + 1053 = 1998$. Каким могло быть исходное равенство (перечислите все возможные варианты)?

Основная трудность – разные невозможные случаи отсекаются по разным причинам. Стоит ли ставить эту задачу на то место, где она сейчас стоит?

- **5.** На клетчатой бумаге нарисовали квадрат со стороной в 5 клеток и отметили все узлы сетки внутри него и на его границе. Сколько существует квадратов с вершинами в отмеченных точках и сторонами, лежащими на линиях сетки?
- **6.** Сколькими способами можно выбрать из списка $\{-9, -7, -5, -1, 1, 2, 3\}$ несколько чисел так, чтобы их сумма равнялась -6 ?

Двупараметрический перебор.

- **7.** На сколько частей могут разбивать плоскость 4 различные прямые?

Перебирать не просят, но придётся. Придётся и классифицировать.

- **8.** В восьми корзинах лежали яблоки трех сортов: антоновка, джонатан и ранет, причем в каждой корзине – яблоки только одного сорта. В первой корзине лежали 20 яблок, во второй – 24, в третьей – 28, в четвертой – 32, в пятой – 36, в шестой – 40, в седьмой – 44, в восьмой – 48. После того, как продали корзину ранета, его осталось вдвое больше, чем антоновки, но вдвое меньше, чем джонатана. В каких корзинах лежала антоновка, а в каких – ранет (перечислите все возможные варианты)?

Сведение к перебору, характерное для теоретико-числовых задач. Эту задачу тоже, как и задачу 4, возможно, лучше давать на дом, но в сильном кружке можно включить и в аудиторную часть листка.

- **9.** Имеются три карточки, на которых написаны буквы **И, П и С**. Какие слова русского языка можно сложить из этих карточек?

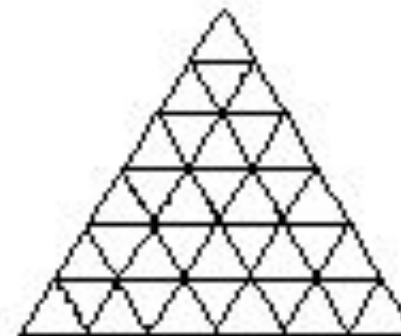
Алфавитный порядок перебора.

- **10.** В забеге участвовали три бегуна: Иванов, Петров и Сидоров. Перед забегом четыре болельщика дали такие четыре прогноза:
1) Победит Иванов. 2) Сидоров обгонит Петрова. 3) Петров финиширует следующим после Иванова. 4) Сидоров не победит. После забега оказалось, что среди прогнозов было чётное число верных. В каком порядке финишировали бегуны?

Идея кодировки.

- **11.** У бабушки пять внуков. Она купила два одинаковых яблока, две одинаковых груши и апельсин и хочет дать каждому внуку по фрукту. Сколькими разными способами она может это сделать?

- **12.** На рисунке справа изображён равносторонный треугольник, разбитый на 36 одинаковых равносторонных треугольников. Сколько всего равносторонных треугольников можно насчитать на этом рисунке?



- **13.** Дорожки парка образуют квадратную сетку со стороной 10 м. Черепаха, движущаяся со скоростью 10 м/час, выползает по дорожке с одного из перекрестков, а на каждой встретившейся развилке поворачивает налево или направо. На каком расстоянии от начальной точки она может оказаться через 6 часов после начала движения (перечислите все возможности)?

Надо владеть перебором, но не надо слишком им увлекаться.

ОТКУДА БЕРУТСЯ ФОРМУЛЫ?

Двоичные коды

- *Двоичными кодами* называются "слова", составленные из нулей и единиц (например, 00111010). Число знаков в коде называется его *длиной*.
- **1.** *Имена роботландских роботов выглядят, как двоичные коды длины 4. Сколько в Роботландии различных имен?*

Решение. Выпишем все роботландские имена в алфавитном порядке: 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111. Всего получилось *16 имен*.

- **2.** *В детский сад привезли кубики, красные и синие. Детям выдали по 4 кубика, и каждый построил из своих кубиков башню. Какое наибольшее число различно раскрашенных башен могло получиться?*
- **Решение.** Обозначим красный цвет нулем, а синий – единицей. Тогда мы сможем закодировать раскраску каждой башни двоичным кодом длины 4, где первая цифра означает цвет верхнего кубика, вторая – цвет второго кубика сверху и т.д. Обратно, по двоичному коду без труда строится башня соответствующей раскраски. Получается, что разных раскрасок столько же, сколько роботландских имен из задачи 1, то есть 16.

Обратите внимание: нам не пришлось ничего перебирать – сведя кодировкой вторую задачу к уже решенной первой, мы получили готовый ответ.

