

Лабораторная работа

Ряды Фурье

Немного истории

- произвольные периодические функции - суммы простейших гармонических функций – синусов и косинусов кратных частот.
- Эти суммы получили название *рядов Фурье*,
- Французский инженер Жан Батист Фурье обосновал метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, которым можно отобразить с абсолютной точностью любую периодическую функцию, определенную на интервале одного периода $T = b-a$, и удовлетворяющую условиям Дирихле (ограниченная, кусочно-непрерывная, с конечным числом разрывов 1-го рода).

Задание функции

1. Гармонический анализ функции

$$t := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} .. \pi$$

$$T := \pi \cdot 2 \quad \text{период}$$

$$w1 := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \text{основная частота}$$

$$f(t) := \begin{cases} \frac{-\pi - t}{2} & \text{if } -\pi \leq t \leq 0 \\ \frac{\pi - t}{2} & \text{if } 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

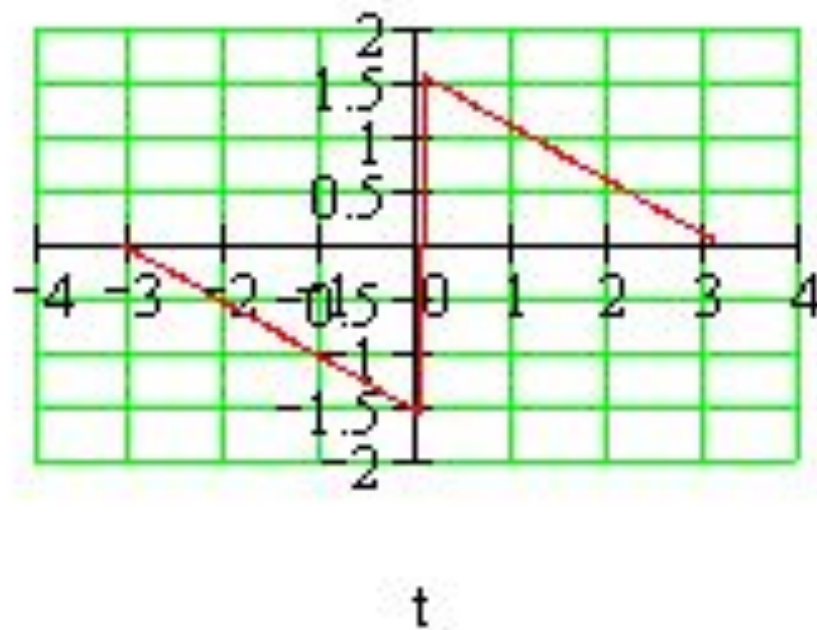
анализируемая функция

$$k := 1 .. 10 \quad \text{число гармоник}$$

- $\omega_1 = 2\pi / T$ - частота повторения
(или частота первой гармоники);
- k - номер гармоники.
- Этот ряд содержит бесконечное число косинусных или синусных составляющих - *гармоник*, причем амплитуды этих составляющих a_k и b_k являются *коэффициентами Фурье*,

Построение графика

$f(t)$



Формулы для коэффициентов

t

Коэффициенты Фурье вычисление

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(\omega_1 \cdot k \cdot t) dt$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(\omega_1 \cdot k \cdot t) dt$$

Вывод коэффициенты ряда

$a_k =$

-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴
-1.168·10 ⁻⁴

$b_k =$

1
0.5
0.333
0.25
0.2
0.167
0.143
0.125
0.111
0.1

$k =$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

- Термин "spectrum" ("спектр") впервые применил И. Ньютон в 1671 году при описании разложения солнечного света, пропущенного через стеклянную призму, на многоцветную полосу. Он же дал и первую математическую трактовку периодичности волновых движений.

Вывод гармоник и функции

$$F1(t) := a_1 \cdot \cos(w1 \cdot 1 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(w1 \cdot 1 \cdot t) \quad 1 \text{ гармоника}$$

$$F2(t) := a_1 \cdot \cos(w1 \cdot 2 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(w1 \cdot 2 \cdot t) \quad 2 \text{ гармоника}$$

