Тема урока:

«Капризная формула»

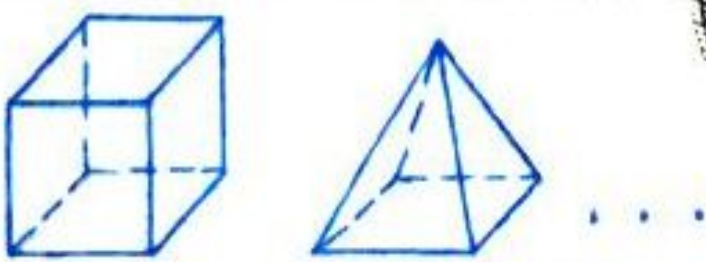
Цель: доказать и исследовать формулу Эйлера для произвольных многогранников, рассмотреть условия ее существования и применения.

Выпуклые многогранники

№	Наименование многогранника	В	Р	Г	Эйлерова характеристика (В – Р + Г)
1	*Куб*	8	12	6	8 – 12 + 6 = 2
2	*Тетраэдр*	4	6	4	4 -6 + 4 = 2
3	*Октаэдр*	6	12	8	6 – 12 + 8 = 2
4	*Четырехугольная призма*	8	12	6	8 – 12 + 6 = 2
5	*Четырехугольная пирамида*	5	8	5	5 – 8 + 5 = 2
6	*Треугольная призма*	6	9	5	6 – 9 + 5 = 2
7	*п - угольная призма*	$n+1$	$2n$	$n+1$	$(n+1) - 2n + (n+1) = 2$
8	*п – угольная пирамида*	$2n$	$3n$	$n+2$	$2n - 3n + (n+2) = 2$
9	*п – угольная усеченная пирамида*	$2n$	$3n$	$n+2$	$2n - 3n + (n+2) = 2$

1752 год

Теорема Эйлера о многогранниках

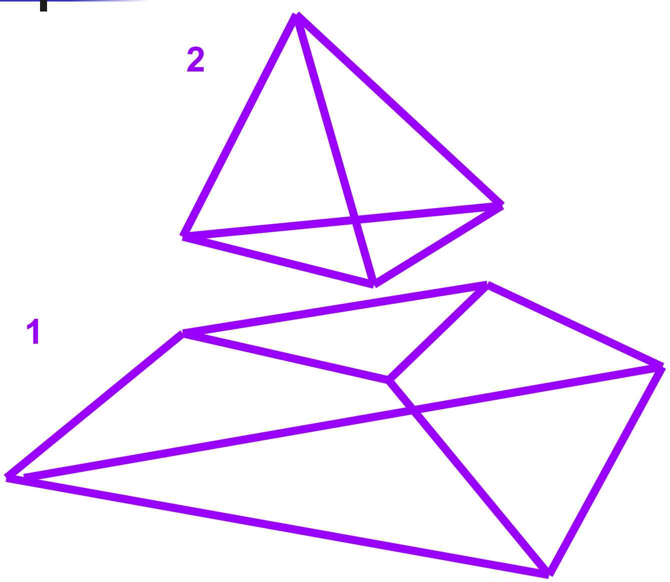


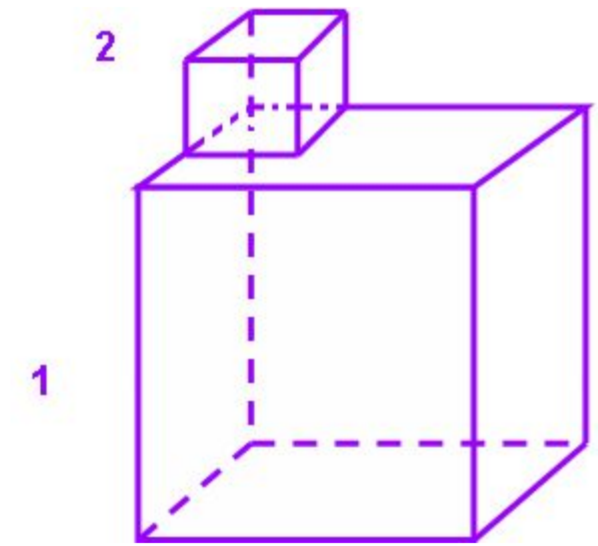
Число граней:	$n=6$	$n=5$
Число вершин:	$\ell=8$	$\ell=5$
Число ребер:	$k=12$	$k=8$

