

Законы сохранения в механике

Физтех-2017

*Алексей Гуденко
доцент МФТИ*

План

- ЗСИ, реактивная сила
 - Упругие столкновения, решение в СЦМ
 - Подвижные/неподвижные горки
 - Нецентральный удар. Векторные диаграммы
 - Упругие/неупругие столкновения: приведённая масса
 - Бозон Хиггса
-

Задача 1

Качение трубы по плоскости с перегибом

- Тонкостенная труба радиуса r катится по горизонтальной поверхности, которая переходит в наклонную плоскость, составляющую угол θ с горизонтом. Найти максимальную скорость цилиндра v_0 , при которой он перейдет на наклонную плоскость без скачка. При каком угле $\theta_{кр}$ переход без скачка невозможен? Скольжения нет.

□ **Решение.**

План решения:

1. моделируем переход дугой радиуса R с центральным углом θ ,
2. Делаем предельный переход $R \rightarrow 0$.

- Энергию отсчитываем от положения ЦТ в момент выхода на наклонную плоскость, тогда вначале $h = (R + r)(1 - \cos\theta)$.
ЗСЭ:

$$E = mgh + mv_0^2 = mv^2$$

Условие движения без отрыва (N зануляется в конце дуги):
 $mg\cos\theta = mv^2/(R+r) \rightarrow$

■ $v_0^2 = g(R + r)(2\cos\theta - 1) \rightarrow gr(2\cos\theta - 1)$

■ $V_0 = 0$ при $\cos\theta = 1/2 \rightarrow \theta_{кр} = 60^\circ$

Задача 2

Сила тяги реактивного самолёта

□ Двигатель реактивного самолёта, летящего со скоростью $v = 720$ км/час, за 1 с засасывает воздух массой $\mu_{\text{в}} = 100$ кг/с, расходует топливо $\mu_{\text{г}} = 4$ кг/с и выбрасывает продукты сгорания массой $\mu_{\text{в}} + \mu_{\text{г}} = 104$ кг/с со скоростью $u = 500$ м/с относительно самолёта. Какова сила тяги и полезная мощность двигательной установки самолёта.

□ Решение

- При засасывании воздух приобретает скорость самолёта - на самолёт действует «тормозящая» реактивная сила $F_1 = \mu_{\text{в}}(-v) = -\mu_{\text{в}}v$ - знак «-» означает, что эта сила действует против движения самолёта, тормозит самолёт.
- При выбросе продуктов сгорания на самолёт реактивная сила, действующая в направлении его движения, $F_2 = (\mu_{\text{в}} + \mu_{\text{г}})u$.
Результирующая сила тяги $F = F_1 + F_2 = (\mu_{\text{в}} + \mu_{\text{г}})u - \mu_{\text{в}}v = 32$ кН.
Мощность $P = Fv = 6,4$ МВт ≈ 9000 л.с.

(1 л.с. $\approx 735,5$ Вт)

Задача 3

Задача о рыбаке и лодке-1

- Рыбак массы $m = 80$ кг переходит с кормы на нос лодки длиной $L = 5$ м и массой $M = 320$ кг. На какое расстояние относительно земли при этом сместятся лодка и рыбак? Считайте, что вода не оказывает сопротивление движению лодки.

□ **Решение**

- Центр масс системы рыбак-лодка остаются на месте:
 $m x_p + M x_l = \text{const} \rightarrow m \Delta x_p + M \Delta x_l = 0$
- Относительное перемещение:
 $\Delta x_p - \Delta x_l = L$

$$\Delta x_p = LM/(m + M) = 4/5 L = 4 \text{ м}$$

$$\Delta x_l = -Lm/(m + M) = -1/5 L = -1 \text{ м}$$

Задача 4

Задача о рыбаке и лодке-2

□ **+ небольшое вязком трении.**

Рыбак массы $m = 80$ кг переходит с кормы на нос лодки длиной $L = 5$ м и массой $M = 320$ кг. При этом на лодку со стороны воды действует небольшая сила вязкого сопротивления, пропорциональная скорости лодки u . На какое расстояние относительно земли сместятся лодка и рыбак к моменту прекращения их движения?

