О распределении простых чисел

Простые числа!

- Простое число – не имеет делителей, кроме себя и 1, и не равно 1:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, …

Простые числа!

- Простое число – не имеет делителей, кроме себя и 1, и не равно 1:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, …

- **Основная теорема арифметики:** каждое натуральное число единственным образом раскладывается в произведение простых.

Простые числа!

3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73
79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157
163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241
251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347
349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439
443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547
557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643
647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751
757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859
863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977
983 991 997 1009 1013 1019 1021 1031 1033 1039 1049 1051 1061
1063 1069 1087 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151 1153
1163 1171 1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223 1229 1231 1237 1249
1259 1277 1279 1283 1289 1291 1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327
1361 1367 1373 1381 1399 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451
1453 1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511 1523 1531 1543
1549 1553 1559 1567 1571 1579 1583 1597 1601 1607 1609 1613 1619
1621 1627 1637 1657 1663 1667 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723
1733 1741 1747 1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 1811 1823 1831
1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879 1889 1901 1907 1913 1931 1933
1949 1951 1973 1979 1987 1993 1997 1999

Простых чисел бесконечно много

Евклид: предположим, что это не так, и что всего есть n простых чисел $p_1, \ldots, p_n$.

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Простых чисел бесконечно много

Евклид: предположим, что это не так, и что всего есть n простых чисел $p_1, \ldots, p_n$.

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Нет делимости ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$, т.к. в остатке получается 1.

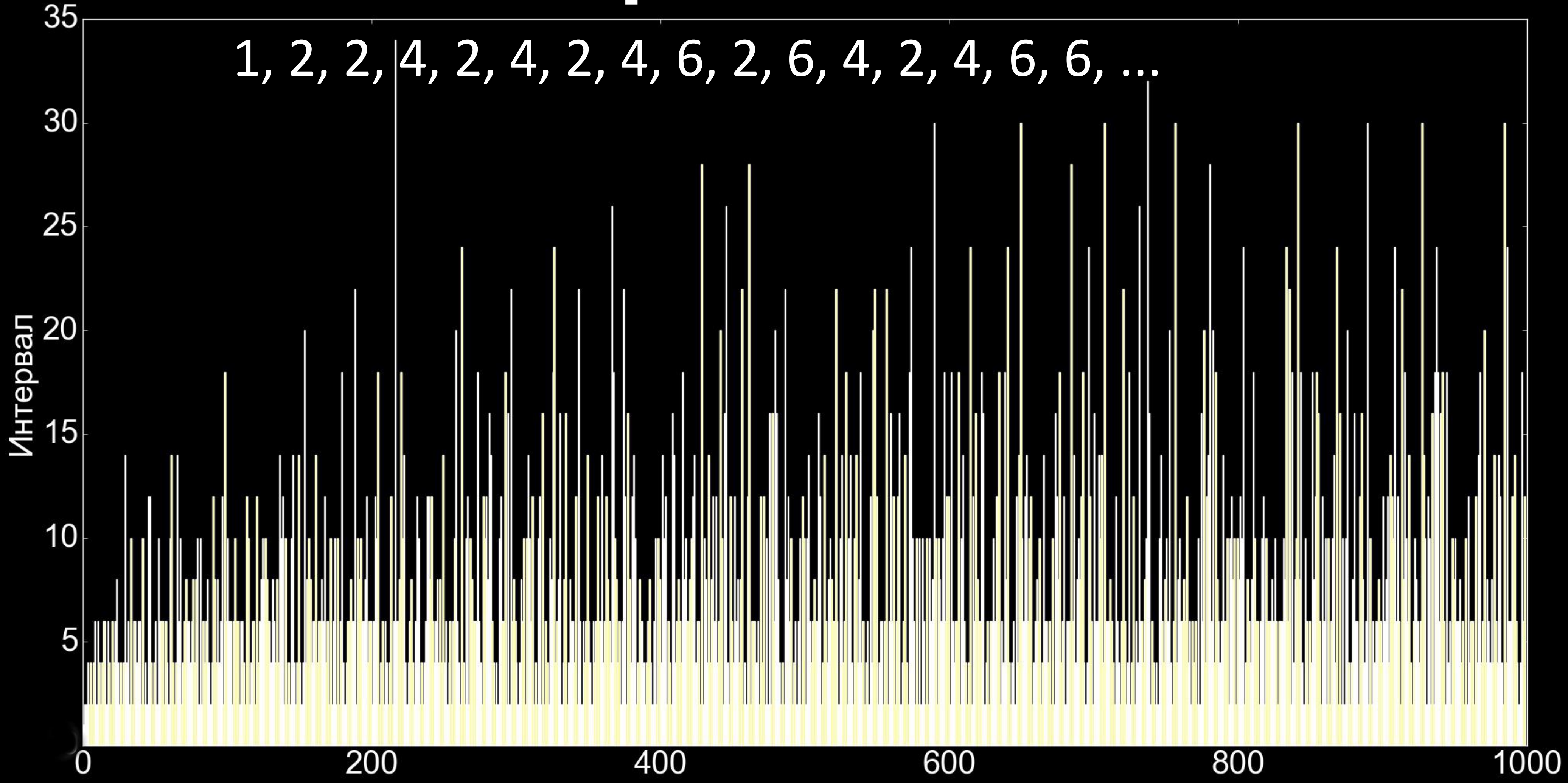
Вывод: есть еще какие-то простые числа, кроме этих n.