$$n+\ell=k+2$$

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Простое добавление





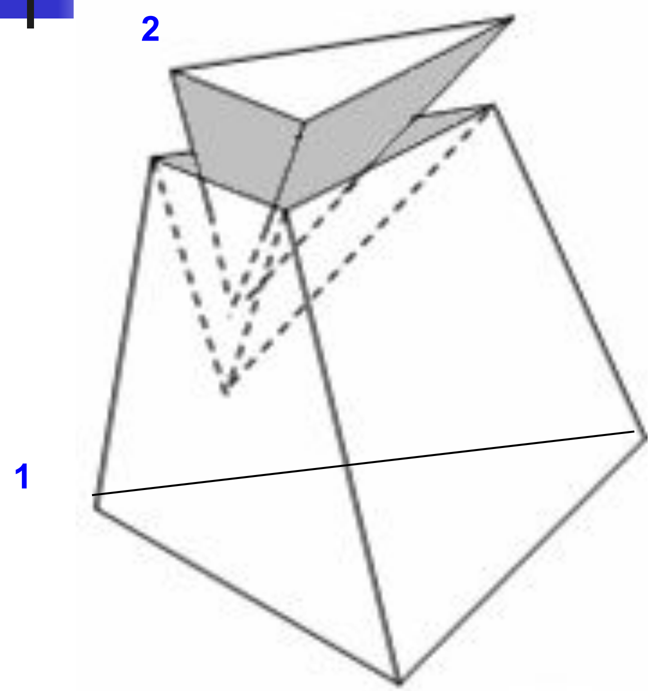
1: В – Р + Г $= 6 - 9 + 5 = 2$

(1 + 2): В – Р + Г $= 7 - 12 + 7 = 2$

1: В – Р + Г $= 8 - 12 + 6 = 2$

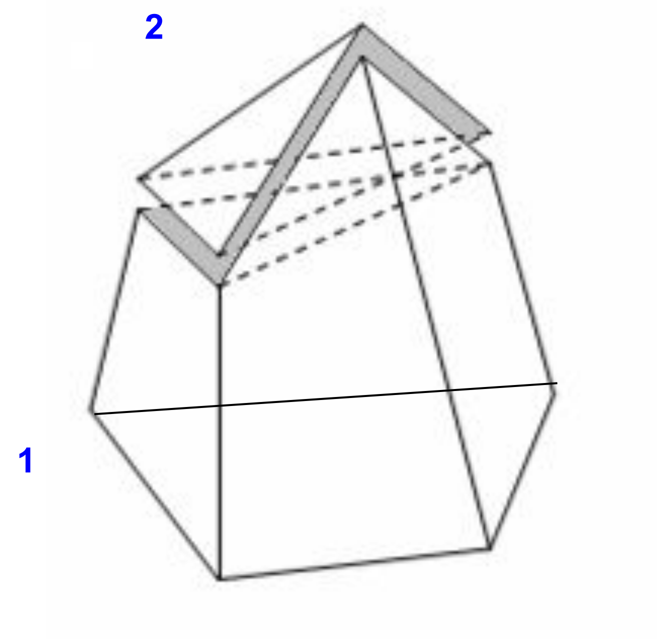
(1 + 2): В – Р + Г $= 14 - 21 + 9 = 2$

Сложное добавление



1: В – Р + Г = *7 –12+ 7 =2*

(1 + 2): В – Р + Г = *6 – 9 + 5 = 2*

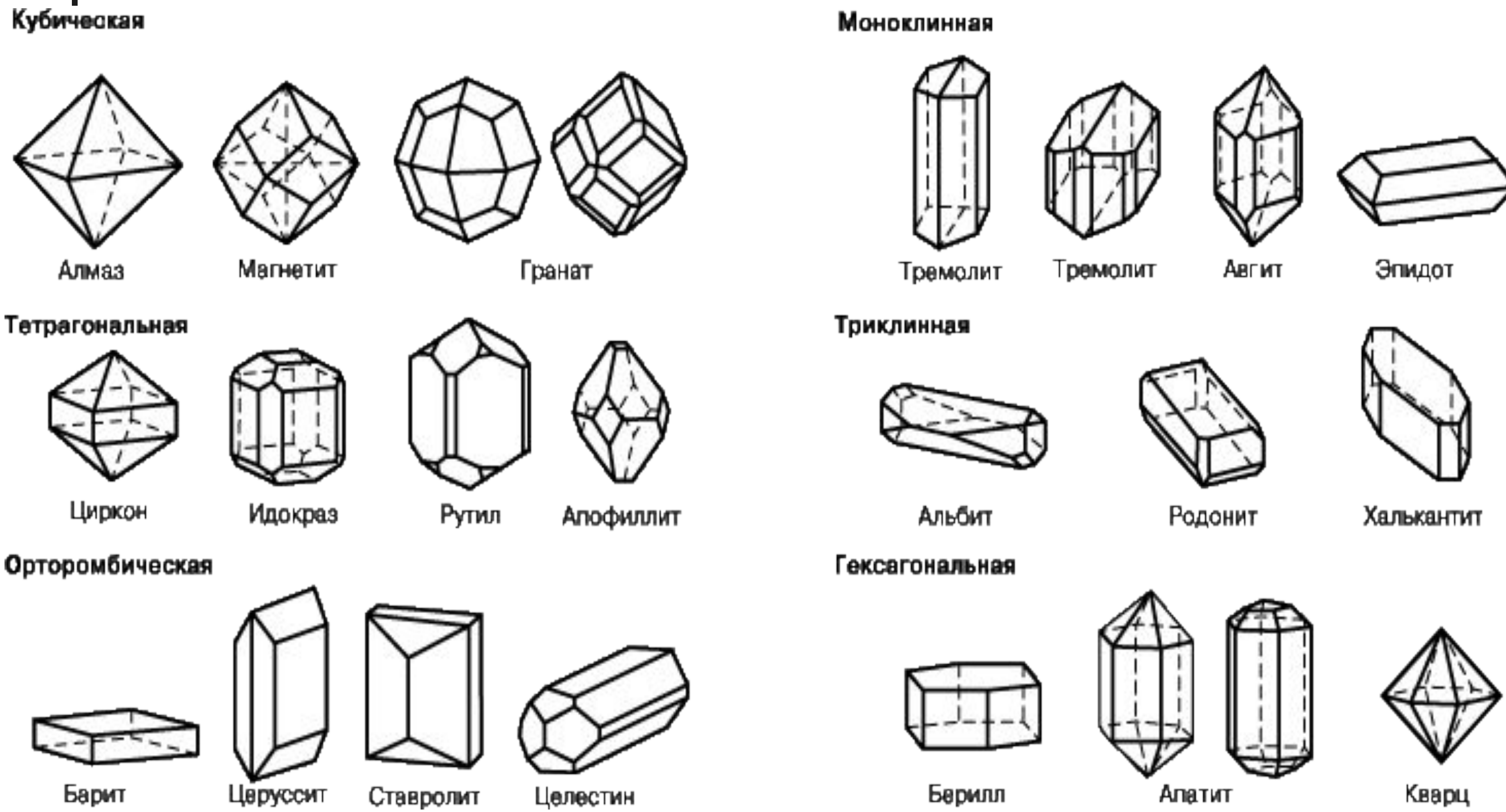


1: В –Р + Г = *8 – 13+ 7 =2*

(1 + 2): В – Р + Г = *8 – 13 + 7 = 2*

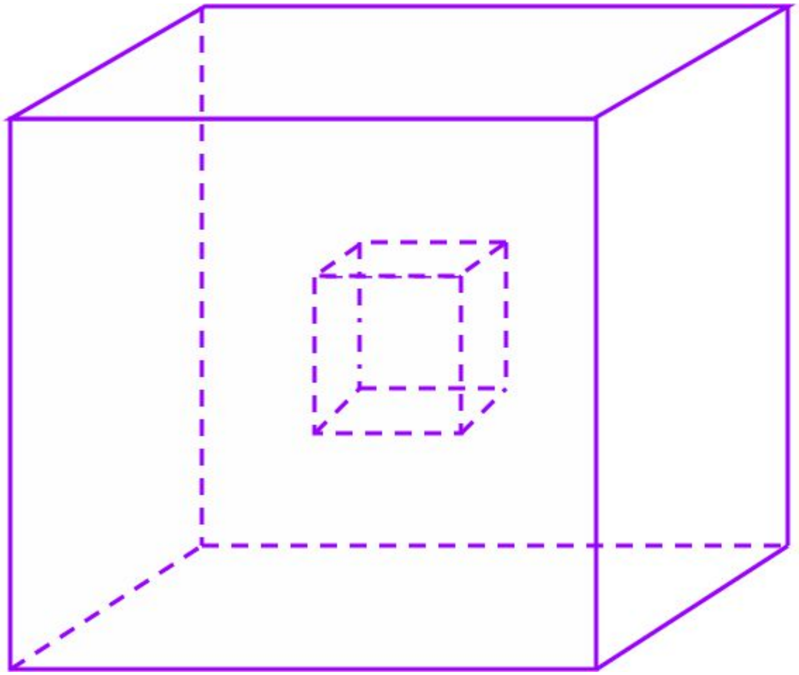
Многогранники в природе.

