Лабораторная работа
Ряды Фурье

Немного истории

- произвольные периодические функции - суммы простейших гармонических функций – синусов и косинусов кратных частот.
- Эти суммы получили название *рядов Фурье*,
- Французский инженер Жан Батист Фурье обосновал метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, которым можно отображать с абсолютной точностью любую периодическую функцию, определенную на интервале одного периода Т = b-a, и удовлетворяющую условиям Дирихле (ограниченная, кусочно-непрерывная, с конечным числом разрывов 1-го рода).

Задание функции

1.Гармонический анализ функции

$$T := \pi \cdot 2$$ период

$$t := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} .. \pi$$

основная частота

$$w1 := \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

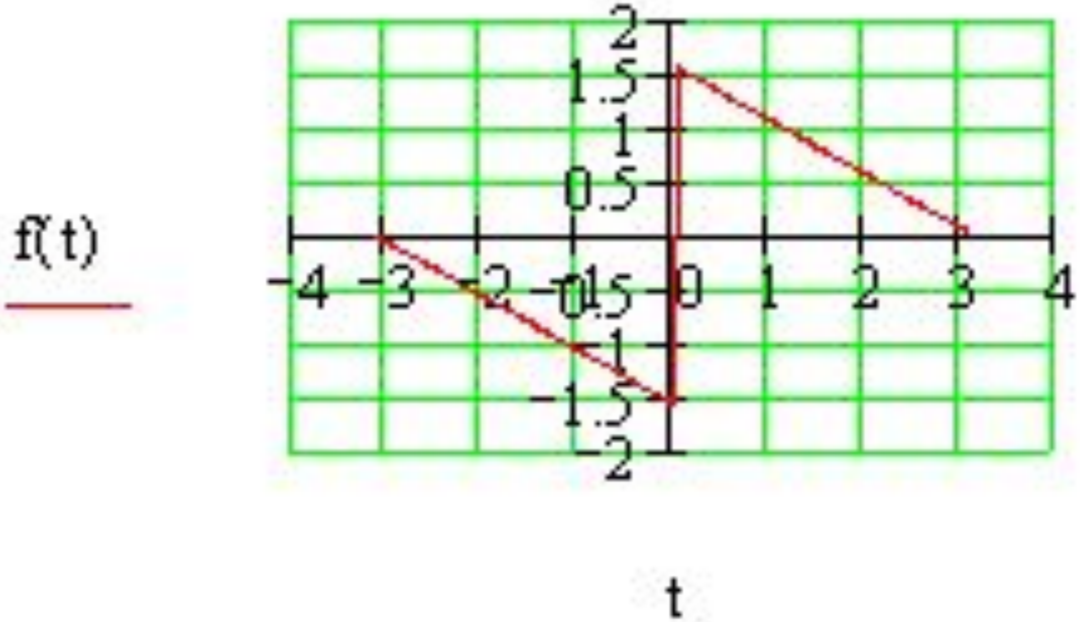
анализируемая функция

$$f(t) := \left| \begin{array}{l} \dfrac{-\pi - t}{2} \ \text{ if } -\pi \le t \le 0 \\ \dfrac{\pi - t}{2} \ \text{ if } 0 < t \le \pi \end{array} \right.$$

$$k := 1 .. 10$$ число гармоник

- $w_1 = 2p / T$ - частота повторения (или частота первой гармоники);
- k - номер гармоники.
- Этот ряд содержит бесконечное число косинусных или синусных составляющих - *гармоник*, причем амплитуды этих составляющих a_k и b_k являются *коэффициентами Фурье*,

Построение графика



Формулы для коэффициентов

t

Козфициенты Фурье вычисление

$$a_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(w1\cdot k\cdot t)\,dt$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin(w1\cdot k\cdot t)\,dt$$

Вывод коэффициенты ряда

$$a_k = \begin{array}{|r|}\hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline -1.168\cdot10^{-4} \\ \hline \end{array}$$

$$b_k = \begin{array}{|r|}\hline 1 \\ \hline 0.5 \\ \hline 0.333 \\ \hline 0.25 \\ \hline 0.2 \\ \hline 0.167 \\ \hline 0.143 \\ \hline 0.125 \\ \hline 0.111 \\ \hline 0.1 \\ \hline \end{array}$$

$$k = \begin{array}{|r|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline 7 \\ \hline 8 \\ \hline 9 \\ \hline 10 \\ \hline \end{array}$$