Противоречие.

Промежутки между соседними простыми

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, ...

Промежутки между соседними простыми



Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2:
3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, …, 41 и 43, …, 1’000’000’007 и 1’000’000’009…

Бесконечно ли много таких пар?

Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2:
3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, …, 41 и 43, …, 1’000’000’007 и 1’000’000’009…

Бесконечно ли много таких пар?

Апрель 2013: пар, отличающихся не более чем на 70’000’000, бесконечно много.
Апрель 2014: пар, отличающихся не более чем на 246, бесконечно много.

Проблема простых-близнецов

Простые-близнецы – пары простых чисел, отличающихся на 2:
3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, …, 41 и 43, …, 1’000’000’007 и 1’000’000’009…

Бесконечно ли много таких пар? – нерешенная проблема.

Апрель 2013: пар, отличающихся не более чем на 70’000’000, бесконечно много.
Апрель 2014: пар, отличающихся не более чем на 246, бесконечно много.

Насколько большими бывают промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

Насколько большими бывают промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

Обозначение: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

$$\left.\begin{array}{l} 100! + 2 \\ 100! + 3 \\ 100! + 4 \\ \ldots \\ 100! + 100 \end{array}\right\} \text{99 подряд идущих непростых чисел.}$$

Насколько большими бывают промежутки?

Легкое упражнение: промежутки между соседними простыми могут быть сколь угодно большими.

Обозначение: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

$$\left.\begin{array}{l} 100! + 2 \\ 100! + 3 \\ 100! + 4 \\ \ldots \\ 100! + 100 \end{array}\right\} \text{99 подряд идущих непростых чисел.}$$

Вместо 100 можно было взять 1000000, 1000000000…

Постулат Бертрана

На отрезке $[n;\ 2n]$ всегда есть простое число.

Постулат Бертрана

На отрезке [n; $2n$] всегда есть простое число.

Первое доказательство: П.Л. Чебышёв, 1850 г.

Самое простое доказательство:
П. Эрдёш, 1932 г. (несколько страниц)