□ **Решение**

$$m\Delta v_i + M\Delta u_i = F_{\text{внешн } i} \Delta t_i = -\beta u_i \Delta t_i = -\beta \Delta x_i \rightarrow$$
$$m\Delta v_p + M\Delta u_l = -\beta \Delta x_l = 0 \text{ — лодка осталась на месте! } \rightarrow$$

Рыбак переместился на $\Delta x_p = L = 5$ м

Упругий удар. Решение в СЦМ

- В СЦМ скорость не изменяется по величине; изменяется только её направление
 - относительная скорость тел при упругом столкновении изменяется только по направлению
-

Упругое лобовое столкновение: СЦМ

□ В СЦМ ответ пишем сразу:

$$V_{01}' = V_{01} - V_C \rightarrow V_1' = -V_{01}' \rightarrow$$

- $V_1 = -V_{01} + 2V_C = [V_{01}(m_1 - m_2) + 2m_2V_{02}]/(m_1 + m_2)$
- $V_2 = [V_{02}(m_2 - m_1) + 2m_1V_{01}]/(m_1 + m_2)$

□ предельные и частные случаи:

1) $v_{02} = 0 \rightarrow$

- $V_1 = [V_{01}(m_1 - m_2)]/(m_1 + m_2)$
- $V_2 = 2m_1V_{01}/(m_1 + m_2)$

2) $m_2 \gg m_1$

- $V_1 = -V_{01} + 2V_{02}$
 - $V_2 = V_{02} + [(2V_{01} - 2V_{02})m_1]/(m_1 + m_2)$
-

Задача 5

Упругое столкновение шарика с пробиркой

- По гладкой горизонтальной поверхности со скоростью u_0 движется пробирка длиной L и массы M (u_0 направлена вдоль оси пробирки). На встречу к пробирке вдоль её оси со скоростью v_0 движется шарик массы m . Через какое время после «влёта» шарик выскочит из пробирки?
 - **Решение**
относительная скорость при упругом ударе не изменяется \rightarrow
 $t_1 = t_2 = L/v_{\text{отн}} \rightarrow t = 2t_1 = 2L/v_{\text{отн}} = 2L/(v_0 + u_0)$
-

Задача 6

Шарик в прямоугольной рамке

- На горизонтальной гладкой поверхности находится прямоугольная рамка массы M , длина большей стороны которой равна l . Внутри рамки находится небольшой шарик массы m . В некоторый момент шарик и рамке сообщают скорости v_0 и u_0 , соответственно, так, что они движутся навстречу друг другу. Скорости параллельны длинной стороне рамки. Найти время между ударами шарика об одну и ту же короткую сторону.
 - Решение
Ответ: $\tau = 2l/(v_0 + u_0)$
-

Задача 7

Нить в трубке

- Внутри U-образной трубки массой M , находящейся на горизонтальном столе движется нерастяжимая нить массой m . В начальный момент в каждом колене находилось по половине нити, а сама трубка двигалась. При этом скорость одного конца нити A равнялась v_0 , а другой конец B покоился. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из неё? Считайте радиус кривизны трубки небольшой, а нить движется только вдоль прямолинейных участков. Трения нет.

□ **Решение**

(В системе, в которой трубка вначале покоится: полный импульс = 0! →

ЗСИ:

$$0 = mv' + Mu'$$

Энергия: каждая половинка вначале движется со скоростью $v_0/2$

$$\rightarrow E_0 = \frac{1}{2} m(v_0/2)^2 \rightarrow$$

ЗСЭ:

$$mv_0^2/8 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} Mu'^2 \rightarrow u' = -m/(m(M + m))^{1/2} v_0/2 \rightarrow$$
$$u = v_0/2 + u' = v_0/2 (1 - m/(m(M + m))^{1/2}).$$

Задача 8

Монета в тарелке

□ На гладком горизонтальном столе покоится глубокая тарелка массы M , на дне которой покоится монета массы $m = 1/5 M$. Тарелку резко толкают в горизонтальном направлении так, что монета сразу после удара ещё не движется. В процессе дальнейшего движения монета поднимается по стенке тарелки на максимальную высоту h . Найдите максимальное и минимальное значение скорости тарелки при движении. Трения в системе нет, монета при движении от внутренней поверхности тарелки не отрыватся.