- 3. Покажите, как подходящими кодировками свести к задаче 1 следующие три задачи:
- а) В азбуке привидений всего две буквы: У и Ы. Сколько различных четырехбуквенных имен могут иметь привидения?
- б) Светофор состоит из четырех лампочек, расположенных в ряд. Сколько различных сигналов можно подать с его помощью?

Примечание. Если не горит ни одна лампочка – это тоже сигнал.

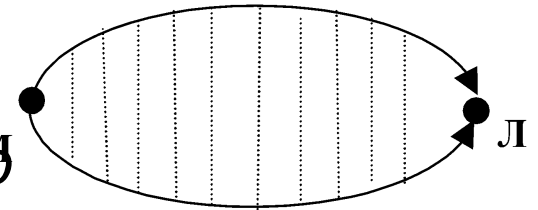
- в) Сигнальный флажок состоит из пяти горизонтальных полосок белого, синего или красного цвета, причем верхняя полоска всегда синяя, а соседние полоски – разноцветные. Сколько бывает разных сигнальных флажков?
- 4. Допустим, имена в Роботландии стали пятизначными. Сколько их теперь? А семизначных?
- 5. Сколько существует различных двоичных кодов длины n ($n = 1, 2, 3, \dots$)?

Решение. Кодов длины 1 существует два: 0 и 1. Решение задачи 3 показывает, что добавление к коду одного знака увеличивает количество кодов вдвое. Чтобы из кода длины 1 получить код длины n , надо добавить к нему $n-1$ знак. При этом первоначальное количество кодов удвоится $n-1$ раз, и их станет 2^n .

- Количество двоичных кодов длины n принято обозначать \overline{A}_2^n . Решив задачу 5, мы вывели формулу
$$\overline{A}_2^n = 2^n \quad (1).$$

По этой формуле можно решать любую задачу, которая кодируется базовой задачей 5.

- 6. Следующие задачи закодируйте задачей 5 (при подходящем значении n) и найдите их ответы по формуле (1):
 - а) Во рту у марсианина есть 11 гнезд для зубов. В каждом гнезде либо есть зуб, либо его нет. Известно, что любые два марсианина отличаются набором зубов (т.е., если взять любых двух, то найдется гнездо, в котором у одного есть зуб, а у другого нет). Каково наибольшее возможно число марсиан?
 - б) Из Манчестера в Ливерпуль ведут два шоссе с односторонним движением, пересеченные десятью проселками (см. рис.). Машина выезжает из М в Л по одному из шоссе, и, доезжая до любой развилки, может либо свернуть на проселок, либо не сворачивать. Свернув, она проезжает проселок до конца и продолжает путь по другому шоссе (по тем же правилам). Сколькими разными способами можно проехать из Манчестера в Ливерпуль?
 - в)* Сколько различных делителей у числа 2310?
- 7. Закодируйте задачу 6б задачей 6а.



Размещения и перестановки

- 8. Имеется 10 заводов и три различных заказа. Сколькими различными способами можно разместить эти заказы на трех разных заводах?
- 9. Сколькими различными способами можно разместить m различных заказов на m разных заводах, если всего имеется n заводов ($n \geq m$)?

После обсуждения задач делаем резюме:

Количество размещений m различных заказов на n заводах обозначают A_n^m . Мы вывели формулу $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(m-1))$.

- 10. В подразделении n солдат. Сколькими различными способами их можно выстроить в шеренгу.

Обсуждение. Задача 10 кодируется задачей 9 при $m = n$, но из-за большой своей важности этот частный случай размещений имеет специальное название: *перестановки*. Задачу 10 часто считают базовой задачей о перестановках. Формула для числа перестановок: $P_n = n!$.

- **11.** Каждую из следующих задач подходящей кодировкой сведите к одной из базовых задач 9 или 10 и найдите ответ по соответствующей формуле.
- а) Есть 20 разных конфет. Сколькими способами их можно раздать двадцати детям так, чтобы каждый получил по конфете?
- б) Сколькими способами можно из 100 участников собрания выбрать председателя, его заместителя и секретаря?
- в) Сколькими способами можно расставить в таблице 6×8 числа от 1 до 48?
- г) Назовем пятизначное число **интересным**, если все его цифры различны и среди них нет нуля. Сколько существует интересных пятизначных чисел?
- д) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске размером 8×8 восемь ладей, не бьющих друг друга?

Обобщим двоичные коды.

- **Задача 12.** *Троичным кодом* длины n называется "слово" длины n , составленное из нулей, единиц и двоек (например, 02122102 – троичный код длины 8). Количество таких кодов обозначается \bar{A}_3^n . Выведите формулу, выражающую \bar{A}_3^n через n .
- **Задача 13.** *Переделайте задачи 2 и 3б так, чтобы она кодировалась не двоичными, а троичными кодами.*
- **Задача 14.** а) Определите четверичные коды. Выведите формулу \bar{A}_4^n для \bar{A}_4^n . б) Определите k -ичные коды, где k – данное натуральное число. Выведите формулу для \bar{A}_k^n .

