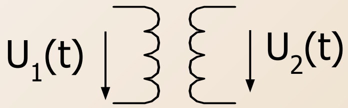


Метод узловых потенциалов

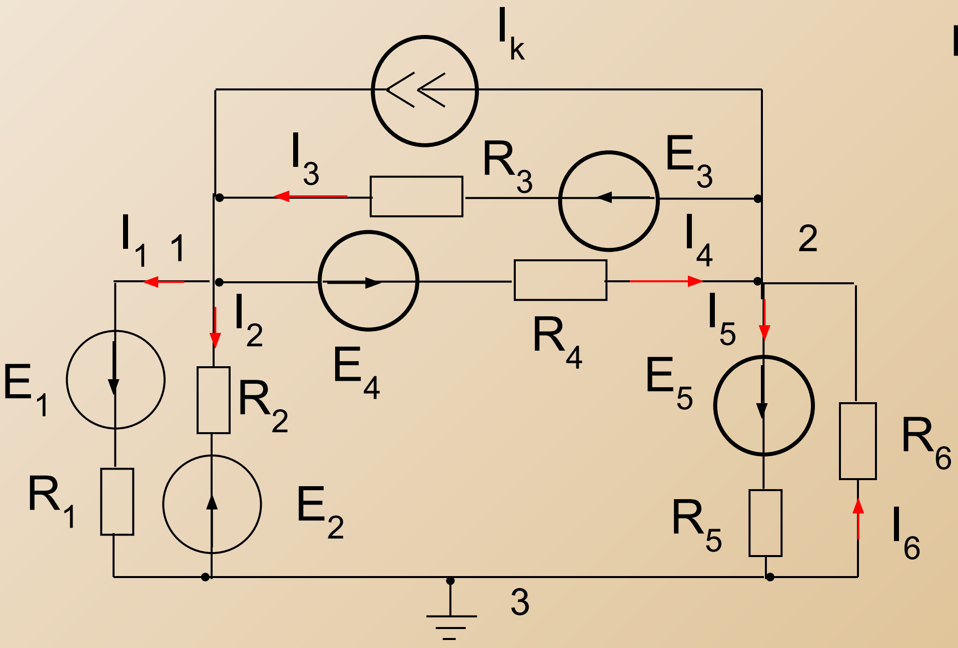
1. Введение
2. Вывод уравнений
3. Порядок расчета
4. Выводы

Кафедра
ТОЭ НГТУ

Введение

Метод контурных токов позволяет составить (m-n+1) уравнений, однако в ряде случаев электрическая цепь имеет большое число ветвей , но малое число узлов, и в этом случае применение метода контурных токов **нерационально.** Метод узловых потенциалов, применяемый для таких электрических цепей, позволяет существенно сократить количество уравнений и упростить расчет.

Электрическая схема



$$I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_5}{R_5} = \varphi_2 g_5 + E_5 g_5$$

$$I_6 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_6} = -\varphi_2 g_6$$

Пусть известны потенциалы узлов

φ_1, φ_2, φ_3 ,причем **$\varphi_3 = 0$.**

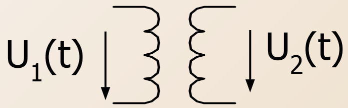
По закону Ома для участка цепи:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_1}{R_1} = \varphi_1 g_1 + E_1 g_1$$

$$\mathbf{I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 - E_2}{R_2} = \varphi_1 g_2 - E_2 g_2}$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_3}{R_3} = \varphi_2 g_3 - \varphi_1 g_3 + E_3 g_3$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_4}{R_4} = \varphi_1 g_4 - \varphi_2 g_4 + E_4 g_4$$



Вывод уравнений

Первый закон Кирхгофа для узла 1 $\quad I_k + I_3 - I_1 - I_2 - I_4 = 0$

Подставим значения токов в полученное уравнение

$$I_k + \varphi_2 g_3 + E_3 g_3 - \varphi_1 g_3 - \varphi_1 g_1 - E_1 g_1 - \varphi_1 g_2 + E_2 g_2 - \varphi_1 g_4 + \varphi_2 g_4 - E_4 g_4 = 0$$

