ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 15

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВЫПУКЛЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВЫПУКЛЫМИ МНОЖЕСТВАМИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

4.3. Опорная функция подмножества пространства R^n. (продолжение)

4.4. Опорные функции выпуклых оболочек подмножеств пространства R^n.

4.3. Опорная функция подмножества пространства R^n. (продолжение)

Свойство 7. ***Пусть*** $U, U_0 \subset R^n$ ***компактные множества и*** $v, v_0 \in R^n$.

Тогда

$$\left|\chi_U(v) - \chi_{U_0}(v_0)\right| \le \|v_0\| \rho(U, U_0) + |U_0| \|v - v_0\| + 2\rho(U, U_0)\|v - v_0\|,$$

где

$$\rho(U, U_0) = \min\left\{R \ge 0 \,\middle|\, U \subset U_0 + \bar{O}(0, R), U_0 \subset U + \bar{O}(0, R)\right\} -$$

расстояние Хаусдорфа между множествами U ***и*** U_0;

$$|U_0| = \max_{u \in U_0} \|u\| -$$ ***модуль множества*** U_0.

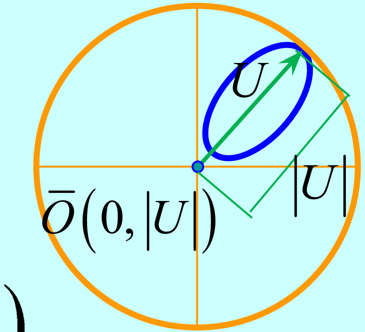
Доказательство. Из **свойства 2** $\chi_U(v_1 + v_2) \le \chi_U(v_1) + \chi_U(v_2)$ опорных функций следует

$$\chi_U(v) = \chi_U(v - v_0 + v_0) \le \chi_U(v - v_0) + \chi_U(v_0) \Rightarrow$$

$$\chi_U(v) \le \chi_U(v - v_0) + \chi_U(v_0). \quad (3)$$

Оцените каждое из слагаемых в правой части (3).

Из вложения $U \subset \bar{O}(0,|U|)$ по **свойству 6** следует неравенство



$$\chi_U(v-v_0) \le \chi_{\bar{O}(0,|U|)}(v-v_0) = \overbrace{|U|\|v-v_0\|}^{\text{шар}:=|U|\cdot\|v-v_0\|} \Rightarrow$$

$$\chi_U(v-v_0) \le |U|\|v-v_0\|. \qquad (4)$$

По определению расстояния Хаусдорфа выводим

$$U \subset U_0^{\rho(U,U_0)} = U_0 + O(0,\rho(U,U_0)).$$

Тогда

$$\chi_U(v_0) \overset{\text{свойство 6}}{\le} \chi_{U_0+O(0,\rho(U,U_0))}(v_0) \overset{\text{свойство 4}}{=}$$

$$\overset{\text{свойство 4}}{=} \chi_{U_0}(v_0) + \overbrace{\chi_{O(0,\rho(U,U_0))}(v_0)}^{=\rho(U,U_0)\|v_0\|} = \chi_{U_0}(v_0) + \rho(U,U_0)\|v_0\| \Rightarrow$$

$$\chi_U(v_0) \le \chi_{U_0}(v_0) + \rho(U,U_0)\|v_0\|. \qquad (5)$$

Подставим полученные неравенства (4) и (5) в (3).

$$\chi_U(v) \le \overbrace{\chi_U(v-v_0)}^{(4)\Rightarrow \le |U|\|v-v_0\|} + \overbrace{\chi_U(v_0)}^{(5)\Rightarrow \le \chi_{U_0}(v_0)+\rho(U,U_0)\|v_0\|} \qquad (3) \Rightarrow$$

$$\chi_U(v) \le |U|\|v-v_0\| + \chi_{U_0}(v_0) + \rho(U,U_0)\|v_0\| \quad \Rightarrow$$

$$\chi_U(v) - \chi_{U_0}(v_0) \le |U|\|v-v_0\| + \rho(U,U_0)\|v_0\|. \qquad (6)$$