Число \bar{A}_k^n называется числом размещений с повторениями предметов k видов по n местам. Базовой задачей об этом числе будем считать задачу 14б.

Задачи на все формулы.

Среди следующих задач найдите те, которые можно закодировать базовыми задачами 5, 9 и 14б, опишите кодировки, укажите ответы. Постарайтесь решить и те задачи, которые так закодировать не удастся.

- **Задача 15.** а) У Деда Мороза есть пять мешков с конфетами пяти разных сортов. Сколькими различными способами он может дать по одной конфете каждому из трех ребят? б) Тот же вопрос, если выданные детям конфеты должны быть трех разных сортов.
- **Задача 16.** Правительство решило загрузить работой 10 военных заводов. Каждому заводу планируется заказать либо автоматы, либо пулеметы (но не то и другое сразу). Сколькими различными способами можно разместить заказы?
- **Задача 17.** Назовем число **забавным**, если все его цифры делятся на 4. Сколько существует забавных четырехзначных чисел?
- **Задача 18.** а) Сколькими способами можно из 30 шестиклассников выбрать двух дежурных: одного – по классу, другого – по гардеробу? б) Тот же вопрос, если оба дежурят по классу.

Не всё так просто.

- **19.** *Имеется 10 различных книг. Сколькими различными способами можно выбрать из них одну или несколько книг для подарка?*
- **Решение.** Занумеруем книги числами от 1 до 10. Тогда каждому подарку можно сопоставить двоичный код длины 10, где на k -ом месте стоит 1, если книга с номером k входит в подарок, и 0, если не входит (например, подарку из книг 2, 5, 7 и 8 соответствует код 100101100). Значит, способов сделать подарок будет 2^{10} .
- **Критика.** На самом деле подарков меньше, чем кодов, ибо коду 0000000000 никакой подарок не соответствует: пустых подарков не бывает! Поскольку всем остальным кодам подарки все же соответствуют, верный ответ – $2^{10}-1$.
- **20.** *Сколькими различными способами победитель "Поля чудес" может выбрать два приза из трех имеющихся?*
- **Решение.** Пусть призы – заводы, а выбор – размещение заказов. Тогда наша задача кодируется задачей о размещении заказов, и способов получается $A_5^2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- **Критика.** Легко убедиться, что ответ снова неверен: если обозначить призы цифрами 1, 2 и 3, то выборов получится только три: {1,2}, {1,3} и {2,3}. Причина в том, что в базовой задаче 7 заказы были *различными*, а тут неважно, какой приз взят первым, а какой – вторым. Это привело к тому, что мы в нашем "решении" *каждый выбор сосчитали дважды*. Например, выбор {1,2} получил коды 12 и 21: первый код соответствует случаю, когда первым был взят приз №1, а второй – случаю, когда первым был взят приз №2.

Мораль. *Сводя одну задачу к другой, надо брать только такие кодировки, при которых каждому кодируемому предмету соответствует ровно один код, а каждому коду – ровно один предмет (такое соответствие между предметами и кодами называется **взаимно-однозначным**.) Лишь в этом случае мы можем гарантировать, что кодируемых предметов столько же, сколько кодов.*

- **21.** *Почему задача 17 не кодируется задачей о троичных кодах?*

Волшебное слово *кодировка*

- Если строго, то кодировка – это отображение из множества кодируемых объектов во множество кодов.

Бр-р-р...

- Но ведь мы же, решая задачи, обошлись без этого определения!
Отображение, соответствие – непонятно, *кодировка* – понятно: все мы в детстве что-нибудь шифровали.
- Смысл (взаимно-однозначной) кодировки – вместо объектов можно работать с их кодами: подсчитывать, перебирать, разглядывать, преобразовывать.
 - Метод координат.
 - Визуализация: круги Эйлера, графики, графы, диаграммы Юнга...
 - Изоморфизм, моделирование.

Всю математику можно определить как *науку об аналогии*.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