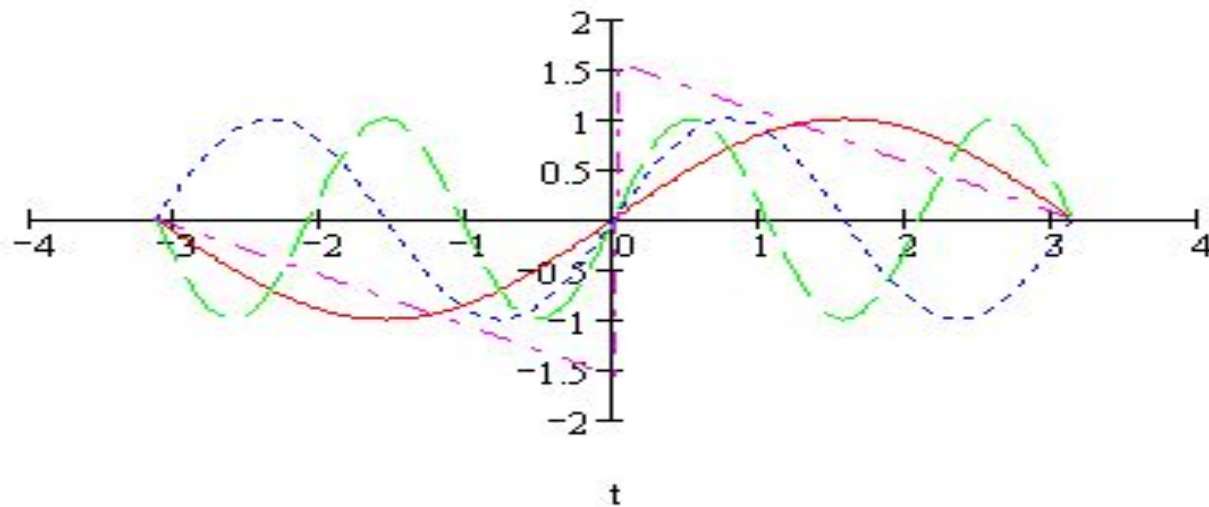
$$F3(t) := a_1 \cdot \cos(w1 \cdot 3 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(w1 \cdot 3 \cdot t) \quad 3 \text{ гармоника}$$

F1(t)

F2(t)

F3(t)

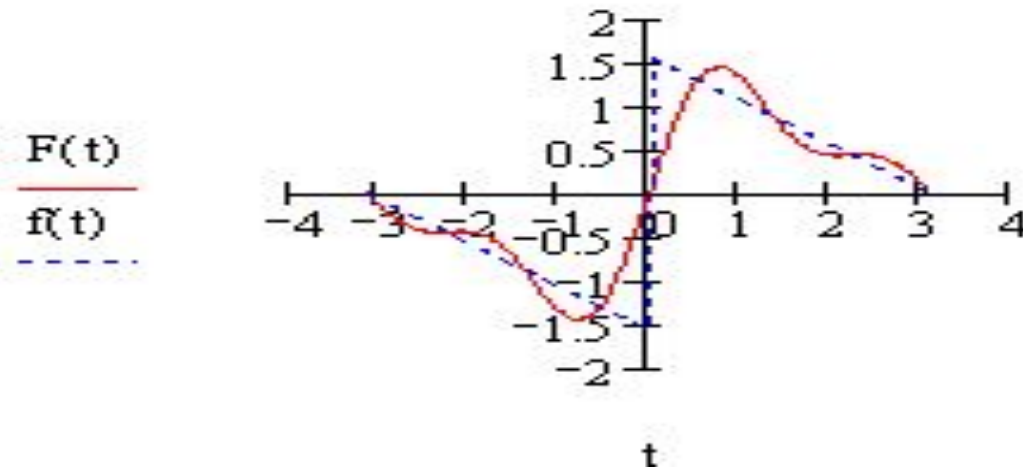
f(t)



Гармонический синтез по 3 гармоникам

- Сравнение исходной и синтезированной функций

$$F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^3 \left(a_k \cdot \cos(\omega_1 \cdot k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\omega_1 \cdot k \cdot t) \right)$$

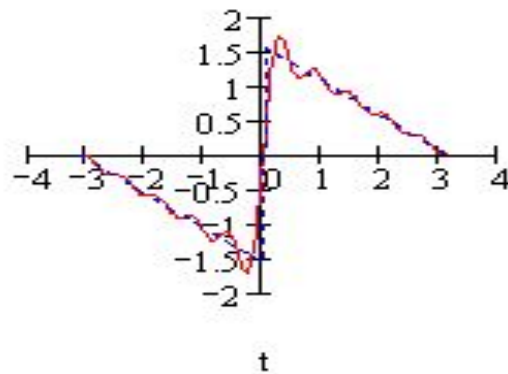


Гармонический синтез по 10 гармоникам

$$F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{10} \{a_k \cdot \cos(\omega_1 \cdot k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\omega_1 \cdot k \cdot t)\}$$