□ Решение

■ $\mu v_0^2/2 = mgh \rightarrow$
 $V_{max} = v_0 = (12gh/5)^{1/2},$

■ $v_{min} = (M - m)v_0 / (M + m) = 2/3 v_0 = (16gh/15)^{1/2}$

Задача 9

Тяжёлая тележка на лёгком клине

- На лёгком клине массы m с углом наклона $\alpha = 45^\circ$ при основании находится приклеенная к нему на высоте h тяжёлая тележка массы $M = 10m$. Тележка отклеивается и съезжает. Найдите скорость клина перед тем, как тележка его покинет.

□ **Решение**

■ ЗСЭ: $Mv^2/2 + mu^2/2 = Mgh$

■ ЗСИ: $mu = Mv\cos\varphi$

■ Кинематика: $v\cos\varphi + u = v'\cos\alpha$

$$v\sin\varphi = v'\sin\alpha \rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\varphi = (1 + M/m)\operatorname{tga} = 11 \rightarrow \cos^2\varphi = 1/122 \rightarrow$$

$$u = (50gh/33)^{1/2};$$

$$v = (61/66)^{1/2} (2gh)^{1/2}$$

Задача 10

Снаряд вылетает из пушки

- Из орудия массой M , отскакивающее при отдаче без трения, производят выстрел снарядом массой m . Снаряд вылетел под углом α к горизонту. Под каким углом β установлен ствол орудия?
 - **Ответ:**
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha / (1 + m/M)$$
-

Максимальный угол рассеяния.

Метод векторных диаграмм

□ Максимальный угол рассеяния.

Каков максимальный угол θ рассеяния α -частицы и дейтрона при упругом рассеянии на покоящемся атоме водорода?

□ Решение

Из векторной диаграммы:

- $\sin\theta_{\max} = m/M = 1/4$ - для α -частицы
 - $\sin\theta_{\max} = m/M = 1/2$ - для дейтрона
-

Задача 11

Рассеяние движущихся частиц. Обе частицы движутся

- Две частицы с массами m и M ($M > m$) движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжёлая частица отклоняется от своего первоначального направления движения на угол $\alpha = 30^\circ$ в лабораторной системе или на угол $\beta = 60^\circ$ в СЦМ. Найти отношение M/m .
- **Решение**
- скорость ЦМ: $V_c = (M - m)v_0 / (M + m)$
относительная скорость тяжёлой частицы: $v_{0M}' = v_0 - V_c = 2mv_0 / (M + m)$
 - из векторной диаграммы:
 $V_c = v_{0M}' \rightarrow (M - m)v_0 / (M + m) = 2mv_0 / (M + m) \rightarrow$
 - $M/m = 3$

Задача 12

Максимальный угол рассеяния. Обе частицы движутся

- Два шарика с массами m и $M = 4m$ движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжёлый шарик отклоняется на максимально возможный угол при таком столкновении. Найти этот угол.

□ **Решение**

- скорость ЦМ: $V_c = (M - m)V_0 / (M + m) = 3/5 V_0$
относительная скорость тяжёлой частицы:
 $v_{0M}' = v_0 - V_c = 2/5 V_0$
 - из векторной диаграммы:
 $\sin \theta_{\max} = 2/3 \rightarrow \theta_{\max} \approx 41,80$
-

Задача 13

Рассеяние одинаковых частиц

□ Две одинаковые частицы, одна из которых неподвижная, испытывают упругое столкновение. Налетающая частица рассеивается на угол θ к направлению своего первоначального движения. Найти угол рассеяния γ этой частицы в СЦМ.

□ **Решение**

- Для одинаковых частиц $V_c = v_0'$ ($v_{02} = 0$)
 - Из вектоной диаграммы: $\gamma = 2\theta$
-

Задача 13

С какой скоростью и куда полетит легкая частица?

- Тяжёлая частица налетает со скоростью v_0 на лёгкую покоящуюся частицу и в результате упругого удара отклоняется на максимально возможный угол α : $\sin \alpha = 1/4$. С какой скоростью и под каким углом к \mathbf{v}_0 полетела лёгкая частица?