Кристаллы (др.греческое «кристаллос» - «лёд»)



«Полый куб»

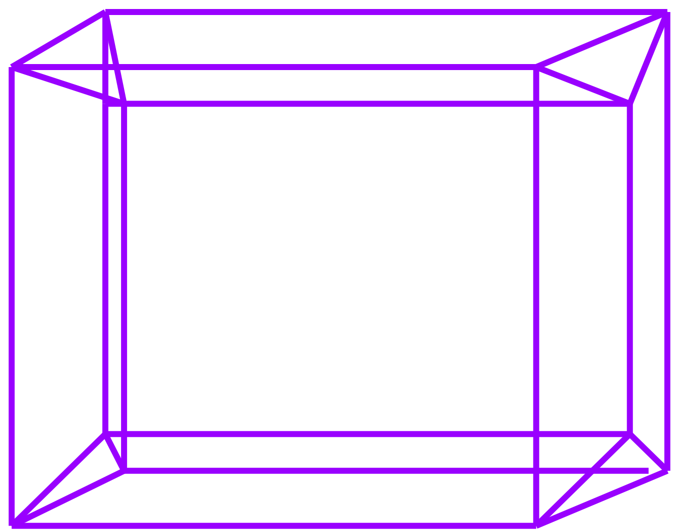
открыт швейцарским математиком Симоном Люилье



Кубик сернистого свинца внутри кристалла полевого шпата

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 16 - 24 + 12 = 4 \neq 2$$

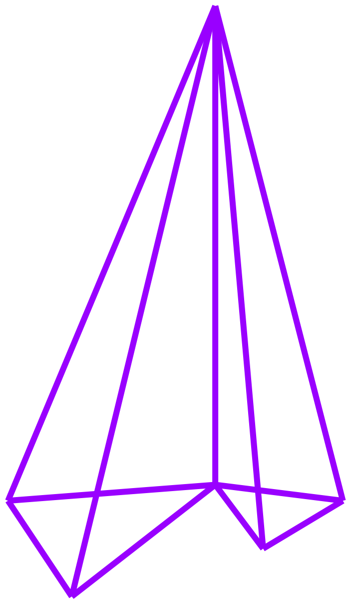
«Картинная рама»

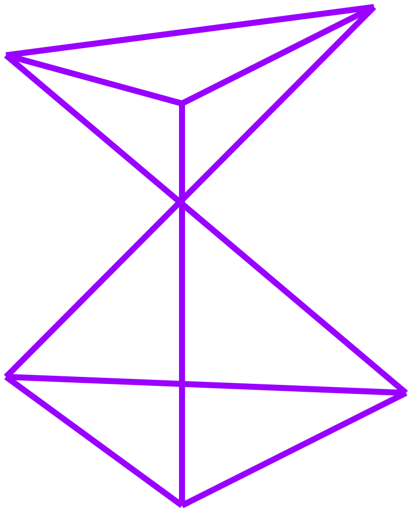


В – Р + Г = *12 – 24 + 12 = 0 ≠ 2*

Тетраэдры – близнецы

открыты немецким математиком Ф. Гесселем

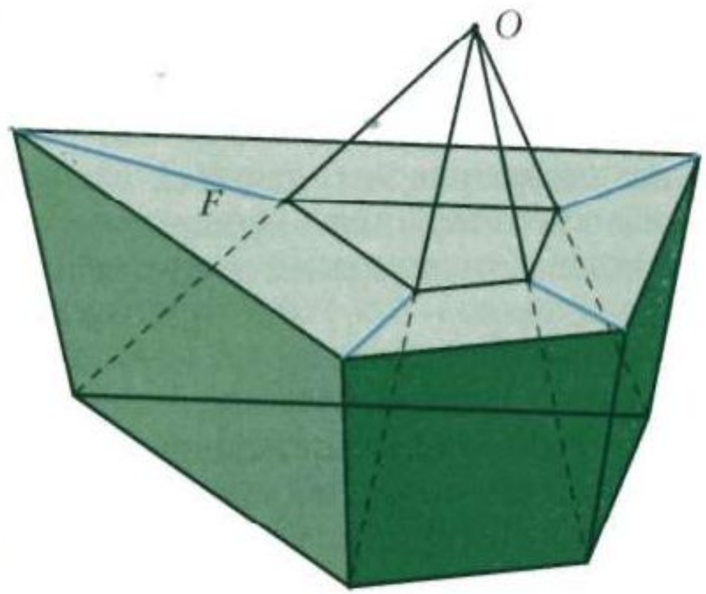




$В - Р + Г = 6 - 11 + 8 = 3 \neq 2$

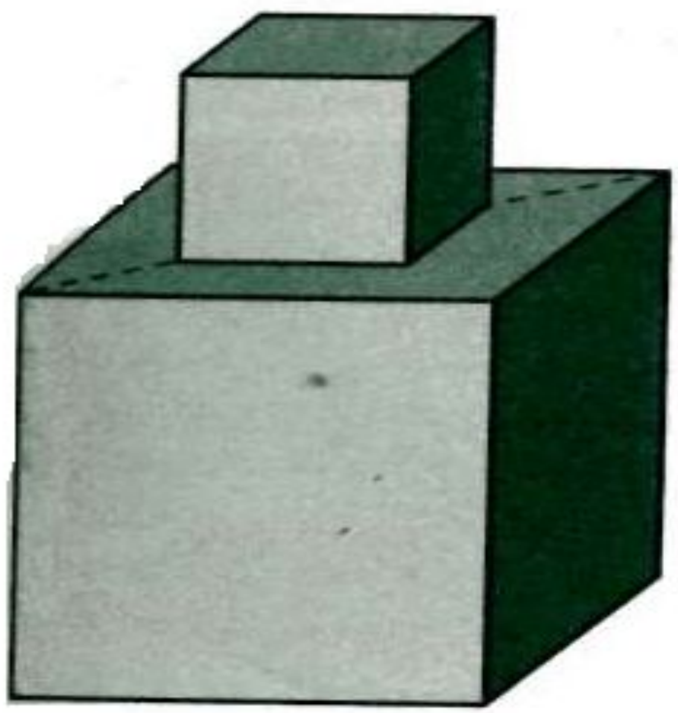
$В - Р + Г = 7 - 12 + 8 = 3 \neq 2$

«Коронованная призма»