$F(t)$

$f(t)$



Спектральный анализ

- Спектр амплитуд и спектр фаз

$$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$$

$$\phi_k := \text{atan}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$$

$A_k =$

1
0.5
0.333
0.25
0.2
0.167
0.143
0.125
0.111
0.1

$\phi_k =$

$-1.168 \cdot 10^{-4}$
$-2.336 \cdot 10^{-4}$
$-3.504 \cdot 10^{-4}$
$-4.672 \cdot 10^{-4}$
$-5.84 \cdot 10^{-4}$
$-7.008 \cdot 10^{-4}$
$-8.176 \cdot 10^{-4}$
$-9.344 \cdot 10^{-4}$
$-1.051 \cdot 10^{-3}$
$-1.168 \cdot 10^{-3}$

$k =$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

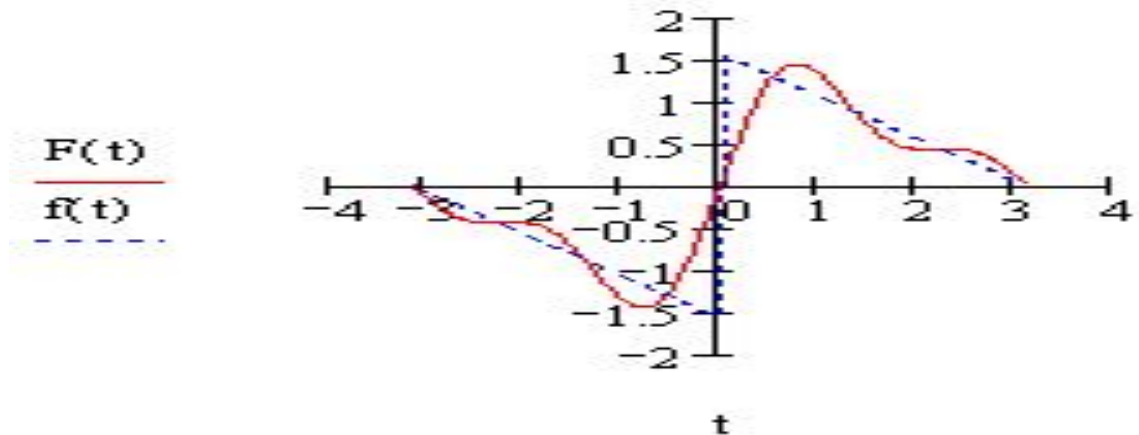
- *Спектр* временной зависимости (функции) $f(t)$ называется совокупность ее гармонических составляющих, образующих ряд Фурье.
- Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью
 - A_k (*спектр амплитуд*) и
 - j_k (*спектр фаз*) от частоты $\omega_k = k\omega_1$.

- Термин "spectrum" ("спектр") впервые применил И. Ньютон в 1671 году при описании разложения солнечного света, пропущенного через стеклянную призму, на многоцветную полосу.

Спектральный синтез по 3 гармоникам

$$t := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} \dots \pi$$

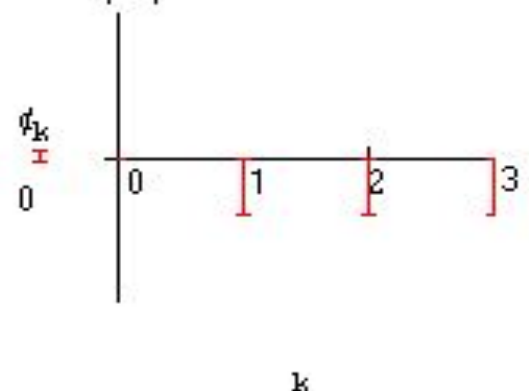
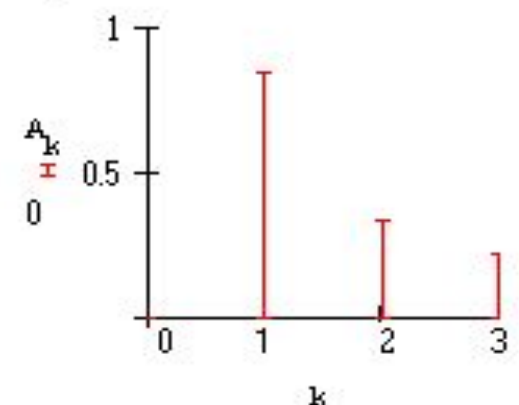
$$F(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^3 A_k \cdot \sin(\omega_1 \cdot k \cdot t + \phi_k)$$