Приведя подобные и сгруппировав, получим:

$$\varphi_1 (g_1 + g_2 + g_3 + g_4) - \varphi_2 (g_3 + g_4) = -E_1 g_1 + E_2 g_2 + E_3 g_3 - E_4 g_4 + I_k$$

$$\varphi_2 (g_3 + g_4 + g_5 + g_6) - \varphi_1 (g_3 + g_4) = -E_3 g_3 + E_4 g_4 - E_5 g_5 - I_k$$

По методу узловых потенциалов составляется система из (n-1) уравнений

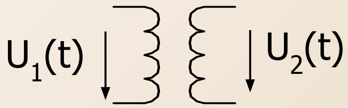
n- число узлов

Система уравнений для произвольной цепи

$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi_1 g_{11} + \varphi_2 g_{12} + \varphi_3 g_{13} + \ldots + \varphi_k g_{1k} = I_1 + \sum E_{1k} g_{1k} \\
\varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} + \varphi_3 g_{23} + \ldots + \varphi_k g_{2k} = I_2 + \sum E_{2k} g_{2k} \\
\varphi_1 g_{31} + \varphi_2 g_{32} + \varphi_3 g_{33} + \ldots + \varphi_k g_{3k} = I_3 + \sum E_{3k} g_{3k} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1 g_{k1} + \varphi_2 g_{k2} + \varphi_3 g_{k3} + \ldots + \varphi_k g_{kk} = I_k + \sum E_{kk} g_{kk}
\end{array}\right\} \qquad 1.$$

Если обозначить правые части системы (1) I_{11}, I_{22}, I_{33} и т. д. ,получим систему (2)

$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi_1 g_{11} + \varphi_2 g_{12} + \varphi_3 g_{13} + \ldots + \varphi_k g_{1k} = I_{11} \\
\varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} + \varphi_3 g_{23} + \ldots + \varphi_k g_{2k} = I_{22} \\
\varphi_1 g_{31} + \varphi_2 g_{32} + \varphi_3 g_{33} + \ldots + \varphi_k g_{3k} = I_{33} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1 g_{k1} + \varphi_2 g_{k2} + \varphi_3 g_{k3} + \ldots + \varphi_k g_{kk} = I_{kk}
\end{array}\right\} \qquad 2.$$



Метод узловых потенциалов

$$\varphi_k = I_{11}\frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + I_{22}\frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \cdots + I_{kk}\frac{\Delta_{kk}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ g_{31} & g_{32} & \cdots & g_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{vmatrix}$$

$g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{kk}$-собственные проводимости узлов;

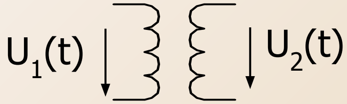
$g_{12}, g_{13}, \ldots g_{1k}$-взаимные проводимости узлов

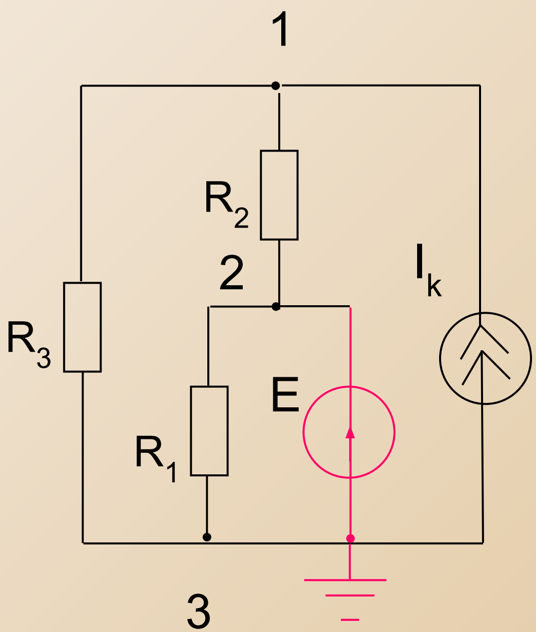
12,13,…1к

Δ_{k1},..., Δ_{km}-алгебраические дополнения

I_{22}, I_{33}, … ,I_{kk}- узловые токи

Δ_{km}- получается из главного определителя Δ путем вычеркивания к-ой строки и m-го столбца и умножения его на $(-1)^{к+м}$