Постулат Бертрана

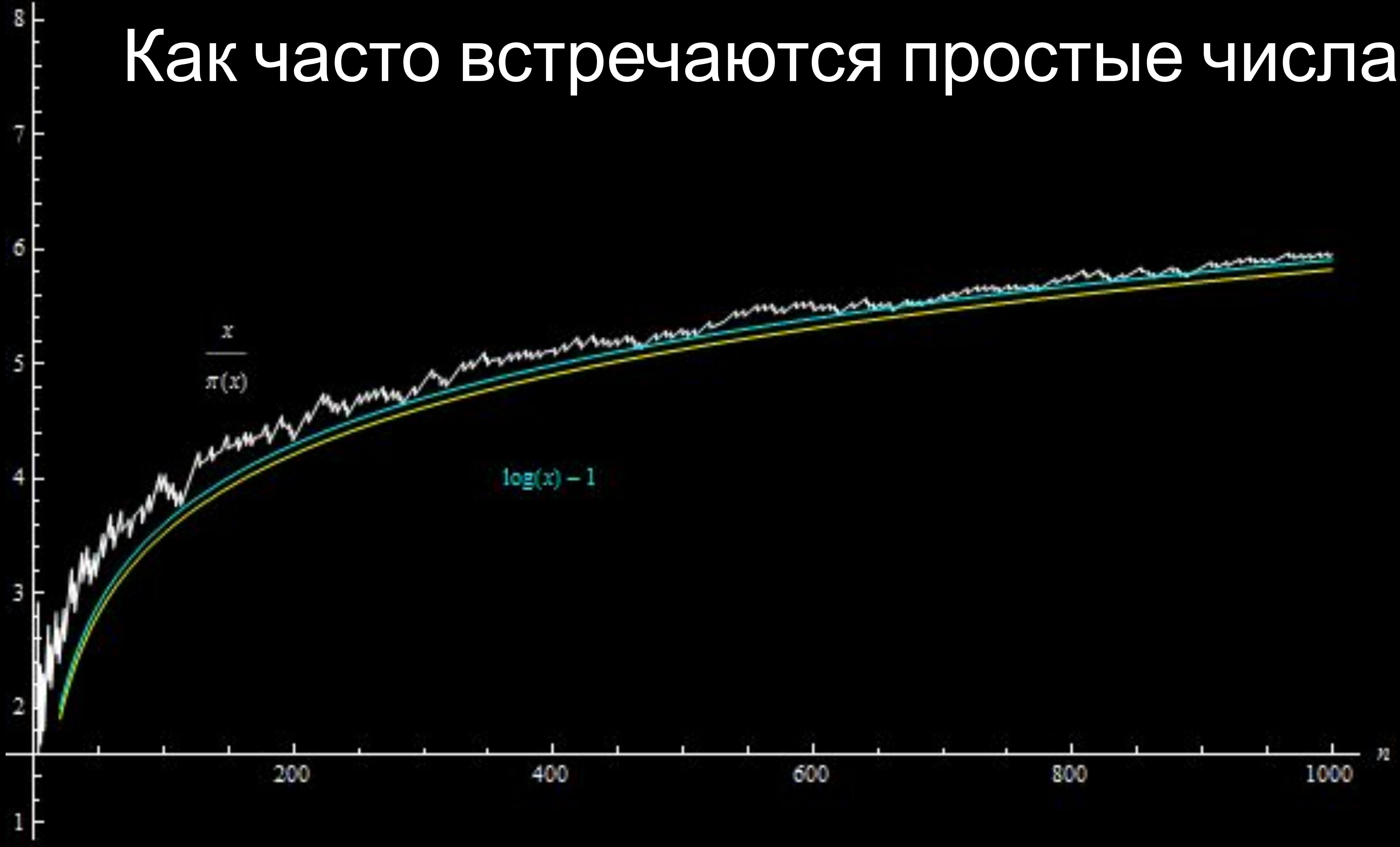
На отрезке $[n; 2n]$ всегда есть простое число.

Вопрос: Насколько малым можно взять $f(n)$, чтобы на отрезке $[n; n + n \cdot f(n)]$ всегда было простое число?

Наилучший результат на сегодня: $f(n) = n^{-19/40}$.

Как часто встречаются простые числа?

Как часто встречаются простые числа?