Спектральный анализ функции $f(t) = \cos(t)$ ($0 < t < \pi$) по 3 гармоникам

$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$ Спектр амплитуд

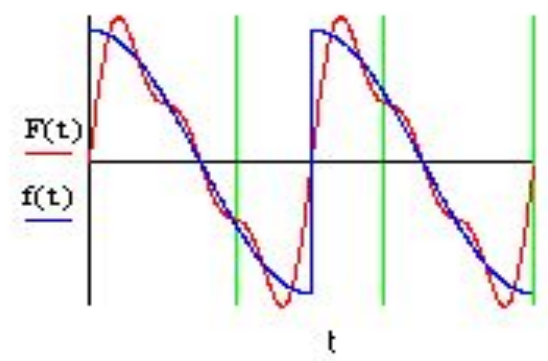
$\phi_k := -\text{atan}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ Спектр фаз



Спектральный синтез:

$t := 0, 0.01.. 2 \cdot \pi$

$$F(t) := \frac{-a_0}{2} + \sum_{k=1}^3 A_k \cdot \cos(\omega_1 \cdot k \cdot t + \phi_k)$$



Спектральный анализ с использованием БПФ

- В Mathcad есть встроенные средства быстрого преобразования Фурье (БПФ), которые существенно упрощают процедуру приближенного спектрального анализа

$$f(t) := \begin{cases} \frac{-\pi - t}{2} & \text{if } -\pi \leq t \leq 0 \\ \frac{\pi - t}{2} & \text{if } 0 < t \leq \pi \end{cases} \quad \begin{array}{l} k := 0..15 \\ t_k := k \cdot \frac{T}{30} \end{array}$$

$$v_k := f(t_k) \quad \text{задание исходной функции дискретно в 16 отсчетах}$$

$$F := \text{fft}(v) \quad \text{прямое преобразование Фурье БПФ переход в частотную область}$$

Встроенные в Mathcad средства быстрого преобразования Фурье (БПФ)

- **fft(v)** - возвращает прямое БПФ 2^m -мерного вещественнозначного вектора v ,
- где v - вектор, элементы которого хранят отсчеты функции $f(t)$.
- Результатом будет вектор A размерности $1 + 2^{m-1}$ с комплексными элементами - отсчетами в частотной области.
- Фактически действительная и мнимая части вектора есть коэффициенты Фурье a_k и b_k ,

- $\text{ifft}(v)$ - возвращает обратное БПФ для вектора v с комплексными элементами.
- Вектор v имеет $1 + 2^{m-1}$ элементов.
- Результатом будет вектор A размерности 2^m с действительными элементами.

Спектральный анализ с использованием БПФ

$f_1(t) := \cos(t)$ $f(t) := \text{if}(t < \pi, f_1(t), -f_1(t))$ - анализируемая функция $T := \pi$ - период

$k := 0..15$ $t_k := k \cdot \frac{T}{16}$ $v_k := f(t_k)$ задание исходной функции дискретно в 16 отсчетах

$F := \text{fft}(v)$ Прямое БПФ - переход в частотную область

$F = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 + 1.7i \\ 0.2 + 0.6i \\ 0.3 + 0.4i \\ 0.3 + 0.3i \\ 0.2 + 0.2i \\ 0.3 + 0.1i \\ 0.3 + 0.1i \\ 0.3 \end{bmatrix}$

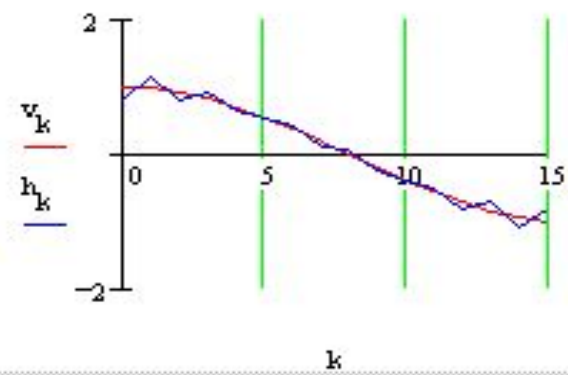
$d := 6$ Задание максимального числа гармоник