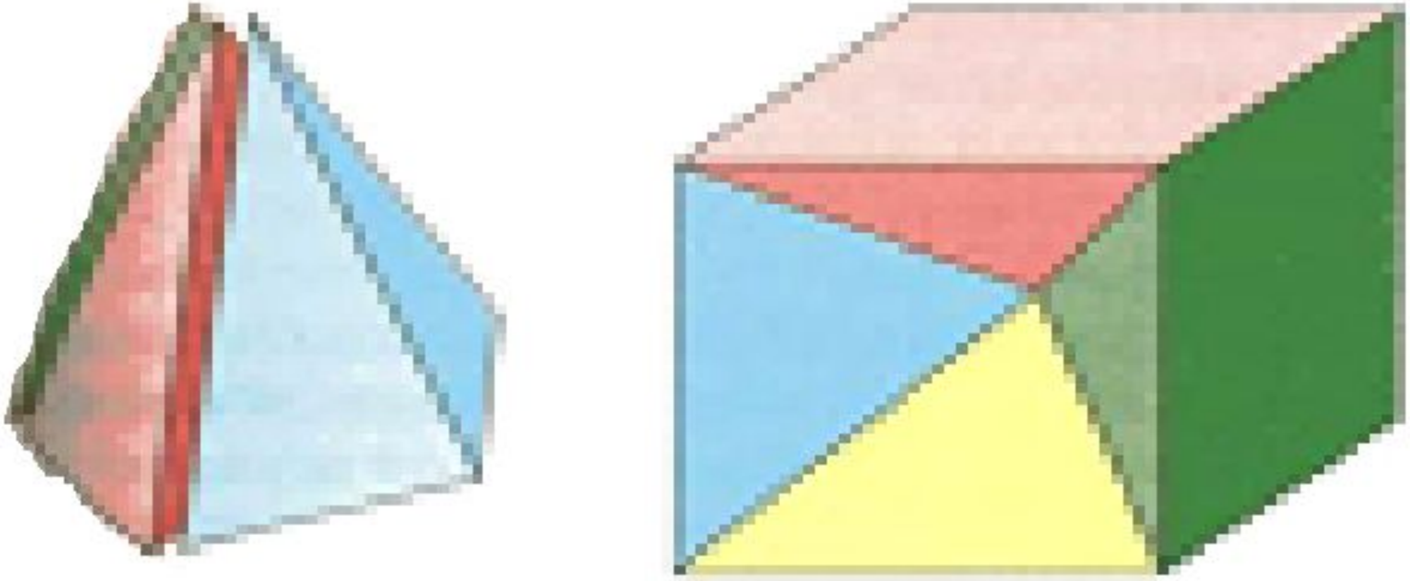
В – Р + Г= 13 – 20 + 10 = 3≠ 2

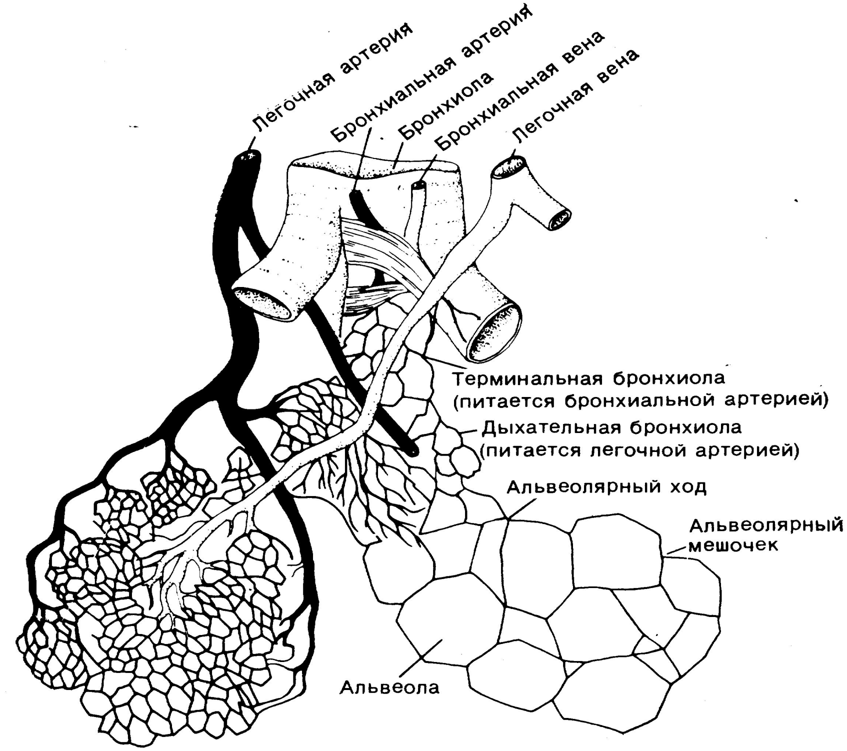
«Коронованный куб»



В – Р + Г = 16 – 24 + 11 =3≠ 2

Простые многогранники



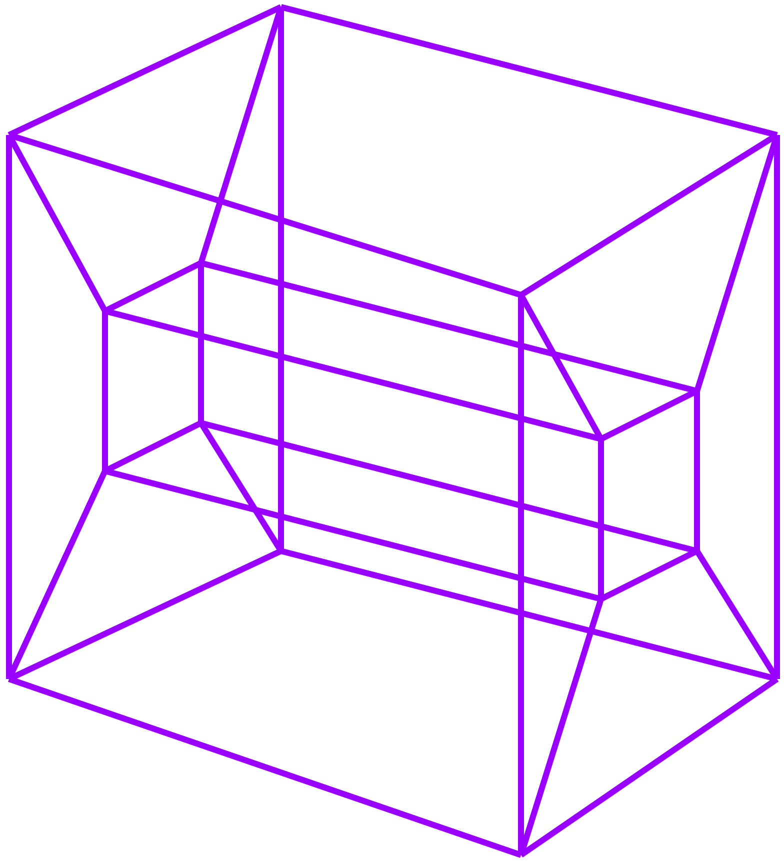


Кристалл кальцита

Египетские пирамиды

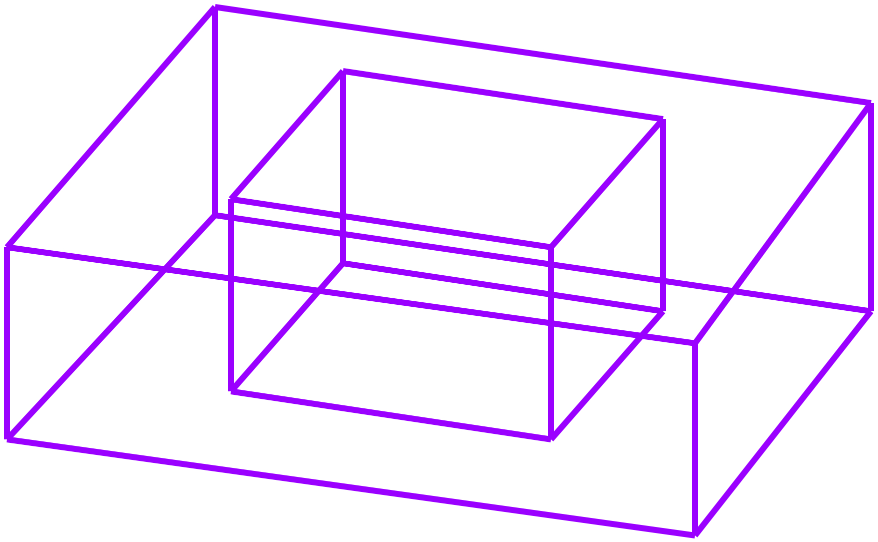


Простой многогранник I рода



В – Р + Г = ***16 – 32 + 16 = 0*** $\neq$ ***2***

«Эйлеров каприз»