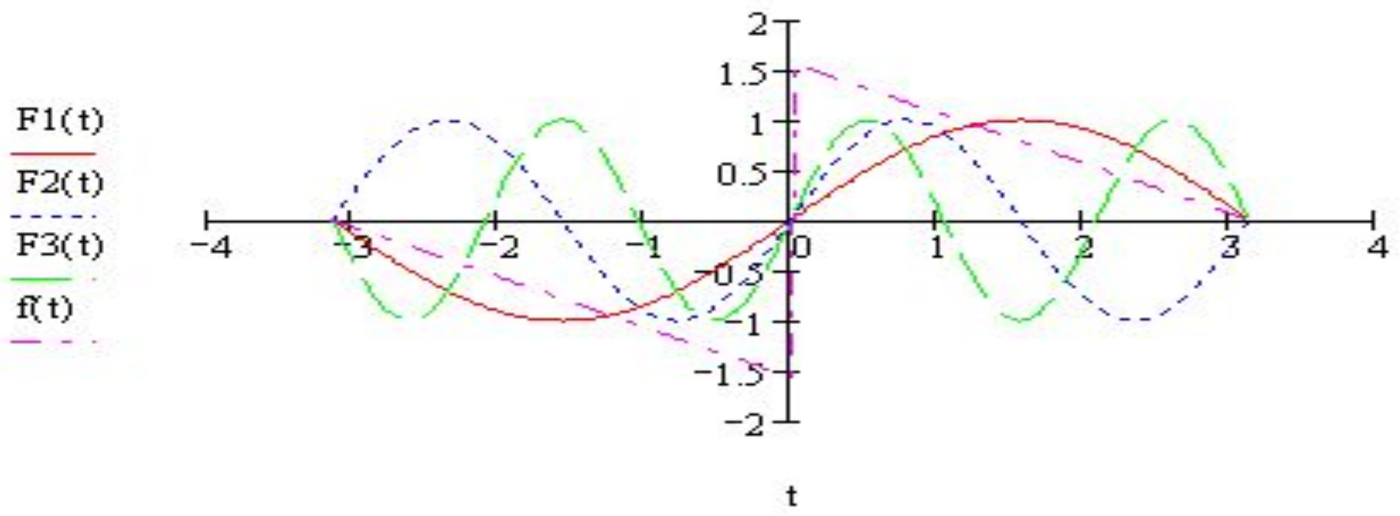
- Термин "spectrum" ("спектр") впервые применил И. Ньютон в 1571 году при описании разложения солнечного света, пропущенного через стеклянную призму, на многоцветную полосу. Он же дал и первую математическую трактовку периодичности волновых движений.

Вывод гармоник и функции

$$F1(t) := a_1 \cdot \cos(w1 \cdot 1 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(w1 \cdot 1 \cdot t)$$ 1 гармоника

$$F2(t) := a_1 \cdot \cos(w1 \cdot 2 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(w1 \cdot 2 \cdot t)$$ 2 гармоника

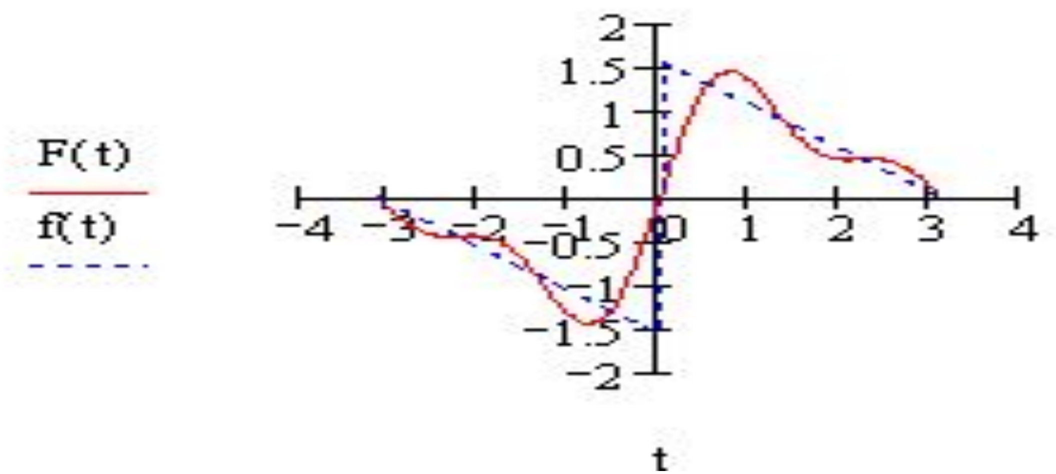
$$F3(t) := a_1 \cdot \cos(w1 \cdot 3 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(w1 \cdot 3 \cdot t)$$ 3 гармоника