Меняя местами $U, U_0 \subset R^n$ и $v, v_0 \in R^n$, получим

$$\chi_{U_0}(v_0) - \chi_U(v) \le |U_0|\|v_0-v\| + \rho(U_0,U)\|v\|. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) в силу очевидного равенства $|x| = \max\{-x, x\}\ \forall x \in R^1$ выводим

$$\left|\chi_U(v) - \chi_{U_0}(v_0)\right| =$$

$$= \max\left\{ \overbrace{\chi_U(v) - \chi_{U_0}(v_0)}^{\le |U|\|v-v_0\| + \rho(U,U_0)\|v_0\|\ (6)},\ \overbrace{\chi_{U_0}(v_0) - \chi_U(v)}^{\le |U_0|\|v_0-v\| + \rho(U_0,U)\|v\|\ (7)} \right\} \le$$

$$= \max\left\{ \overbrace{\chi_U(v)-\chi_{U_0}(v_0)}^{\le |U|\|v-v_0\|+\rho(U,U_0)\|v_0\| \ (6)} ,\ \overbrace{\chi_{U_0}(v_0)-\chi_U(v)}^{\le |U_0|\|v_0-v\|+\rho(U_0,U)\|v\| \ (7)} \right\} \le$$

$$\le \max\left\{ |U|\|v-v_0\|+\rho(U,U_0)\|v_0\|,\quad |U_0|\|v_0-v\|+\rho(U_0,U)\|v\| \right\} \le$$

$$\le \max\left\{ |U|\|v-v_0\|,\ |U_0|\|v_0-v\| \right\} + \max\left\{ \rho(U,U_0)\|v_0\|,\ \rho(U_0,U)\|v\| \right\} =$$

$$= \|v-v_0\| \max\left\{ |U|, |U_0| \right\} + \ \rho(U,U_0) \max\left\{ \|v_0\|, \|v\| \right\} \Rightarrow$$

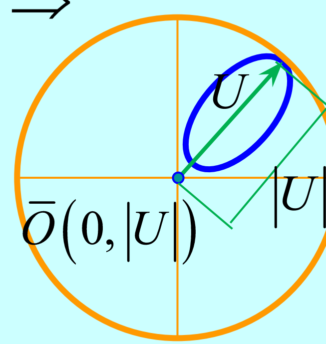
$$\left| \chi_U(v)-\chi_{U_0}(v_0) \right| \le$$

$$\le \|v-v_0\| \max\left\{ |U|, |U_0| \right\} + \ \rho(U,U_0) \max\left\{ \|v_0\|, \|v\| \right\}. \qquad (8)$$

Заметим, что

$$|U| = \rho\left(U,\{0\}\right) \le \rho(U,U_0) + \overbrace{\rho\left(U_0,\{0\}\right)}^{|U_0|} = \rho(U,U_0) + |U_0| \Rightarrow$$

$$\max\left\{ \overbrace{|U|}^{\le \rho(U,U_0)+|U_0|} ,|U_0| \right\} \le \rho(U,U_0) + |U_0|. \qquad (9)$$



$$\|v\| = \|v - v_0 + v_0\| \le \|v - v_0\| + \|v_0\| \Rightarrow$$

$$\max\left\{\|v_0\|, \overbrace{\|v\|}^{\le \|v - v_0\| + \|v_0\|}\right\} \le \|v - v_0\| + \|v_0\|, \quad (10)$$

Подставим (9) $\max\{|U|, |U_0|\} \le \rho(U, U_0) + |U_0| \quad (9)$ и (10) в (8)

$$(8): \quad \left|\chi_U(v) - \chi_{U_0}(v_0)\right| \le \|v - v_0\| \cdot \overbrace{\max\{|U|, |U_0|\}}^{\le \rho(U,U_0) + |U_0| \ (9)} +$$

$$+\rho(U, U_0) \overbrace{\max\{\|v_0\|, \|v\|\}}^{\le \|v - v_0\| + \|v_0\|, \ (10)} \le$$

$$\le \|v - v_0\| \left(\rho(U, U_0) + |U_0|\right) + \rho(U, U_0)\left(\|v - v_0\| + \|v_0\|\right) =$$

$$= \|v - v_0\| \cdot \rho(U, U_0) + \|v - v_0\| \cdot |U_0| + \rho(U, U_0) \cdot \|v - v_0\| + \rho(U, U_0) \cdot \|v_0\| =$$

$$= \|v_0\| \rho(U, U_0) + |U_0| \|v - v_0\| + 2\rho(U, U_0) \|v - v_0\|,$$

что и требовалось доказать. $\left|\chi_U(v) - \chi_{U_0}(v_0)\right| \le \|v_0\| \rho(U, U_0) + |U_0| \|v - v_0\| + 2\rho(U, U_0) \|v - v_0\|$