$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 16 - 24 + 10 = 2$$

Условия выполнимости соотношения Эйлера в пространстве

Для всякого простого многогранника нулевого рода (нет «дыр»), справедливо

$$В - Р + Г = 2.$$

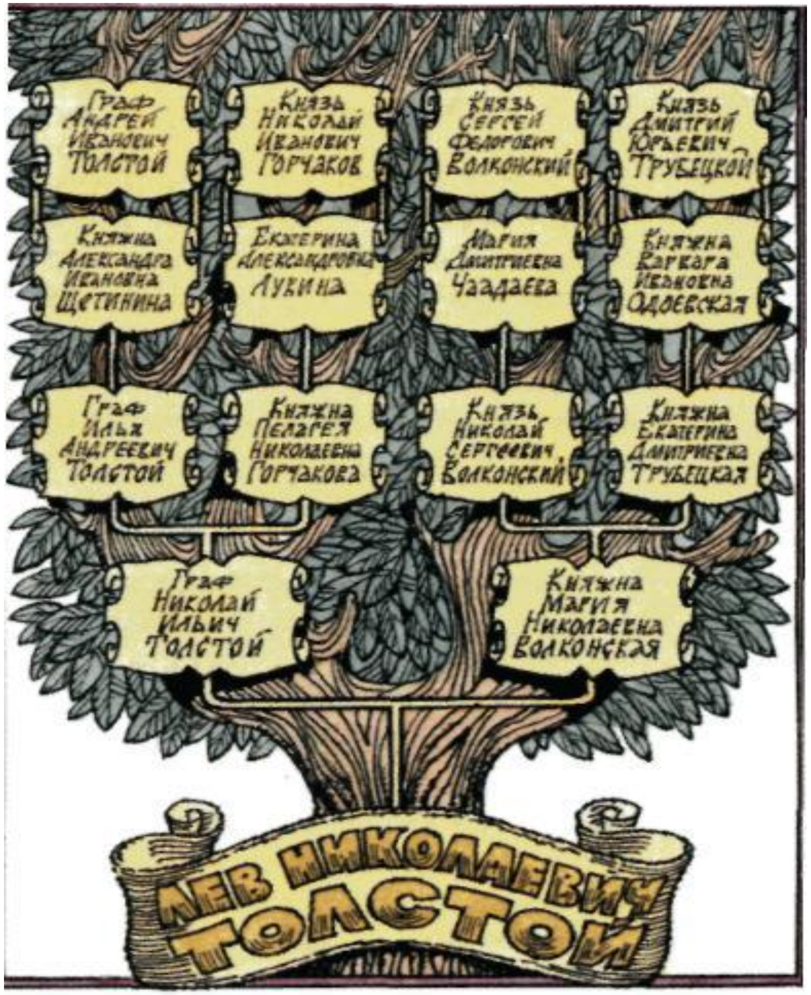
Теорема Эйлера – первая теорема топологии

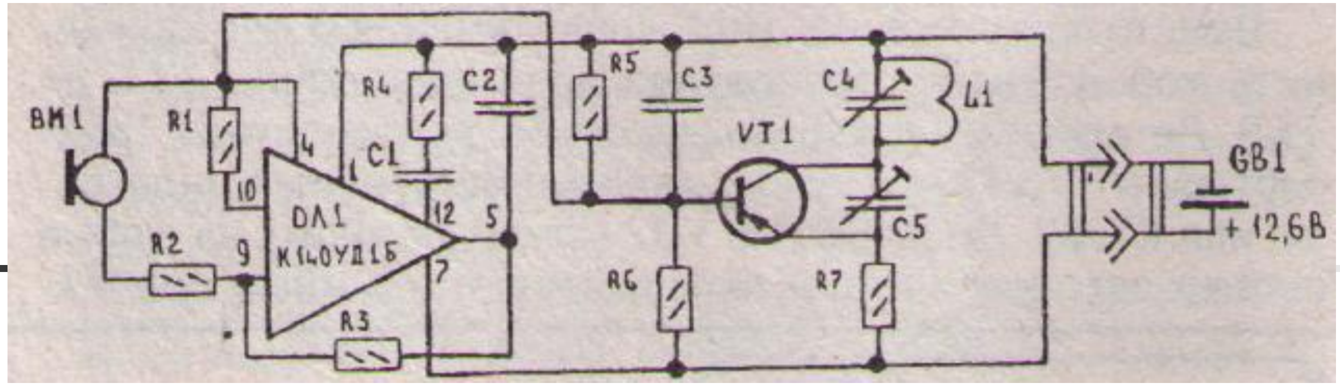
- Топология – раздел геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек.
- Соотношение Эйлера ***В – Р + Г = 2***