Гармонический синтез по 3 гармоникам

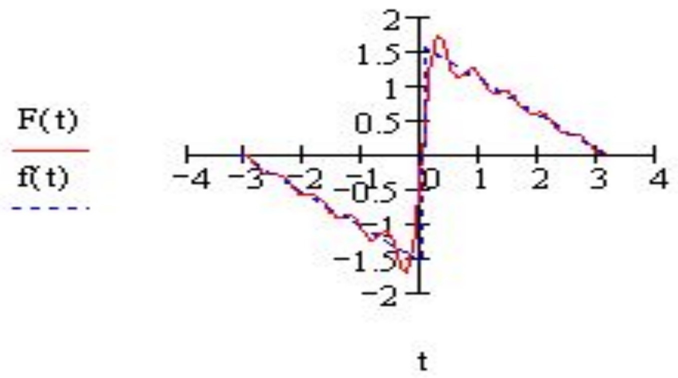
- Сравнение исходной и синтезированной функций

$$F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} \left(a_k \cdot \cos(w1 \cdot k \cdot t) + b_k \cdot \sin(w1 \cdot k \cdot t) \right)$$



Гармонический синтез по 10 гармоникам

$$F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{10} \left(a_k \cdot \cos(w1 \cdot k \cdot t) + b_k \cdot \sin(w1 \cdot k \cdot t) \right)$$



Спектральный анализ

- Спектр амплитуд и спектр фаз

$$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2} \qquad \phi_k := \mathrm{atan}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$$

$A_k =$	$\phi_k =$	$k =$
1	$-1.168 \cdot 10^{-4}$	1
0.5	$-2.336 \cdot 10^{-4}$	2
0.333	$-3.504 \cdot 10^{-4}$	3
0.25	$-4.672 \cdot 10^{-4}$	4
0.2	$-5.84 \cdot 10^{-4}$	5
0.167	$-7.008 \cdot 10^{-4}$	6
0.143	$-8.176 \cdot 10^{-4}$	7
0.125	$-9.344 \cdot 10^{-4}$	8
0.111	$-1.051 \cdot 10^{-3}$	9
0.1	$-1.168 \cdot 10^{-3}$	10

- *Спектр* временной зависимости (функции) $f(t)$ называется совокупность ее гармонических составляющих, образующих ряд Фурье.

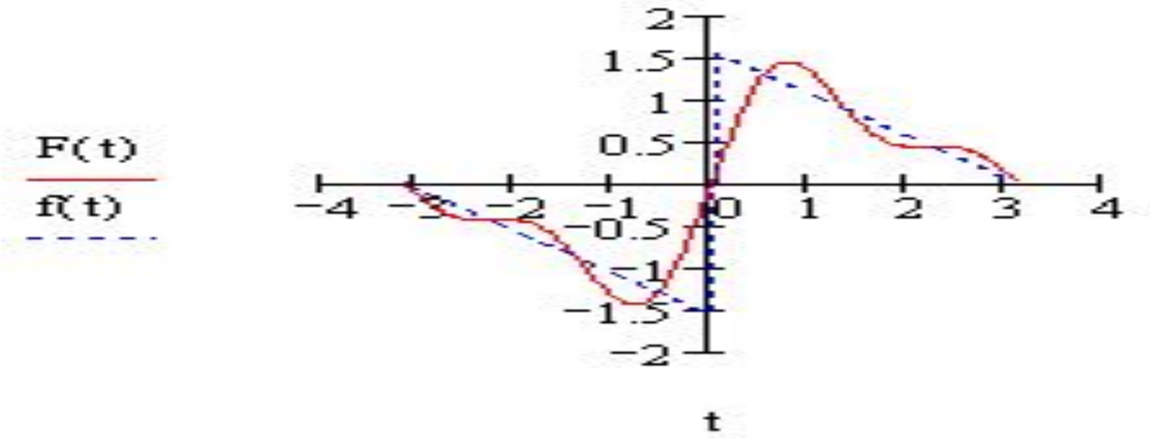
- Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью
- A_k (*спектр амплитуд*) и
- j_k (*спектр фаз*) от частоты $w_k = kw_1$.