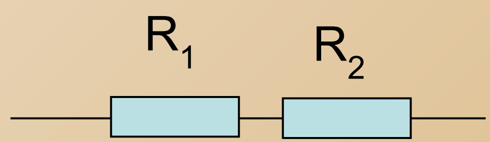




Замечания к методу узловых потенциалов:

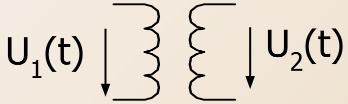
1.Если в электрической цепи существует ветвь **без сопротивления**, то заземлять нужно именно тот **узел, к которому присоединена эта ветвь.**

2.При последовательном соединении сопротивлений проводимость этой ветви определяется по следующим формулам



$$R_{12} = R_1 + R_2$$

$$g_{12} = \frac{1}{R_{12}} \qquad g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2}$$



Порядок расчета электрической цепи методом узловых потенциалов

1. Выбираем условно- положительные направления токов в цепи.

2. Выбираем узел, потенциал которого принимается равным нулю.

3.Записываем для остальных узлов уравнения по методу узловых потенциалов.

4. Решаем систему из (n—1) уравнений и определяем потенциалы узлов.

5. По закону Ома для участка цепи определяем токи в ветвях электрической цепи.

6. Осуществляем проверку полученного решения по законам Кирхгофа или по уравнению баланса мощности.

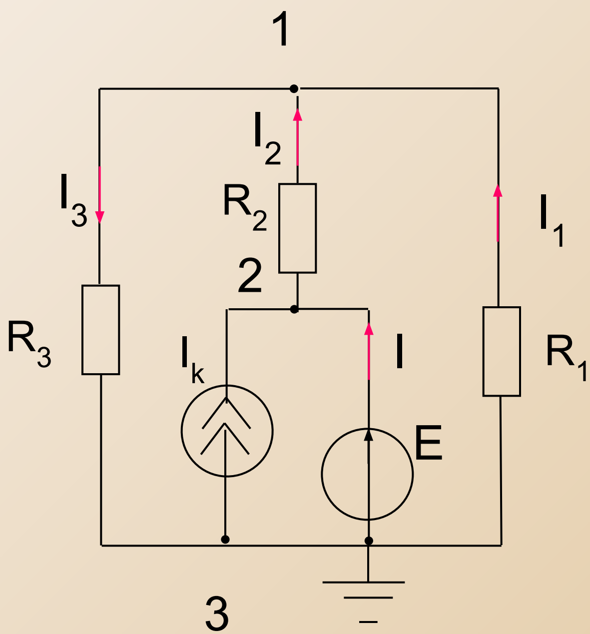


Рис.2

Пример

В электрической цепи Рис.2 определить все токи методом узловых потенциалов.

Решение

1.Расставляем условно - положительные направления токов.

2.Принимаем потенциал третьего узлам равным нулю (φ_3=0), тогда потенциал второго узла будет равен Э.Д.С.(φ_2=E)

3.Записываем уравнение для узла 1.

$$\varphi_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\varphi_2\frac{1}{R_2}=0$$

или

$$\varphi_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\text{Å}\frac{1}{R_2}=0$$

Из последнего выражения найдем φ_1

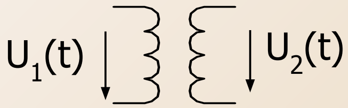
$$\varphi_1 = \frac{\mathring{A}R_1R_3}{(R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2)}$$