□ **Решение**

- Скорость тяжёлой частицы: $v = (3/5)^{1/2} v_0$
 - Скорость лёгкой частицы: $u = (v^2 + v_0^2)^{1/2} = 4/\sqrt{10} v_0$;
 - $\cos \theta = (5/8)^{1/2}$ ($\operatorname{tg} \theta = (3/5)^{1/2}$)
-

Задача 14

Моноэнергетичные лёгкие(тяжёлые) частицы

- При многократном проведении эксперимента по упругому рассеянию тяжёлой частицы с кинетической энергией K_0 на более лёгкой покоящейся частице было установлено, что при рассеянии тяжёлой частицы в некотором направлении лёгкие частицы регистрируются с единственным значением энергии $T = K_0/15$. Найти отношение масс тяжёлой и лёгкой частиц. Удар не центральный

□ **Решение**

- Скорость тяжёлой частицы: $v^2 = v_0^2(M - m)/(M + m)$
 - Кинетическая энергия: $K = Mv^2/2 = K_0(M - m)/(M + m) = K_0 - T \rightarrow$
 - $M/m = 2K/T - 1 = 29$
-

Неупругий удар. Приведённая масса



Задача 1

Шары массами 1 кг и 2 кг движутся навстречу друг другу со скоростями 1 м/с и 2 м/с соответственно. Найдите, сколько теплоты выделится при неупругом ударе этих шаров?

Ответ: $Q = m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2 / 2(m_1 + m_2) = 3$ Дж



Задача 2

Два куска пластилина массами m_1 и m_2 , летящие со скоростями v_1 и v_2 , слипаются. Какое количество теплоты Q выделится в результате абсолютно неупругого соударения, если скорости кусков взаимно перпендикулярны?

Ответ: $Q = \mu(v_1^2 + v_2^2)/2$



Задача 3

Вагон массой m_1 , движущийся по горизонтальному пути, догоняет другой вагон массой m_2 и сцепляется с ним. В результате неупругого столкновения механическая энергия вагонов уменьшается на ΔK . С какой скоростью сокращалось расстояние между вагонами перед сцепкой?

Ответ: $v_{\text{отн}} = v_2 - v_1 = (2(m_1 + m_2)\Delta K / m_1 m_2)^{1/2}$

Задача 15

Доска с упором

- На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска длиной 1 м, на одном конце которой закреплён вертикальный упор. Какую минимальную скорость надо сообщить маленькому бруску, лежащему на другом конце доски, чтобы после абсолютно упругого удара об упор брусок вернулся назад и упал с доски? Масса доски в 8 раз больше, чем масса бруска, а коэффициент трения между ними 0,2.
 - **Ответ:** $v_0 = (4\mu gl(1 + m/M))^{1/2} = 3 \text{ м/с}$
-

Задача 16

Пороговая энергия

- Может ли произойти ионизация атома цезия ^{133}Cs ударом атома кислорода ^{16}O с энергией $E_0 = 4$ эВ? Энергия ионизации $E_i = 3,9$ эВ
- **Решение**
- $Q = E_i = P^2/2m - P^2/2(m + M) = K_{\text{порог}} M/(m + M) \rightarrow$
 - Минимальная энергия, при которой пройдёт ионизация: $K_{\text{порог}} = Q(1 + m/M) = 3,9 (1 + 16/133) = 4,37$ эВ > 4 эВ – ионизация не произойдёт
-

Бозон Хиггса (*Higgs decay*)

- В экспериментах 2011 – 2012 гг. на Большом адронном коллайдере (ЦЕРН, Женева) в протон-протонных столкновениях была открыта частица, напоминающая по своим свойствам на Бозон Хиггса, предсказанный в 1964 году. В соответствии с выводами Стандартной модели был обнаружен распад бозона Хиггса на два фотона, причём энергии этих фотонов оказались равными $E_1 = 70$ ГэВ и $E_2 = 92$ ГэВ. Угол разлёта фотонов составил $\alpha = 103^\circ$. Найти массу бозона Хиггса.

- **Решение**

- ЗСЭ: $E_H = E_1 + E_2;$

- ЗСИ: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \rightarrow$

- $E_0 = E_H^2 - p^2 c^2 = 2E_1 E_2 (1 - \cos\theta)^{1/2} = 125,6$ ГэВ