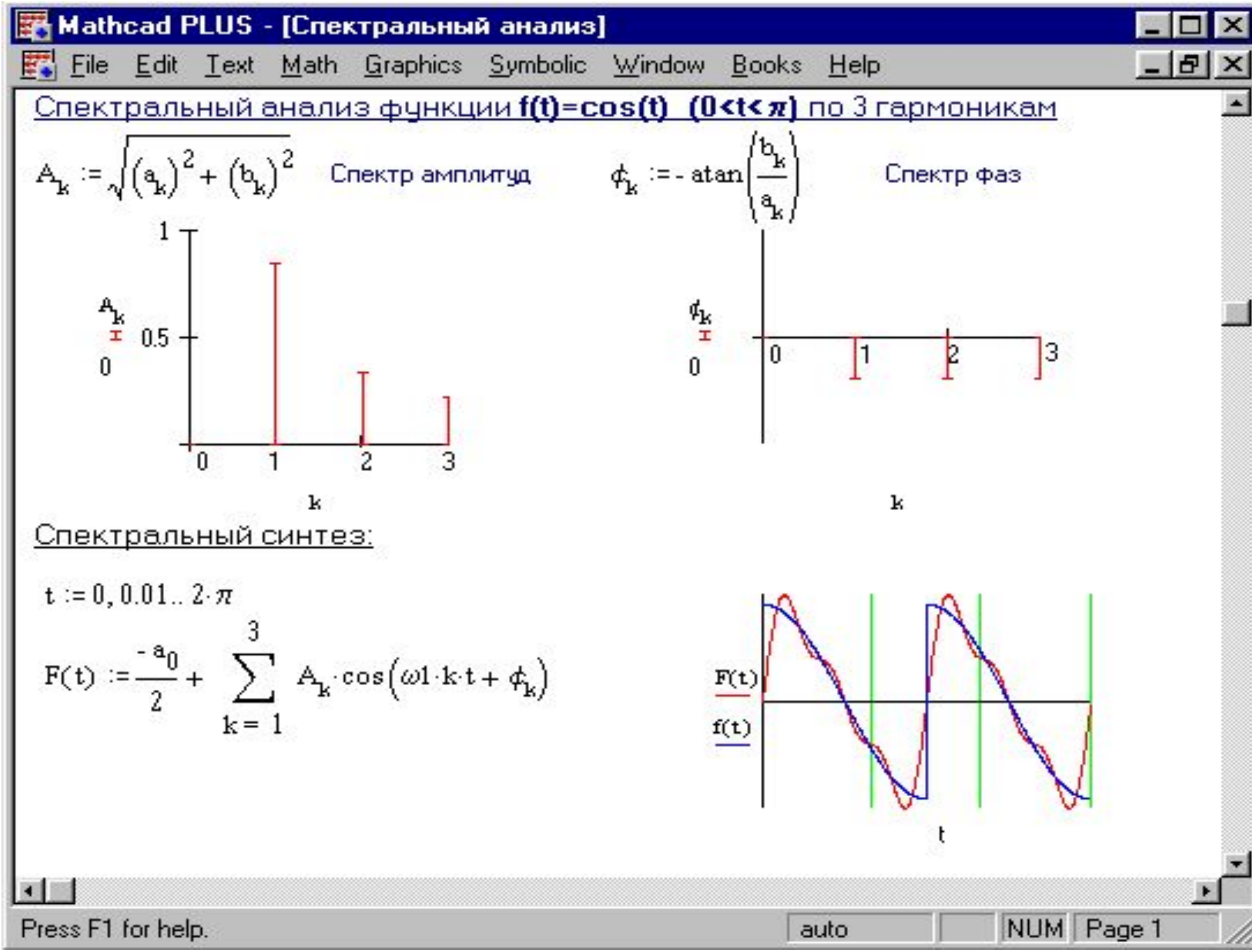
- Термин "spectrum" ("спектр") впервые применил И. Ньютон в 1571 году при описании разложения солнечного света, пропущенного через стеклянную призму, на многоцветную полосу.

Спектральный синтез по 3 гармоникам

$$t := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} .. \pi$$

$$F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} A_k \cdot \sin(w1 \cdot k \cdot t + \phi_k)$$





Mathcad PLUS - [Спектральный анализ]
File Edit Text Math Graphics Symbolic Window Books Help
Спектральный анализ функции f(t)=cos(t) (0<t<π) по 3 гармоникам
$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$
Спектр амплитуд
$\phi_k := -\operatorname{atan}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$
Спектр фаз
A_k
k
ϕ_k
k
Спектральный синтез:
$t := 0, 0.01 .. 2\cdot\pi$
$F(t) := \frac{-a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} A_k \cdot \cos(\omega 1 \cdot k \cdot t + \phi_k)$
F(t)
f(t)
t
Press F1 for help.
auto
NUM
Page 1