$i := 0..d$ Расчет амплитуды и фазы первых 6 гармоник

$A_i := \sqrt{(\text{Re}(F_i))^2 + (\text{Im}(F_i))^2}$ - Спектр амплитуд $\phi_i := -\text{arg}(F_i)$ - Спектр фаз

$j := 0..8$ $g_j := \text{if}(j \leq d, F_j, 0)$ Ограничение числа гармоник

$h := \text{ifft}(g)$ Обратное БПФ - переход во временную область



- График построен на отрезке $[0, \pi]$

$$F = \begin{pmatrix} 2.356 \\ -0.576 + 1.053i \\ -0.576 + 0.506i \\ -0.576 + 0.313i \\ -0.576 + 0.209i \\ -0.576 + 0.14i \\ -0.576 + 0.087i \\ -0.576 + 0.042i \\ -0.576 \end{pmatrix}$$

$$d := 6 \quad \text{задание max числа гармоник}$$

$$i := 0..d$$

расчет амплитуды и фазы первых 6 гармоник

$$A_i := \sqrt{(\operatorname{Re}\{F_i\})^2 + (\operatorname{Im}\{F_i\})^2} \quad \text{спектр амплитуд}$$

$$\phi_i := -\arg\{F_i\} \quad \text{спектр фаз}$$

$A_i =$

2.356
1.2
0.766
0.656
0.613
0.593
0.582

$\phi_i =$

0
-2.071
-2.421
-2.643
-2.793
-2.903
-2.992

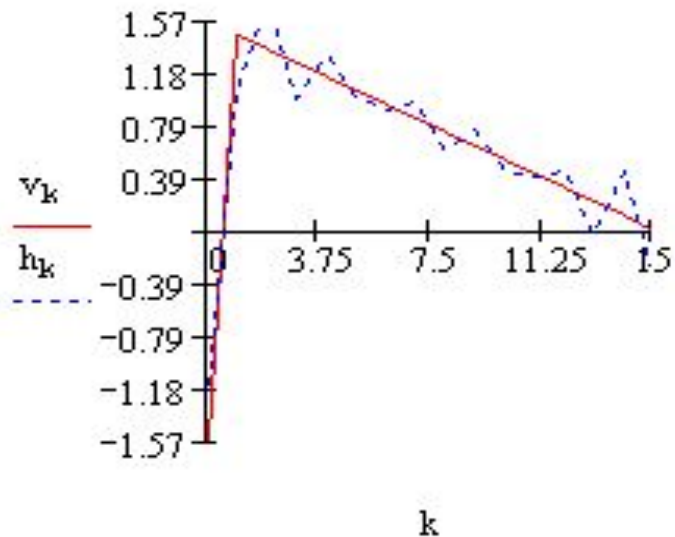
Обратное БПФ

$j := 0..8$

$g_j := \pi(j \leq d, F_j, 0)$ ограничение числа гармоник

$h := \text{ifft}(g)$

Обратное БПФ переход во временную область



Фильтрация аналоговых сигналов

$$f(t) := \begin{cases} \frac{-\pi - t}{2} & \text{if } -\pi \leq t \leq 0 \\ \frac{\pi - t}{2} & \text{if } 0 < t \leq \pi \end{cases} \quad \begin{array}{l} T := 2 \cdot \pi \\ k := 0..127 \\ t_k := k \cdot \frac{T}{256} \end{array}$$

$v_k := f\{t_k\}$ задание исходной функции дискретно в 128 отсчетах

$s_k := v_k + \text{rnd}(0.8)$ наложение на полезный сигнал шумовой компоненты

$\alpha := 0.8$ параметр фильтрации $d := 8$ max число гармоник

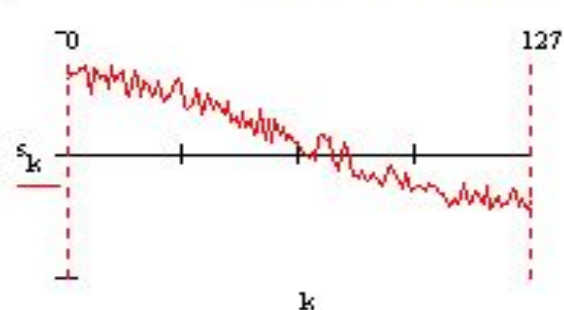
$f := \text{fft}(s)$ с помощью БПФ сигнал переводится в частотную область, высшие гармоники отсеиваются и ОБПФ обеспечиваем возврат сигнала. Степень фильтрации определяется α