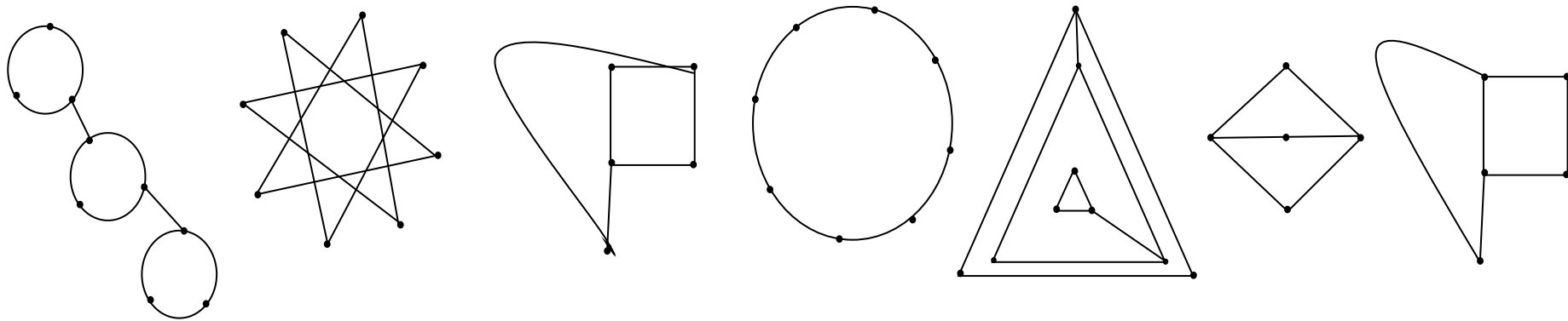
- **1.** В городе Колоколамске живут 10 шпионов по кличкам Нелли, Одри, Долли, Тилли, Чарли, Петя, Штирлиц, Супер, Вилли, Деловой. Нелли шпионит за Супером, Одри – за Чарли, Долли – за Одри, Тилли и Вилли, Тилли – за Петей, Чарли – за Долли, Штирлицем и Деловым, Петя – за Штирлицем, Штирлиц – за Тилли и Деловым, Супер – за Нелли, Вилли – за Чарли, Деловой – за Одри, Долли и Вилли. Какое наибольшее число шпионов сможет выстроиться в очередь так, чтобы перед каждым, кроме первого, стоял тот, за кем он шпионит?
- **2.** Какое наибольшее количество различных цифр можно выписать в ряд так, чтобы, подчеркнув любые две соседних, мы получили двузначное число, делящееся на 7 или 23? Число 07 тоже считается двузначным.

Изоморфизм графов.

Обсуждение изоморфизма задач 1 и 2 приводит к понятию изоморфизма графов. Чтобы не напугать учеников, можно изоморфные графы называть равными. Но если есть уверенность, что они не испугаются, лучше говорить об изоморфизме.

Графы равны, если вершины одного можно так закодировать вершинами другого, что две вершины связаны ребром в первом графе тогда и только тогда, когда они связаны ребром во втором.

- **3.** Какие из изображённых на рисунках графов равны между собой?
(Точки пересечения рёбер, не отмеченные кружочками, вершинами не считаются.)



- 4. На полях $a1$ и $c3$ шахматной доски 3×3 стоят чёрные кони, а на полях $a3$ и $c1$ — белые. Можно ли, двигая этих коней по правилам шахматной игры, переставить их так, чтобы чёрные кони стояли на полях $a1$ и $c1$, а белые — на полях $a3$ и $c3$?
- 5. Покажите, что из двух следующих задач достаточно решить одну:
 - а) Хромая ладья ходит как обычная, но только на соседнюю клетку. Может ли она пройти по доске 4×4 , побывав на каждой ее клетке ровно один раз?
 - б) Летучая ладья ходит как обычная, только не может становиться на соседнюю клетку. Может ли она пройти по доске 4×4 , побывав на каждой ее клетке ровно один раз?
- 6. а) Петя отметил на прямой три точки и обозначил их A , B и C (не обязательно в том порядке, в каком они идут на прямой). Миша может назвать любые две точки, и Петя сообщит, каково расстояние между этими точками. За какое наименьшее число вопросов Миша сможет наверняка узнать, как расположены отмеченные точки (то есть, какие две из них — крайние, и в каком порядке идут между ними две другие)?
 - б) Тот же вопрос, если Петя отметил четыре точки: A , B , C и D .
 - в) Тот же вопрос, если Петя отметил пять точек: A , B , C , D и E .

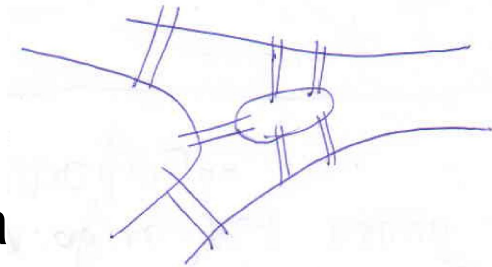
ЗАДАЧИ ПРО ДОМИНО

- **1. а)** Все 28 доминошек выложены в ряд. На одном конце тройка. Что может быть на другом конце? **б)** 27 доминошек выложены в ряд так, что оставшуюся кость выложить нельзя. Докажите, что оставшаяся кость — дубль. **в)** 26 доминошек выложены в ряд так, что оставшиеся кости выложить нельзя. Докажите, что обе оставшиеся кости — дубли.
- **2.** Из комплекта домино выбросили все кости, содержащие шестерки. Можно ли выложить все оставшиеся кости в ряд?
- **3.** В комплект *домино-2017* входят все кости, которые можно составить из чисел от 0 до 2017. Можно ли выложить все кости такого комплекта в ряд?
- **4.** В комплект *домино- n* входят все кости, которые можно составить из чисел от 0 до n . При каких n ответ на вопрос, можно ли выложить все кости такого комплекта в ряд, будет получаться так же, как в предыдущей задаче?