Спектральный анализ с использованием БПФ

- В Mathcad есть встроенные средства быстрого преобразования Фурье (БПФ), которые существенно упрощают процедуру приближенного спектрального анализа

$$k := 0..15$$

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{-\pi - t}{2} & \text{if } -\pi \le t \le 0 \\ \dfrac{\pi - t}{2} & \text{if } 0 < t \le \pi \end{cases} \qquad t_k := k \cdot \frac{T}{30}$$

$v_k := f(t_k)$ задание исходной функции дискрнтно в16отсчетах

$F := \mathrm{fft}(v)$ прямое преобразование Фурье БПФ переход в частотную область

Встроенные в Mathcad средства быстрого преобразования Фурье (БПФ)

- fft(v) - возвращает прямое БПФ 2^m-мерного вещественнозначного вектора v,
- где v - вектор, элементы которого хранят отсчеты функции $f(t)$.
- Результатом будет вектор A размерности $1 + 2^{m-1}$ с комплексными элементами - отсчетами в частотной области.
- Фактически действительная и мнимая части вектора есть коэффициенты Фурье a_k и b_k,

- ifft(v) **-** возвращает обратное БПФ для вектора v с комплексными элементами.
- Вектор v имеет $1 + 2^{m-1}$ элементов.

- Результатом будет вектор A размерности 2^m с действительными элементами.

Mathcad PLUS - [Спектральный анализ с БПФ]

File Edit Text Math Graphics Symbolic Window Books Help

Спектральный анализ с использованием БПФ

$f1(t) := \cos(t) \quad f(t) := \mathrm{if}(t<\pi, f1(t), -f1(t))$ - анализируемая функция $\quad T := \pi$ - период

$k := 0..15 \quad t_k := k \cdot \frac{T}{16} \quad v_k := f(t_k)$ задание исходной функции дискретно в 16 отсчетах

$F := \mathrm{fft}(v)$ Прямое БПФ - переход в частотную область

$$F = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3+1.7i \\ 0.2+0.6i \\ 0.3+0.4i \\ 0.3+0.3i \\ 0.2+0.2i \\ 0.3+0.1i \\ 0.3+0.1i \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

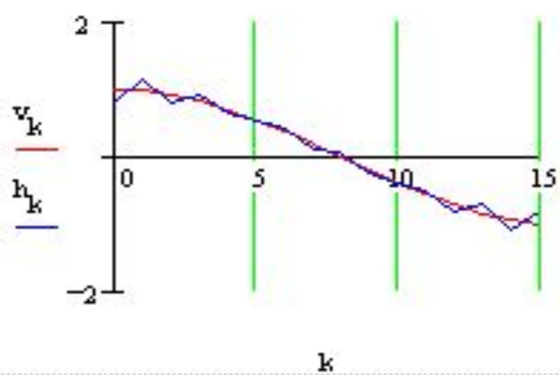
$d := 6$ Задание максимального числа гармоник

$i := 0..d$ Расчет амплитуды и фазы первых 6 гармоник

$A_i := \sqrt{\left(\mathrm{Re}(F_i)^2 + \mathrm{Im}(F_i)^2\right)}$ - Спектр амплитуд $\quad \phi_i := -\arg(F_i)$ - Спектр фаз

$j := 0..8 \quad g_j := \mathrm{if}(j \le d, F_j, 0)$ Ограничение числа гармоник

$h := \mathrm{ifft}(g)$ Обратное БПФ - переход во временную область



- График построен на отрезке [0, π]

auto NUM Page 1

$$F = \begin{pmatrix} 2.356 \\ -0.576 + 1.053i \\ -0.576 + 0.506i \\ -0.576 + 0.313i \\ -0.576 + 0.209i \\ -0.576 + 0.14i \\ -0.576 + 0.087i \\ -0.576 + 0.042i \\ -0.576 \end{pmatrix}$$

$d := 6$ задание мах числа гармоник

$i := 0 .. d$

расчет амплитуды и фазы первых 6 гармоник

$A_i := \sqrt{\left(\mathrm{Re}\left(F_i\right)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left(F_i\right)\right)^2}$ спектр амплитуд