Фильтрация аналоговых сигналов

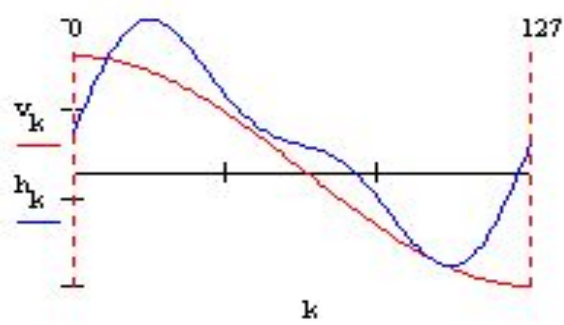
$f_1(t) := \cos(t)$ $f(t) := \text{if}(t < \pi, f_1(t), -f_1(t))$ - анализируемая функция $T := \pi$ - период

$k := 0..127$ $t_k := \frac{T}{128} \cdot k$ $v_k := f(t_k)$ задание исходной функции дискретно в 128 отсчетах

$s_k := v_k + \text{rnd}(0.5)$ наложение на полезный сигнал шумовой компоненты



$\alpha := 2$ $f := \text{fft}(s)$ С помощью прямого БПФ
 $j := 0..64$ временное представление
 $g_j := f_j \cdot \Phi(|f_j| - \alpha)$ сигнала s
 переводится в частотную
 $h := \text{ifft}(g)$ область, высшие гармоники
 сигнала отсеиваются и затем с
 помощью обратного БПФ
 обеспечивается возврат к
 временному представлению
 сигнала. Степень филь-
 трации определяется значением
 параметра α .



Графики исходного сигнала v
 и сигнала, полученного
 фильтрацией зашумленного
 сигнала s

- **Фильтрация** - выделение полезного сигнала из его смеси с мешающим сигналом - шумом.
- Наиболее распространенный тип фильтрации - **частотная фильтрация**.
- Если известна область частот, занимаемых полезным сигналом, достаточно выделить эту область и подавить те области, которые заняты шумом