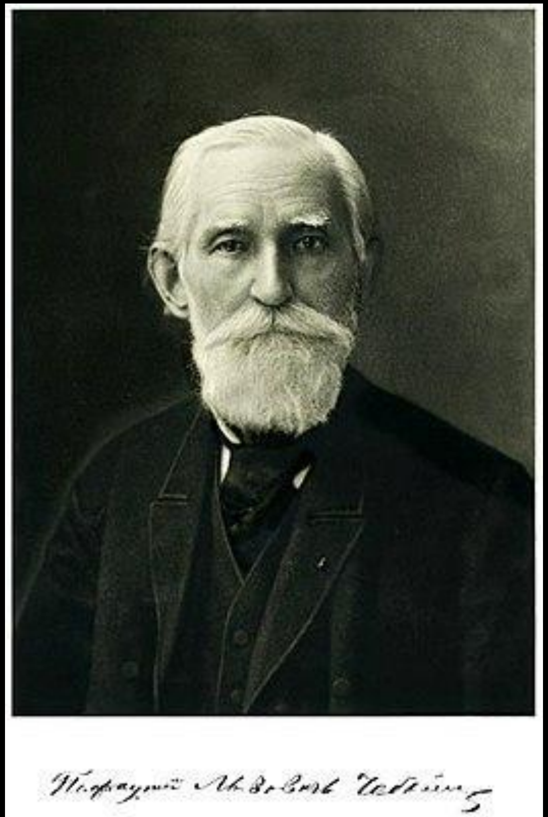
Как часто встречаются простые числа?

ln x – натуральный логарифм: степень, в которую нужно возвести число e, чтобы получить x

$$\ln x = a \Leftrightarrow e^a = x$$

$$e \approx 2{,}718281828459045\ldots$$

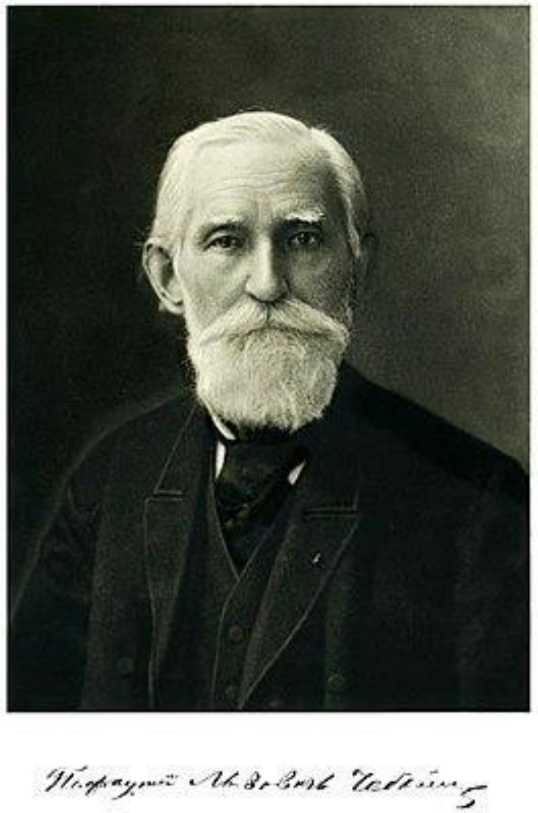
Как часто встречаются простые числа?



П.Л.Чебышёв, 1850 г.:
Количество простых чисел на отрезке [1; *n*] растет **примерно** (с точностью до умножения на константу) как

$$\frac{n}{\ln n}$$

Как часто встречаются простые числа?



П.Л.Чебышёв, 1850 г.:
Количество простых чисел на отрезке [1; *n*] растет **примерно** (с точностью до умножения на константу) как