$\phi_i := -\arg\left(F_i\right)$ спектр фаз

$A_i =$

2.356
1.2
0.766
0.656
0.613
0.593
0.582

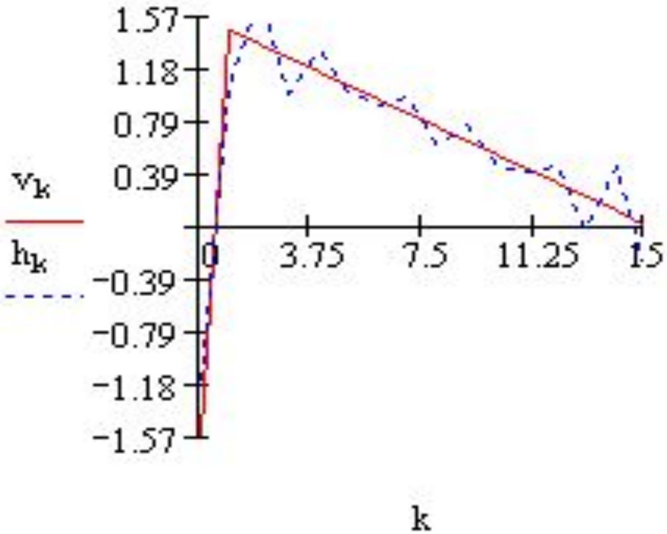
$\phi_i =$

0
-2.071
-2.421
-2.643
-2.793
-2.903
-2.992

Обратное БПФ

$j := 0..8$ $\qquad$ $g_j := \mathrm{if}(j \le d, F_j, 0)$ ограничение числа гармоник

$h := \mathrm{ifft}(g)$ $\qquad$ Обратное БПФ переход во временную область



Фильтрация аналоговых сигналов

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{-\pi - t}{2} & \text{if } -\pi \le t \le 0 \\ \dfrac{\pi - t}{2} & \text{if } 0 < t \le \pi \end{cases}$$

$T := 2\cdot\pi$

$k := 0..127$

$t_k := k\cdot\dfrac{T}{256}$

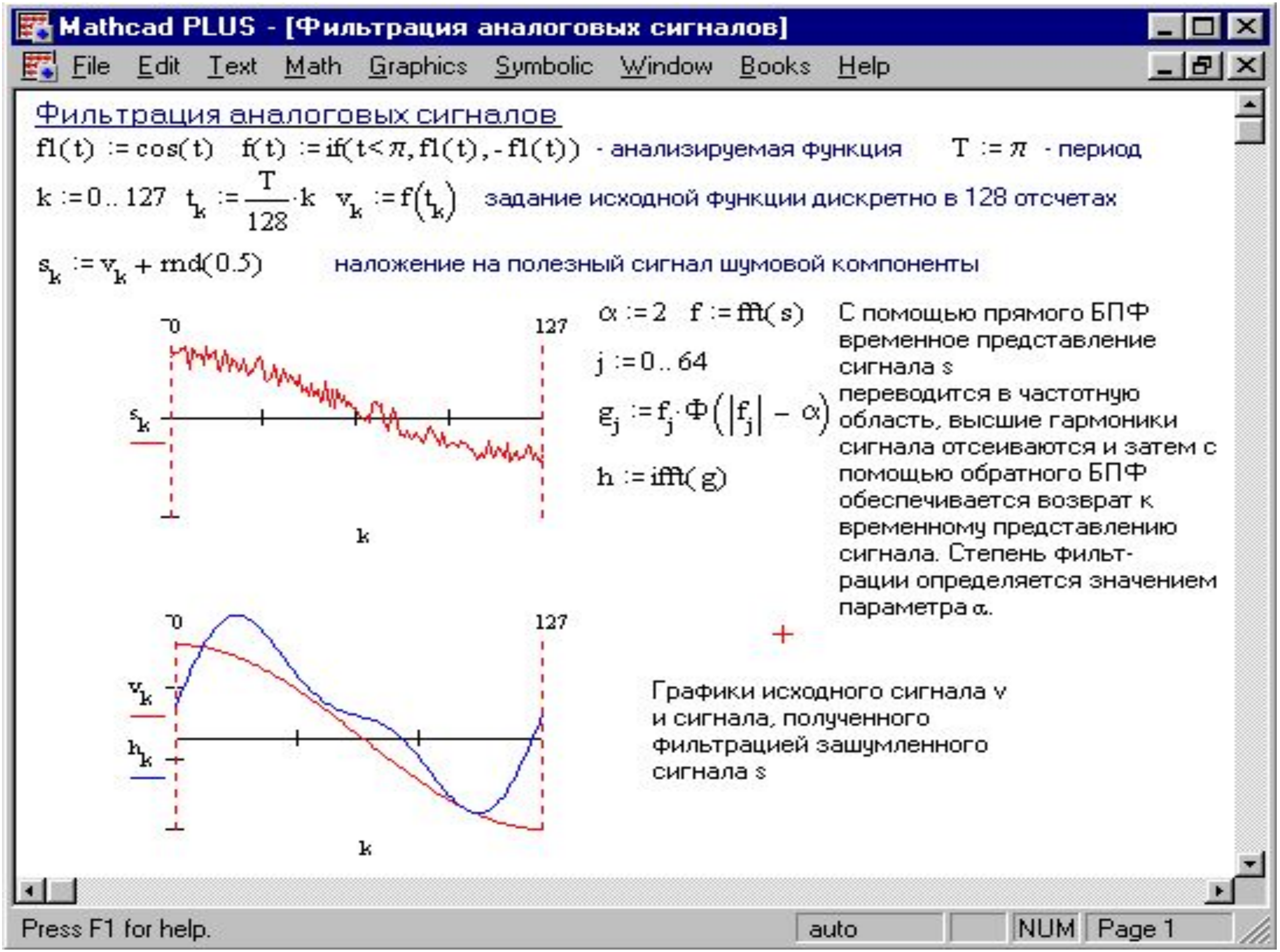
$v_k := f(t_k)$ задание исходной функции дискрнтно в128отсчетах