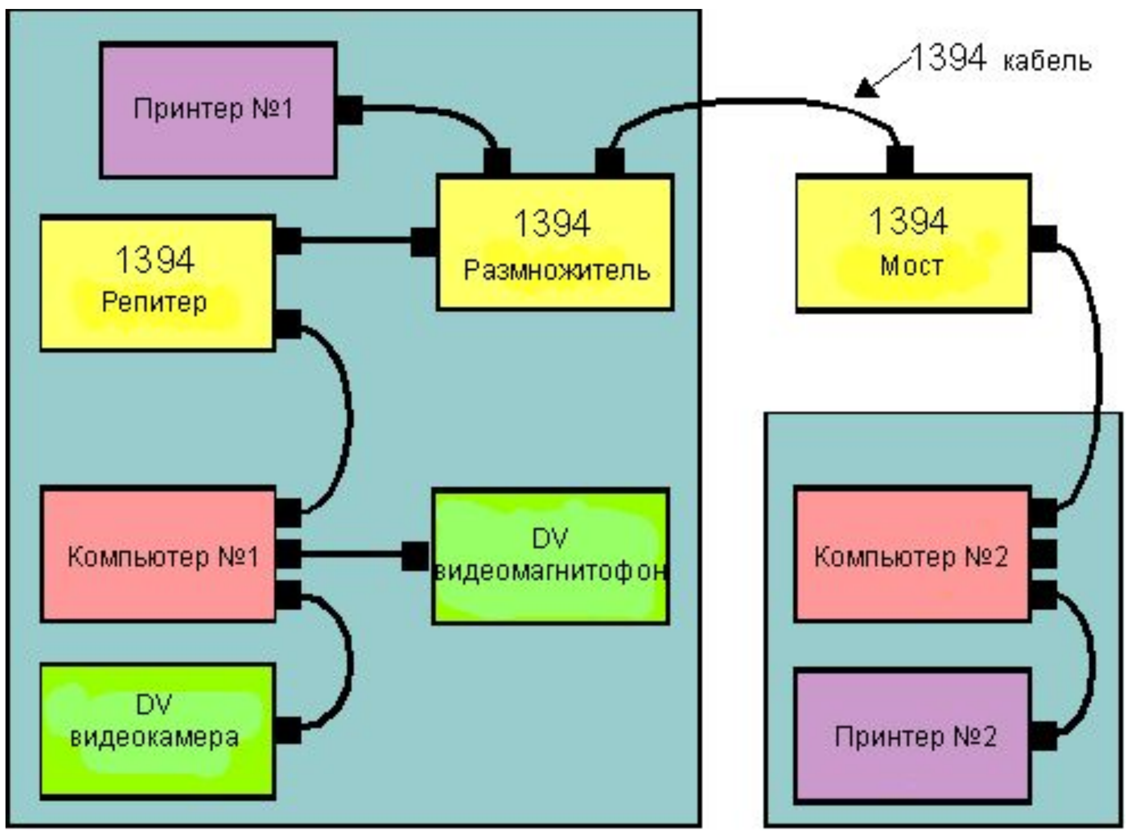
  для выпуклых многогранников является топологическим свойством.

Схема московского метро

Генеалогическое древо графа Л.Н. Толстого




BM1
R1
R2
R3
R4
R5
R6
R7
C1
C2
C3
C4
C5
L1
DA1
К140УД1Б
VT1
GB1
+ 12,6В

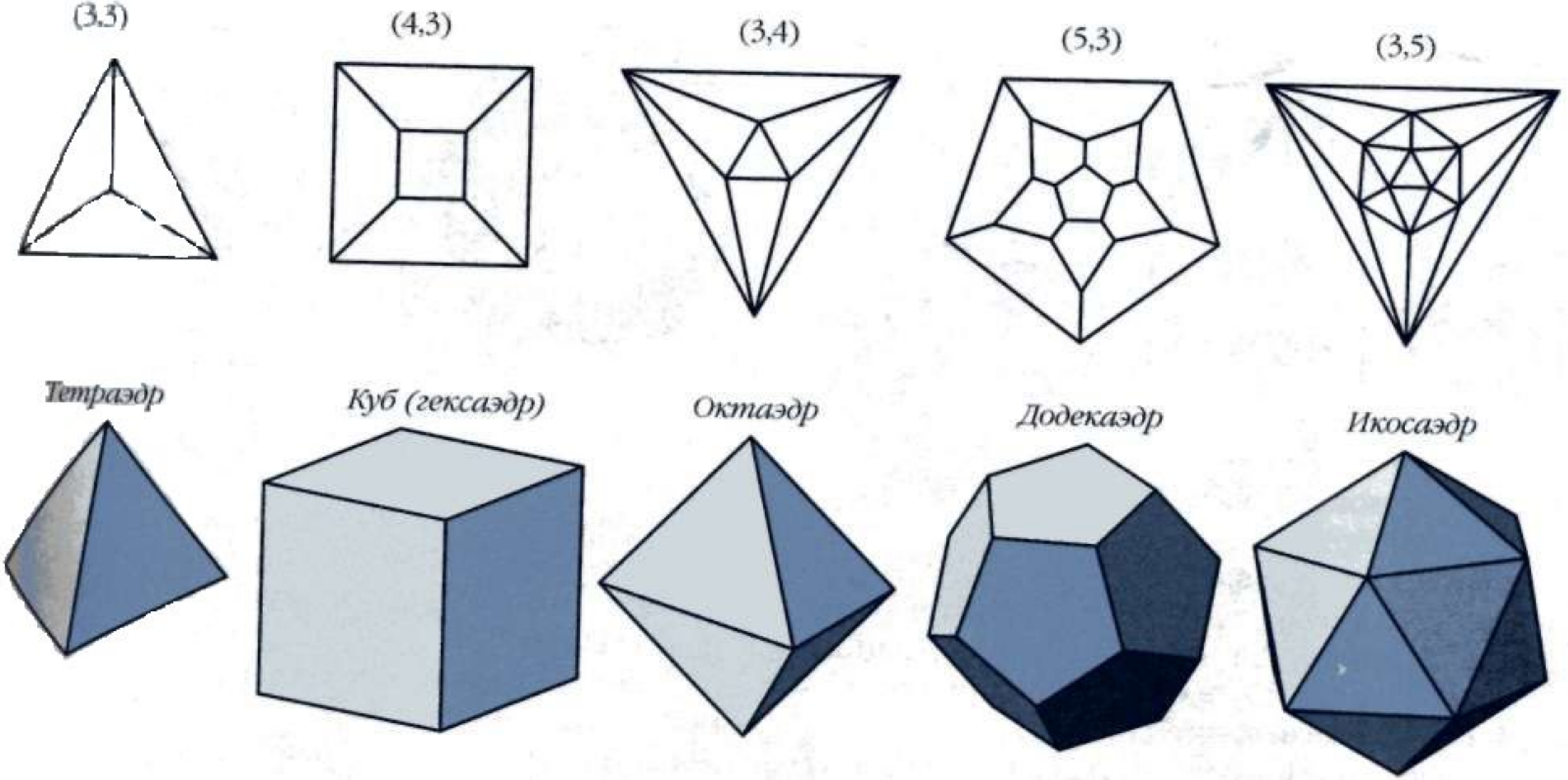

Принтер №1
1394 кабель
1394
Размножитель
1394
Мост
1394
Репитер
Компьютер №1
DV
видеомагнитофон
DV
видеокамера
Компьютер №2
Принтер №2