График полезного сигнала с шумом

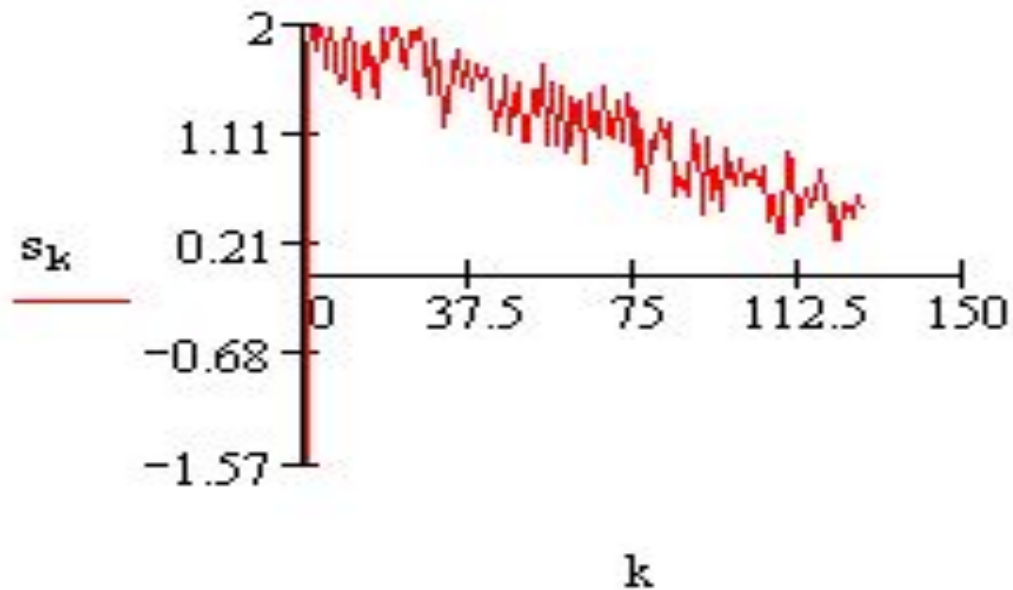


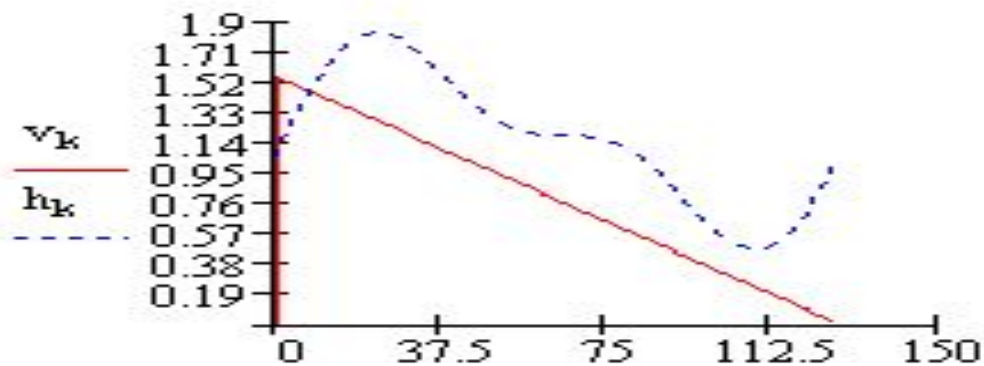
График сигнала после фильтрации

```
j := 0..64  
FX(t) :=  $\begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$ 
```

```
gj := fj · FX(|fj| - α)
```

```
h := ifft(g)
```

ОБПФ



Результат фильтрации

- Сравнение временных зависимостей исходного и выходного сигналов, показывает, что выходной сигнал почти полностью повторяет входной
- и в значительной мере избавлен от высокочастотных шумовых помех, маскирующих полезный сигнал

- **Задание 1.** Вычислить первые шесть пар коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $f(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.
- Построить графики 1, 2 и 3 гармоник.
- Выполнить гармонический синтез функции $f(t)$ по 1, 2 и 3 гармоникам. Результаты синтеза отобразить графически.

- **Задание 2.** Выполнить классический спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.
- **Задание 3.** Выполнить численный спектральный анализ и синтез функции $f(t)$. Для этого необходимо задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 32 отсчетах. Отобразить графически спектры амплитуд и фаз, результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

- **Задание 4.** Выполнить спектральный анализ и синтез функции $f(t)$ с помощью БПФ. Для этого необходимо:
- задать исходную функцию $f(t)$ дискретно в 128 отсчетах;
- выполнить прямое БПФ с помощью функции fft и отобразить графически найденные спектры амплитуд и фаз первых шести гармоник;
- выполнить обратное БПФ с помощью функции $ifft$ и отобразить графически результат спектрального синтеза функции $f(t)$.

- **Задание 5.** Выполнить фильтрацию функции $f(t)$ с помощью БПФ:
- синтезировать функцию $f(t)$ в виде полезного сигнала, представленного 128 отсчетами вектора v ;
- к полезному сигналу v присоединить шум с помощью функции rnd ($rnd(2) - 1$) и сформировать вектор из 128 отсчетов зашумленного сигнала s ;
- преобразовать сигнал с шумом s из временной области в частотную, используя прямое БПФ (функция fft). В результате получится сигнал f из 64 частотных составляющих;
- выполнить фильтрующее преобразование с помощью функции Хевисайда (параметр фильтрации $a = 2$);
- с помощью функции $ifft$ выполнить обратное БПФ и получить вектор выходного сигнала h ;
- построить графики полезного сигнала v и сигнала, полученного фильтрацией зашумленного сигнала s .
-

Варианты заданий

№·¶ варианта	$f(t)$	№·¶ варианта	$f(t)$	№·¶ варианта	$f(t)$
1	$\frac{\cos t}{1 + \cos^2 2t}$	6	$\cos \cdot t \cdot \cos \cdot \sin \cdot t $	11	$\sin\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
2	$\frac{\sin t}{1 + \cos^2 2t}$	7	$\operatorname{arctg}\left(\cos \frac{1}{2}t\right)$	12	$\cos\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
3	$\frac{\sin 2t + \sin^2 3t}{3 + \sin t + \cos 2t}$	8	$e^{\frac{\sin 1}{3}t}$	13	$e^{-10(t-\pi)^2}$
4	$\frac{\sin 3t}{ \sin t + \cos t }$	9	$ \cdot \sin \cdot t \cdot + \cdot \cdot \sin \cdot 2t \cdot $	14	$e^{\frac{\cos 1}{3}t}$