- 5. Докажите, что все кости комплекта *домино-2018* можно выложить так, чтобы получилось одно или несколько колец.
- 6. а) Докажите, что если все кости комплекта *домино-2018* выложены так, что получилось несколько колец, то какие-то два из этих колец можно (предварительно как-то разорвав каждое из них) соединить в одно. б) Докажите, что все кости комплекта *домино-2018* можно выложить так, чтобы получилось одно кольцо.
- 7. При каких n результаты задач 5 и 6 можно перенести на случай *домино- n* ?
- 8. Несколько комплектов *домино- n* смешали и выбросили из получившегося набора некоторое количество костей, включая все дубли. При каком условии все оставшиеся кости можно выложить
а) в одно или несколько колец? б) ровно в одно кольцо?

ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

- 1. Игорь написал на доске числа от 0 до n и соединил каждое с каждым из остальных. При каких n муравей сможет проползти по всем нарисованным Игорем линиям, пройдя каждую ровно один раз?
- 2. Граф называется *эйлеровым*, если все его рёбра можно обойти, пройдя по каждому ровно один раз. Превратите результат задачи 8 про домино в критерий эйлеровости графа.
- 3. **Задача Леонарда Эйлера.** В 18 веке в городе Кёнигсберге было 7 мостов, расположенных так, как показано на рисунке. Можно ли обойти все эти мосты так, чтобы пройти по каждому ровно один раз?
- 4. а) Имеется кусок проволоки длиной 120 см. На какое наименьшее число частей надо его разломать, чтобы из них можно было спаять каркас куба с ребром в 10 см?
б) Какой наибольшей длины кусок проволоки можно вырезать из каркаса куба с ребром в 10 см?
в) Из куска проволоки требуется, не ломая его, изготовить каркас куба с ребром в 10 см (некоторые рёбра могут быть двойными). Какова наименьшая возможная длина пригодного для этой цели куска?



- **5. а)** Петя рисует связный граф. Какое наименьшее число раз ему придётся оторвать ручку от бумаги, если он не хочет проводить никакую линию дважды? **б)*** Тот же вопрос, если Петя рисует произвольный (не обязательно связный) граф.
- **6.** При каких n можно расставить по кругу шарики n различных цветов так, чтобы каждые два цвета встречались рядом ровно один раз?
- **7.** Турист вышел с вокзала и отправился гулять по городу. Докажите, что если он будет гулять достаточно долго, то сможет вернуться на вокзал, пройдя по каждой из улиц города ровно дважды, если **а)** с самого начала задастся такой целью; **б)** задастся такой целью в любой момент прогулки, когда он ещё не прошёл ни по какой улице больше одного раза.
- **8.** В стране Анчурии каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Из каждого города выходит по 20 дорог, от любого города можно добраться по дорогам до любого другого. Докажите, что на каждой из дорог можно ввести одностороннее движение так, что от любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.
- **9.** В стране Бачурии каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Движение на каждой дороге одностороннее, причём из каждого города можно выехать ровно по 10 дорогам и въехать в него можно тоже ровно по 10 дорогам. Докажите, что если от города А до города Б можно добраться по дорогам с нарушением правил, то можно добраться и без нарушения правил.

МАКРООПЕРАЦИИ И АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

- 1. а) Можно ли квадрат 30×30 разрезать на уголки из трёх клеток?
б) Можно ли квадрат 100×100 разрезать на фигурки из четырёх клеток, имеющие форму буквы Т?

Макрооперация – это составная операция, составленная из некоторого количества других.

- 2. В каждую клеточку таблицы 5×5 записано по числу так, что суммы чисел во всех квадратах 2×2 одинаковы и суммы чисел во всех столбцах одинаковы. Докажите, что числа в угловых клетках таблицы одинаковы.
- 3. Докажите, что продавец и покупатель смогут рассчитаться за товар, который стоит целое число тугриков, если:
а) у продавца достаточно много купюр достоинством 2019 тугриков, а у покупателя – достоинством 2017 тугриков;
б) продавца достаточно много купюр достоинством 29 тугриков, а у покупателя – достоинством 12 тугриков.
- 4. У продавца есть много 15-тугриковых, а у покупателя — много 36-тугриковых купюр. Смогут ли они рассчитаться за товар стоимостью:
а) 2019 тугриков; б) 2018 тугриков?

Пусть a и b натуральные числа. Поделим с остатком a на b :
 $a = bq_1 + r_1$. Далее поделим с остатком b на r_1 : $b = r_1q_2 + r_2$, r_1 на r_2 :
 $r_1 = r_2q_3 + r_3$ и т.д., пока какое-то r_{n-1} не поделится на r_n нацело:
 $r_{n-1} = r_nq_n$.