Соотношение Эйлера на плоскости

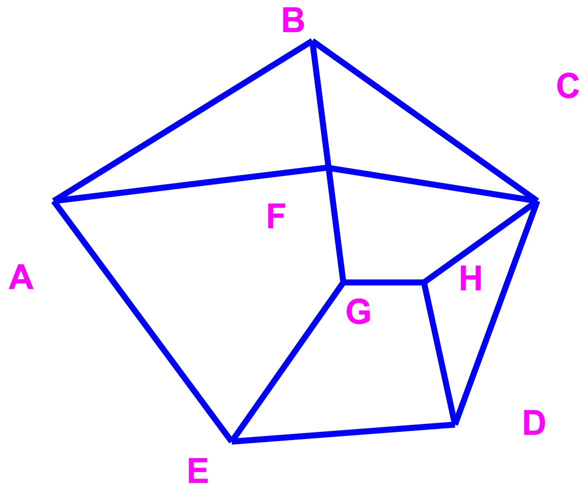
$Г^{/} = Г - 1$

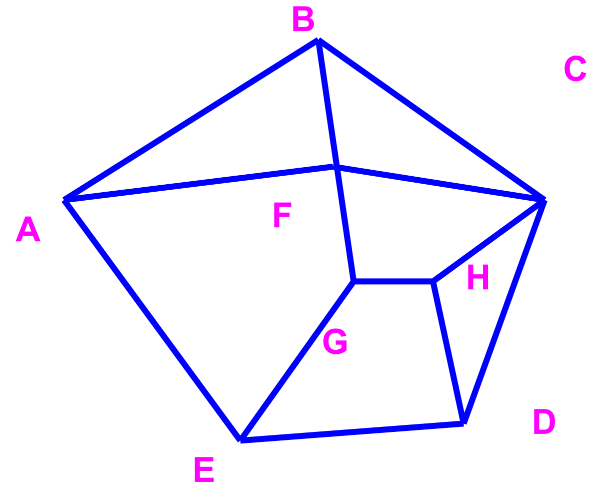
$В - Р + Г^{/} = 1$

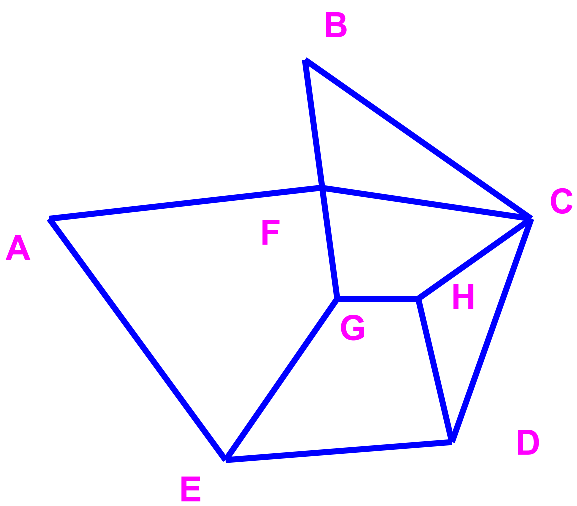
Графы, проекции – тени ребер платоновых тел на плоскость

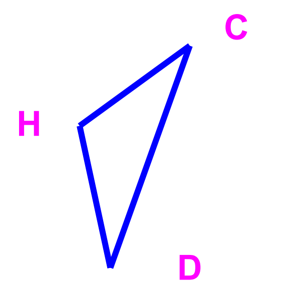


Доказательство теоремы Эйлера



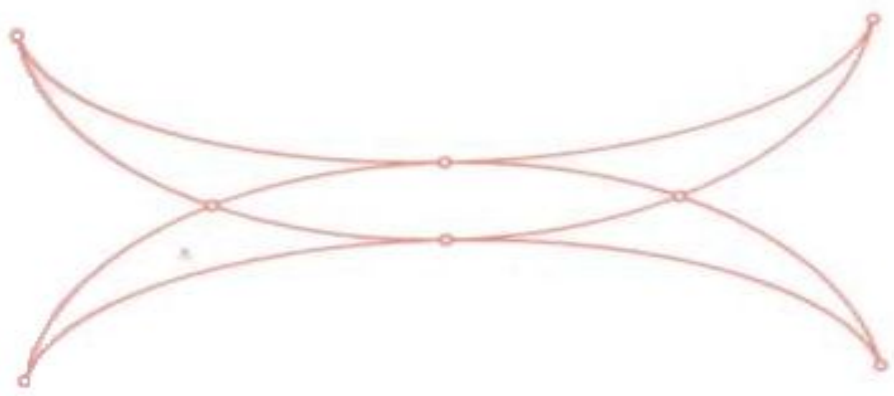






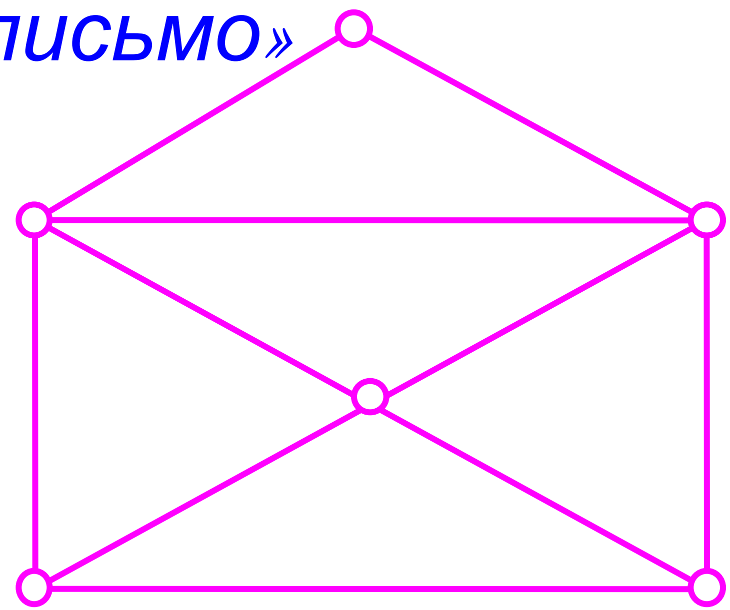
Плоские графы

«Сабля Магомета»



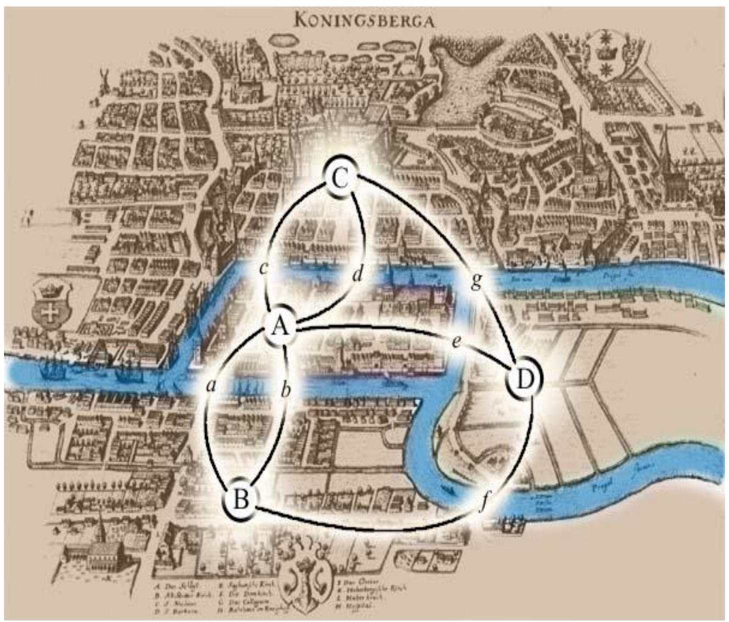
В – Р + Г" $= 8 - 12 + 5 = 1$

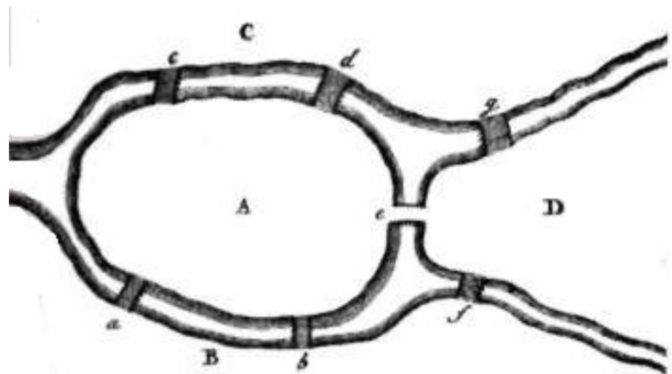
«Распечатанное письмо»