$s_k := v_k + \mathrm{rnd}(0.8)$ наложение на полезный сигнал шумовой компоненты

$\alpha := 0.8$ параметр фильтрации

$d := 8$ мах число гармоник

$f := \mathrm{fft}(s)$ с помощью БПФ сигнал переводится в частотную область, высшие гармоники отсеиваются и ОБПФ обеспечиваем возврат сигнала. Степень фильтрации определяется α


Mathcad PLUS - [Фильтрация аналоговых сигналов]
File Edit Text Math Graphics Symbolic Window Books Help
Фильтрация аналоговых сигналов
$f1(t) := \cos(t)$ $f(t) := if(t<\pi, f1(t), -f1(t))$ - анализируемая функция $T := \pi$ - период
$k := 0..127$ $t_k := \frac{T}{128} \cdot k$ $v_k := f(t_k)$ задание исходной функции дискретно в 128 отсчетах
$s_k := v_k + rnd(0.5)$ наложение на полезный сигнал шумовой компоненты
$\alpha := 2$ $f := fft(s)$
$j := 0..64$
$g_j := f_j \cdot \Phi(|f_j| - \alpha)$
$h := ifft(g)$
С помощью прямого БПФ временное представление сигнала s переводится в частотную область, высшие гармоники сигнала отсеиваются и затем с помощью обратного БПФ обеспечивается возврат к временному представлению сигнала. Степень фильтрации определяется значением параметра α.
Графики исходного сигнала v и сигнала, полученного фильтрацией зашумленного сигнала s
0
127
s_k
k
v_k
h_k
Press F1 for help.
auto
NUM
Page 1

- **Фильтрация** - выделение полезного сигнала из его смеси с мешающим сигналом - шумом.
- Наиболее распространенный тип фильтрации - частотная фильтрация.
- Если известна область частот, занимаемых полезным сигналом, достаточно выделить эту область и подавить те области, которые заняты шумом