Токи найдем по закону Ома для участка цепи

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_3} = \frac{\varphi_1}{R_3} \qquad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_2} = \frac{E - \varphi_1}{R_2} \qquad I_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_1} = -\frac{-\varphi_1}{R_1}$$

Ток I в ветви с Э.Д.С. можно определить только по первому закону Кирхгофа

$$I - I_2 + I_k = 0 \quad \longrightarrow \quad I = I_2 - I_k$$



Метод двух узлов

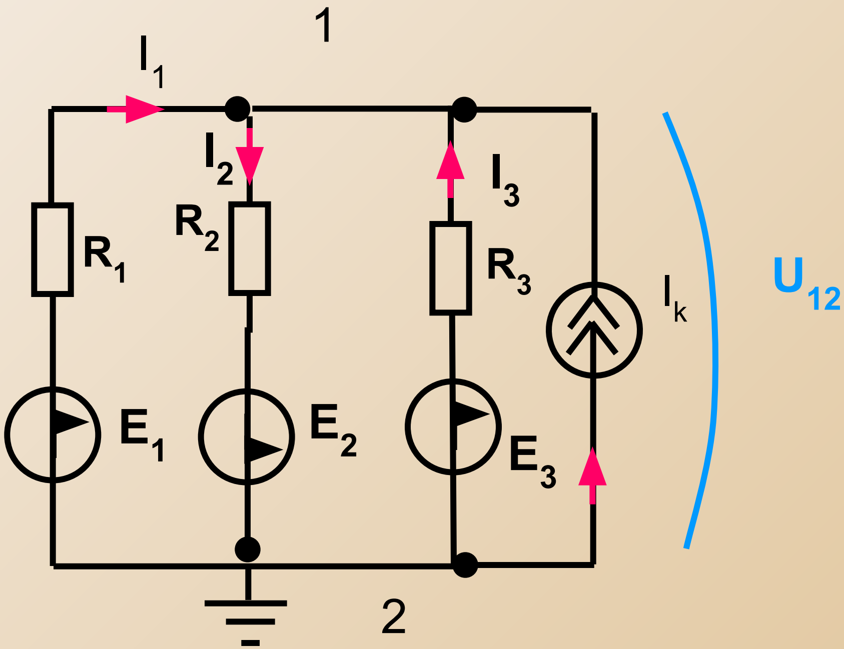


Рис.2

Метод двух узлов - частный случай узловых потенциалов

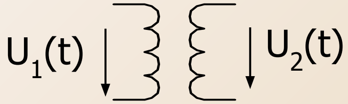
$$I_2 = \frac{U_{12} + E_2}{R_2} = U_{12} g_2 + E_2 g_2 \qquad (1)$$

$$I_1 = \frac{-U_{12} + E_1}{R_1} = -U_{12} g_1 + E_1 g_1 \qquad (2)$$

$$I_3 = \frac{-U_{12} + E_3}{R_3} = -U_{12} g_3 + E_3 g_3 \qquad (3)$$

Уравнение для узла 1 по первому закону Кирхгофа

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_k = 0 \qquad (4)$$



Узловые потенциалы(метод двух узлов)

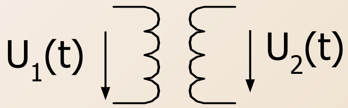
Подставив1,2,3 в 4 получим уравнение

$$-U_{12}g_1 + E_1g_1 - U_{12}g_2 - E_2g_2 - U_{12}g_3 + E_3g_3 + I_k = 0$$

$$U_{12} = \frac{E_1g_1 - E_2g_2 + E_3g_3 + I_k}{g_1 + g_2 + g_3}$$

(5)

$$\boxed{U_{12} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} E_k g_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} g_k}}$$



Правило знаков в формуле (5)

В числителе формулы (5) все слагаемые ,имеющие направление в $1^{\text{ый}}$ индекс у напряжения записываются со знаком “плюс”.