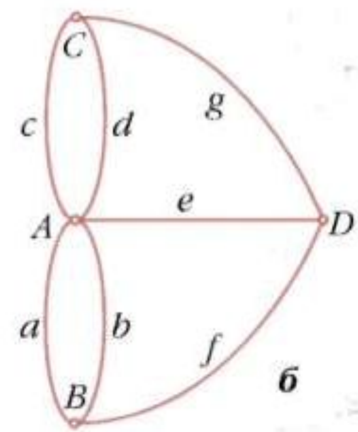
В – Р + Г" $= 6 - 10 + 5 = 1$

Задача о Кёнигсбергских мостах





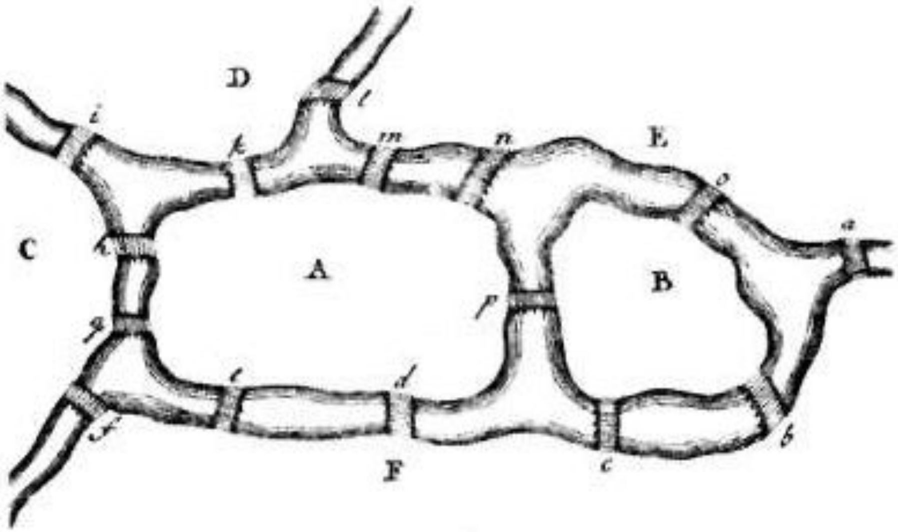
а

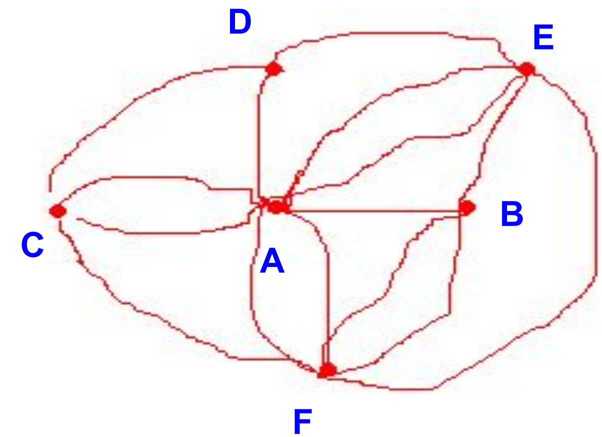


б

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г}'' = 4 - 7 + 4 = 1$$

Карта мостов





В – Р + Г” $= 6 - 15 + 10 = 1$

Замкнутый путь, проходящий <u>по одному разу</u>

по всем рёбрам графа, называется эйлеровым циклом.

Условия выполнения эйлерова цикла

- ***из любой вершины графа должен существовать путь по его ребрам в любую другую вершину (связный граф);***
- ***а) из каждой вершины должно выходить четное количество рёбер;***
- ***б) если отбросить условие возвращения в исходную вершину, то можно допустить наличие двух вершин, из которых выходит нечетное количество рёбер (начинать движение с одной из этих вершин, а заканчивать – в другой).***

«Домики - колодцы»

Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждой избушки к каждому колодцу?

$$В - Р + Г' = 1$$

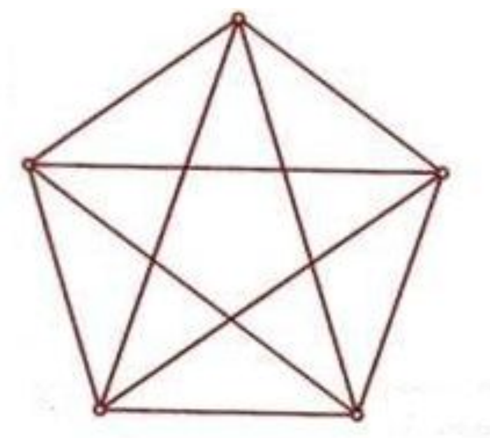
$$В - Р + Г = 2$$

$В = 6$, $Р = 9$, =>

$Г = 5$

$$P = \frac{5\,Г \cdot 4\,Р}{2} = 10$$

Графы, не укладывающиеся на плоскость без пересечения рёбер



Полный

«Домики - колодцы»

Орграфы - графы, в которых все ребра имеют направления

Проектная работа

Задача 1

- *Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три. Сколько он имеет вершин и граней, если число рёбер равно 12?*

- *Решение:*

3В = 2Р, учитывая, что Р=12, имеем: В=8.

По теореме Эйлера

Г = 2 – В + Р, Г = 2 - 8 + 12= 6.

Таким образом, у данного выпуклого многогранника

В =8, Р =12, Г =6.

Пример: куб.

Задача 2

- *Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет 12 рёбер?*

- *Решение:*

3Г = 2Р, учитывая, что Р=12, имеем: Г=8.

По теореме Эйлера

В = 2 – Г + Р, В = 2 - 8 + 12= 6.

Таким образом, у данного выпуклого многогранника

В =6, Р =12, Г =12.

Пример: октаэдр.

Задача: *Существует ли выпуклый многогранник, у которого количества вершин, ребер и граней – простые числа?*

Решение: ***В – Р + Г =2***

Эти три числа В, Р, Г простые, но они все не могут быть нечетными, следовательно, хотя бы одно из чисел В, Р или Г четное, то есть равно 2.

Допустим, что у многогранника 2 вершины, или 2 ребра, или 2 грани.

Существует ли такой многогранник?

Домашнее задание

- № *315, 317*
- Творческая работа*:*

составить граф «Моё генеалогическое древо»