График полезного сигнала с шумом

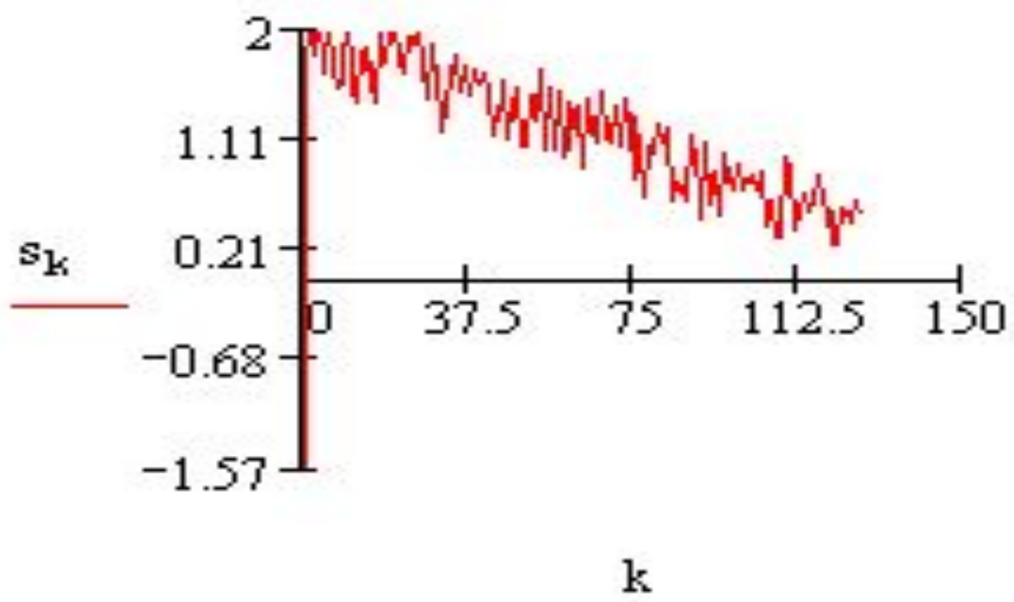


График сигнала после фильтрации

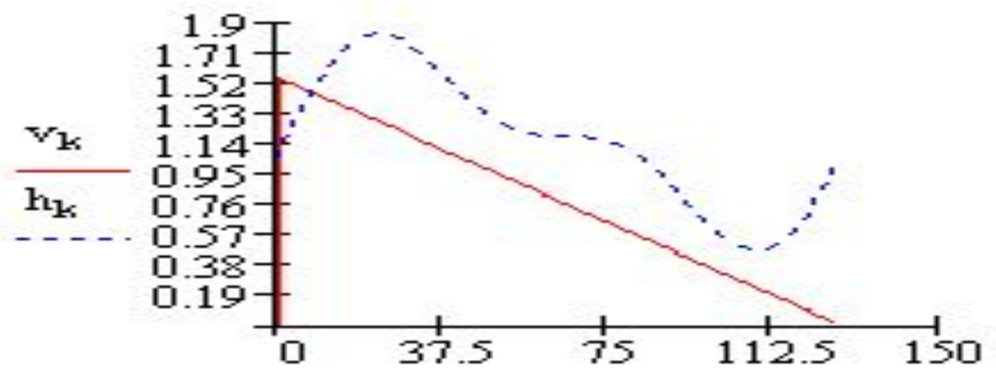
$j := 0..64$

$$FX(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

$$g_j := f_j \cdot FX\left(\left|f_j\right| - \alpha\right)$$

$h := \mathrm{ifft}(g)$

ОБПФ



Результат фильтрации

- Сравнение временных зависимостей исходного и выходного сигналов, показывает, что выходной сигнал почти полностью повторяет входной
- и в значительной мере избавлен от высокочастотных шумовых помех, маскирующих полезный сигнал

- **Задание 1.** Вычислить первые шесть пар коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $f(t)$ на отрезке [0, 2p].
- Построить графики 1, 2 и 3 гармоник.
- Выполнить гармонический синтез функции $f(t)$ по 1, 2 и 3 гармоникам. Результаты синтеза отобразить графически.

- **Задание 2.** Выполнить классический спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.
- **Задание 3.** Выполнить численный спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Для этого необходимо задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 32 отсчетах. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

- **Задание 4.** Выполнить спектральный анализ и синтез функции $f(t)$ с помощью БПФ. Для этого необходимо:
- задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 128 отсчетах;
- выполнить прямое БПФ с помощью функции fft и отобразить графически найденные спектры амплитуд и фаз первых шести гармоник;
- выполнить обратное БПФ с помощью функции $ifft$ и отобразить графически результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

- **Задание 5.** Выполнить фильтрацию функции $f(t)$ с помощью БПФ:
- синтезировать функцию $f(t)$ в виде полезного сигнала, представленного 128 отсчетами вектора v;
- к полезному сигналу v присоединить шум с помощью функции rnd $(rnd(2)$ - 1) и сформировать вектор из 128 отсчетов зашумленного сигнала s;
- преобразовать сигнал с шумом s из временной области в частотную, используя прямое БПФ (функция fft). В результате получится сигнал f из 64 частотных составляющих;
- выполнить фильтрующее преобразование с помощью функции Хевисайда (параметр фильтрации а = 2);
- с помощью функции $ifft$ выполнить обратное БПФ и получить вектор выходного сигнала h;
- построить графики полезного сигнала v и сигнала, полученного фильтрацией зашумленного сигнала s.
-

Варианты заданий

№ варианта	$f(t)$	№ варианта	$f(t)$	№ варианта	$f(t)$
1	$\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 2t}$	**6**	$\cos t \cdot \cos\lvert\sin t\rvert$	**11**	$\sin\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
2	$\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 2t}$	**7**	$\mathrm{arctg}\left(\cos\frac{1}{2}t\right)$	**12**	$\cos\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
3	$\dfrac{\sin 2t+\sin^2 3t}{3+\sin t+\cos 2t}$	**8**	$e^{\sin\frac{1}{3}t}$	**13**	$e^{-10(t-\pi)^2}$
4	$\dfrac{\sin 3t}{\lvert\sin t\rvert+\lvert\cos t\rvert}$	**9**	$\lvert\sin t\rvert+\lvert\sin 2t\rvert$	**14**	$e^{\cos\frac{1}{3}t}$