Описанный процесс называется *алгоритмом Евклида*.

- **5. а)** Найдите алгоритм Евклида в решениях задач 3 и 4в.
- **б)** Докажите, что все остатки r_k представляются в виде $ma + nb$, где m и n — целые числа. Выведите отсюда, что все r_k делятся на НОД (a, b) .
- **в)** Докажите, что все r_k , а также a и b делятся на r_n .
- **г)** Докажите, что $r_n = \text{НОД}(a, b)$.
- **д)** [Теорема о линейном представлении НОД]. Докажите, что найдутся такие целые m и n , для которых $\text{НОД}(a, b) = ma + nb$.
- **е)** Докажите, что $\text{НОД}(a, b)$ — наименьшее по модулю натуральное число, которое можно представить в виде $ma + nb$, где m и n — целые числа. Докажите теорему о линейном представлении НОД, рассмотрев наименьшее по модулю натуральное число вида $ma + nb$.
- **6.** Петя произвольным образом разложил некоторое количество монет по 15 коробкам. Вася может выбрать любые k коробок и добавить в каждую из них по монете. При каких k Вася такими операциями сможет при любом исходном раскладе уравнять

- **7.** Натуральные числа a и b взаимно просты. По окружности длины a катится колесо длины b , в обод которого вбит гвоздь, оставляющий на окружности отметины.
 - а) Докажите, что в какой-то момент новые отметины перестанут появляться.
 - б) Докажите, что в этот момент отметины делят обод неподвижного колеса на равные части.
 - в) Пусть c — длина отрезка между двумя соседними отметинами. Докажите, что c — целое число.
 - г) Докажите, что $c = 1$.
- **8.** Микрокалькулятор умеет складывать, вычитать, находить по числу x число $1/x$ и запоминать любое количество промежуточных результатов вычислений. Докажите, что с его помощью можно из любого рационального числа получить любое другое рациональное число.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

- Основная идея: начинать изучение ММИ надо не с принципа математической индукции, а с рассмотренного на конкретных задачах живого *процесса индукции*:

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow \dots \rightarrow y_k \rightarrow y_{k+1} \rightarrow \dots,$$

а алгоритм решения задач с помощью ММИ получать как описание этого процесса.

- Визуализации процесса индукции: падение доминошек, ходьба по лестнице, застёжка-молния и т.п.
- «Волна доказательства».

Изучаем процесс индукции

- **Задача 1.** Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на "уголки" из трёх клеток.
 - «Подводные камни».
 - Рассмотреть более простую аналогичную задачу.
 - С чего начнёт ученик, и что подскажет ему учитель? 2×2 – «не задача»!
 - Ненавязчиво направляем на нужный путь (есть и побочные!).
 - Чем собственноручно выращенная цепочка лучше готовой чужой?
 - Почему тут не надо выпячивать принцип математической индукции?

Свёртка цепочек

- Как записать бесконечную цепочку утверждений в виде конечного текста?
- Что такое переменная? *Variable vs. placeholder.*
- Аналогия с циклом в информатике.
- Свёртка цепочки шагов перехода (спираль вместо прямой).
- Выгодность доказательства перехода в общем, свёрнутом виде.
- Диалектика наглядности и технологичности.

Ключевые задачи

Чтобы ученики усвоили ММИ, надо проиграть изложенный выше сценарий с некоторыми вариациями на нескольких задачах. Задачи, подходящие для этого, назовём *ключевыми*. Требования к ним таковы.

- **1.** Ключевая задача должна *иметь оптимальную сложность*: слишком простая задача подрывает доверие к ценности метода, а слишком сложная отвлекает от его основной идеи. Иными словами, решение ключевой задачи должно представлять для ученика известную трудность, и основная часть этой трудности должна быть связана с сущностью изучаемого метода.
- **2.** Для демонстрации процесса индукции ключевая задача должна *легко разворачиваться в ряд аналогичных утверждений, занумерованных натуральными числами, причём сами эти утверждения тоже не должны быть тривиальными* – иначе получится как с задачей про разрезание квадрата 2×2 на уголки.
- **3.** Ключевая задача должна *иметь индукционное решение, где по нескольким шагам перехода легко восстанавливается вся их цепочка*.
- **4.** Ключевая задача должна *быть интересной ученикам*. «Учитель должен вести себя как коммивояжёр, желающий продать ученикам немного математики.» (Д. Пойя)
- **5.** Желательно *отсутствие побочных решений*. Если они есть – надо уметь незаметно отвлекать от них.

Коллекция ключевых задач

- **Задача 2.** Докажите, что число $111\dots111$ (243 единицы) делится на 243.

Общий факт: число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n . База: $n = 1$.