$$\frac{n}{\ln n}$$

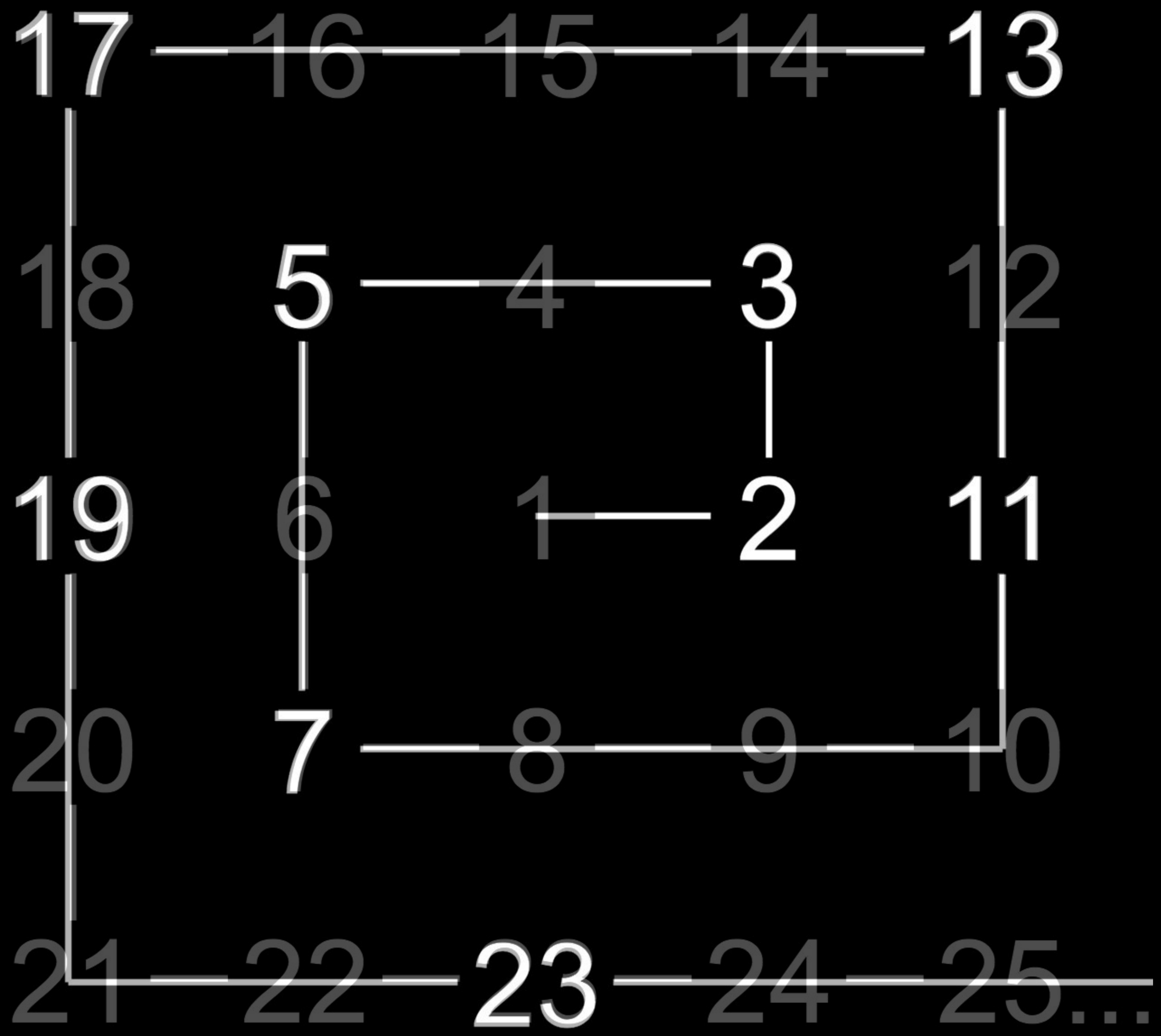
Адамар, Валле-Пуссен, 1896 г.:
Константа равна 1.

Как часто встречаются простые числа?

Пример: сколько простых чисел есть среди первых 10^{100} чисел?

$$\frac{10^{100}}{\ln 10^{100}} = \frac{10^{100}}{100 \ln 10} \approx \frac{10^{100}}{230}$$

```
17—16—15—14—13
|            |
18   5—4—3   12
|    |   |   |
19   6 1—2   11
|    |       |
20   7—8—9—10
|
21—22—23—24—25...
```


17 16 15 14 13
18 5 4 3 12
19 6 1 2 11
20 7 8 9 10
21 22 23 24 25...