«Подводные камни»: «признак» делимости на 27 и «если число делится на 3 и на 9, то оно делится на 27». Нужный тип перехода: число из 3^{k+1} единиц делим на число из 3^k единиц и получаем частное, делящееся на 3.

- **Задача 3.** (Игра "Ханойская башня") У Пети есть детская пирамидка из n колец и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что Петя сможет, не нарушая правил, переложить все кольца на один из пустых стержней.
- **Задача 4.** Докажите, что для каждого натурального числа n , начиная с $n = 4$, найдётся выпуклый n -угольник, имеющий ровно три острых угла.

Первый пример *построения по индукции*. Самый выгодный способ доказательства перехода – «отпилить» тупой угол. Есть побочные решения, от которых надо отвлечь.

- **Задача 5.** На плоскости проведены несколько прямых. Докажите, что куски, на которые они разбивают плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые два имеющих общий участок границы куска были покрашены в разные цвета.

Нет явно заданной индукционной переменной, вначале надо её ввести.

РАБОТА С КЛЮЧЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ

- **Первый этап.** Построение цепочек утверждений и доказательств, свёртка цепочек утверждений (а в более сильном кружке – и цепочек шагов индукции). *Цель – понять суть процесса индукции.*
- **Второй этап.** Задача дается в общем виде и разворачиваются в цепочку утверждений. *Цель – окончательно отработать связь между цепочкой утверждений/доказательств и предложением/рассуждением с натуральной переменной.*
- **Третий этап.** Задача и теорема о переходе сразу формулируются и доказываются в общем виде. Рассматриваются построение по индукции и задача со скрытой индукционной переменной.

Число разбираемых задач зависит от силы кружка. С более сильными детьми задач требуется меньше и этапы можно частично объединять.

Обсудив аналогию между разобранными задачами, переходим к составлению общего плана решения задач методом матиндукции.

ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ МАТИНДУКЦИИ

- Найдите в условии задачи ряд однотипных утверждений (U_1, U_2, \dots) - развёрнутый или свёрнутый в предложение с принимающей натуральные значения переменной (она называется *индукционной переменной* или *параметром индукции*). Переменная может быть скрыта словами типа "несколько". Тогда выявите её, переделав формулировку условия. Если ряда утверждений в условии нет, попробуйте вырастить его так, чтобы утверждение задачи оказалось в его составе.
- Докажите первое утверждение ряда (оно называется *базой индукции*).
- Докажите, что из каждого утверждения ряда вытекает следующее за ним, или говоря более формально, что при всяком натуральном k из утверждения U_k вытекает утверждение U_{k+1} . Эта теорема называется *индукционным переходом*, а её посылка U_k - *индукционным предположением*. В развёрнутом виде переход представляет собой цепочку однотипных теорем (рис.1), называемых его *шагами*.
- Если база и переход доказаны, то доказаны и все утверждения ряда, ибо от первого из них можно по шагам перехода дойти до любого из остальных.

Последний пункт одинаков для всех задач, и обычно его явно не проговаривают. Но иметь его в виду необходимо.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

- Последний пункт плана – это принцип математической индукции. Он представляется наглядно очевидным, и обсуждение его содержания стоит отложить до времени, когда метод будет твердо усвоен, а ученики – готовы к обсуждению тонкостей аксиоматики.
- Обычно не проговаривают явно и первый пункт плана - поиск ряда однотипных утверждений. Для тех, кто хорошо овладел ММИ, это оправдано. Но с начинающими необходимо проговаривать его, пока метод не будет твёрдо усвоен по крайней мере для доказательства тождеств.
- План должен составляться при как можно более активном участии учеников.

ИНДУКЦИЯ «ОТ ВСЕХ ПРЕДЫДУЩИХ К СЛЕДУЮЩЕМУ»

- **Задача 6.** Всякое натуральное число раскладывается на простые множители.
- **Задача 7.** В графе степени всех вершин не превосходят натурального числа d , и есть вершина, степень которой меньше d . Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в d цветов (то есть так, чтобы любые две вершины, связанные ребром, были разноцветными).

Если волна доказательства дошла до утверждения Y_n , то она прошла все предыдущие. Значит, при доказательстве утверждения Y_n можно пользоваться не только утверждением Y_{n-1} , но и всеми Y_k , где $k < n$.

Вносим соответствующую поправку в план решения задачи методом матиндукции. А можно разобрать подобную задачу до составления плана и потом сразу составить его для этого более общего варианта ММИ.

КЛАССИЧЕСКИЕ ОШИБКИ

- *Каждое натуральное число равно предыдущему.*

Ну в самом деле, если $n-1 = n-2$, то и $n = n-1$.

- *Все точки конечного множества на плоскости лежат на одной прямой.*

База – для одной или двух точек – очевидна. Обсудим переход...

- *Все графы без изолированных вершин связны.*

Будем вести индукцию по числу вершин. Для двух вершин всё очевидно: по условию они соединены ребром. Пусть утверждение доказано для k вершин. Добавим к ним ещё одну. По условию она должна быть связана ребром с одной из предыдущих, так что связность сохранится.

Последняя ошибка – некорректная индукция – особенно опасна: сделавшему её ученику бывает очень трудно объяснить, почему он неправ. Тут разобранный пример может очень пригодиться.

ММИ И ДОГАДКА ПО АНАЛОГИИ

- **Задача 8.** *На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и пересекающихся по три в одной точке?*

Здесь натуральная переменная n задает ряд не утверждений, а вопросов. Чтобы применять ММИ, надо сначала выдвинуть гипотезу, каковы ответы. Сделать это помогает разбор вручную маленьких значений n и наблюдение за получающимися закономерностями.

После разбора такой задачи естественно дополнить первый пункт план решения задач методом матиндукции:

Если в Вашей задаче вместо ряда аналогичных утверждений имеется ряд аналогичных вопросов, получите ряд утверждений, заменив вопросы предполагаемыми ответами. Их можно угадать, "поэкспериментировав" с первыми вопросами ряда. Но, угадав ответы, не забудьте их обосновать.

ДОГАДКА: ПРЕКРАСНАЯ И ОПАСНАЯ

- Догадка по аналогии наряду с другими правдоподобными рассуждениями - важнейшая составляющая процесса познания.

Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения.

- Примеры, когда напрашивающаяся догадка оказывается неверной:
 - **Задача 9.** Верно ли, что число n^2+n+41 – простое при любом натуральном n ?
 - **Задача 10.** На окружности отметили n различных точек и соединили их попарно всевозможными отрезками. Оказалось, что никакие три из этих отрезков не пересекаются в одной точке. На сколько частей они делят круг?
- Догадка по аналогии = «неполная индукция».
- Путаница с терминологией: индукция *неполная*, *полная* и *математическая*, где две последние дедуктивны. Правильная

ТОЖДЕСТВА И ММИ

- Достоинства тождеств как задач на отработку ММИ:
 - близость к школьной программе;
 - относительная простота доказательства перехода.
- Недостатки:
 - тождество с одной натуральной переменной *не воспринимается естественным образом как ряд утверждений*;
 - простые числовые равенства, именно в силу своей простоты, не воспринимаются учениками как самостоятельные, подлежащие доказательству утверждения;
 - в отличие от параметра-номера, *параметр-переменная* (входящая в формулу или условие задачи) *не создаёт достаточно наглядного образа ряда утверждений*.
 - не удастся провести переход «по шагам»: здравый рассудок инстинктивно сопротивляется выведению друг из друга равенств, которые проще проверить непосредственным вычислением;
 - трудно сформулировать теорему о переходе «в буквах»: смешиваются две переменных – параметр индукции n и место k , до которого дошла волна доказательства.
- **Тождества не являются ключевыми задачами на ММИ. Они хороши для отработки метода, когда его суть уже усвоена.**

КЛАССИЧЕСКАЯ ТРИАДА

- **Тождества, делимость, неравенства.**
- Сумма первых n нечетных чисел. Сумма первых n квадратов. Сумма слагаемых вида $1/k(k+1)$.
- При любом натуральном n : $3^{2n+2}+8n-9$ делится на 16; $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133; $3^{\{3^n\}}$ делится на 3^{n+1} .
- При любом натуральном n $2^n > n$. Неравенство Бернулли.

ДРУГИЕ ВЕРСИИ ММИ

База из нескольких утверждений.

- **Задача 11.** Докажите, что если $x+1/x$ – целое число, то и число x^n+1/x^n целое при любом натуральном n .
- **Задача 12.** Докажите, что для каждого натурального n , начиная с $n=8$, существует многогранник, имеющий ровно n рёбер.

Ветвящаяся индукция.

- **Задача 13.** Докажите, что 2^{m+n-2} не меньше, чем mn при любых натуральных m и n .
- **Задача 14.** Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

МЕТОД МИНИМАЛЬНОГО КОНТРПРИМЕРА

Рассматриваем неверное утверждение с минимальным номером и получаем противоречие с минимальностью.

- **Задача 15.** Решите задачи 6 и 7 методом минимального контрпримера.

В основе метода минимального контрпримера лежит *принцип наименьшего числа*: в любом непустом подмножестве натурального ряда есть наименьшее число. Этот принцип равносильен принципу математической индукции.

ПОНЯТИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сергей Юрский выделял два стиля повествования:

- *чеховский* - действие развивается последовательно, внимательный зритель в каждый момент всё понимает;
- *достоевский* – за открывшимся занавесом уже вовсю идёт жизнь, и зритель постепенно разбирается в интриге.

Мы рассмотрим и сравним «чеховский» и «достоевский» листки, посвящённые понятию отображения.