Следствие. ***Опорная функция*** $\chi_U(v)$ ***непрерывна по совокупности переменных*** $v \in R^n, U \subset R^n$ ***и, следовательно, по каждому из них в отдельности.***

4.4. Опорные функции выпуклых оболочек подмножеств пространства R^n.

Пусть $U \subset R^n$ компактное множество. Ранее было доказано, что множество coU также компактно. Установим некоторые свойства опорных функций выпуклых оболочек компактных подмножеств пространства R^n.

Свойство 1. ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***компактное множество. Тогда***

$$\chi_U(v) = \chi_{coU}(v), \forall v \in R^n.$$

Доказательство. ***Из вложения*** $U \subset coU$ ***следует***

$$\chi_U(v) \le \chi_{coU}(v), \forall v \in R^n. \qquad (1)$$

Докажем неравенство в другую сторону. Имеем

$$u=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i u_i,\ u_i\in U,\ \lambda_i\ge 0,\quad i=1,\dots,n+1,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$$

$$\chi_{coU}(v)=\max_{u\in coU}\langle u,v\rangle=\max_{\substack{u_i\in U,\ \lambda_i\ge 0,\\ i=1,\dots,n+1,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1}}\left\langle\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i u_i,v\right\rangle=$$

$$=\max_{\substack{\lambda_i\ge 0,\ u_i\in U,\\ i=1,\dots,n+1,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1}}\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\langle u_i,v\rangle}_{\le\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\max_{u\in U}\langle u,v\rangle}\le\max_{\substack{\lambda_i\ge 0,\ i=1,\dots,n+1\\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1,}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\underbrace{\max_{u\in U}\langle u,v\rangle}_{\chi_U(v)}\right)=$$

$$=\max_{\substack{\lambda_i\ge 0,\ i=1,\dots,n+1\\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1,}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\chi_U(v)\right)=\chi_U(v)\max_{\substack{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1,\\ \lambda_i\ge 0,\ i=1,\dots,n+1}}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i}_{1}\right)=\chi_U(v)\Rightarrow$$

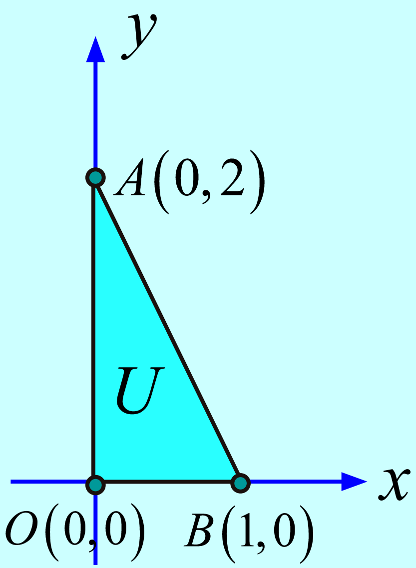
$$\chi_{coU}(v)\le\chi_U(v),\ \forall v\in R^n.\qquad (2)$$

Из (1) $\chi_U(v)\le\chi_{coU}(v),\ \forall v\in R^n$ (1) и (2) следует справедливость доказываемого свойства.

Упражнение. Найти опорную функцию множества

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, 2x + y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \right\}$$ и вычислить ее в точке $v_* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решение.



$$\tilde{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad U = co\tilde{U} = co\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Для всех $v \in R^2$ имеем $\chi_U(v) = \chi_{\tilde{U}}(v) = \max\limits_{u \in \tilde{U}} \langle v, u \rangle =$

$$= \max \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} =$$

$$= \max \{0, v_1, 2v_2\},$$

$$\chi_U(v_*) = \max\{0, 3, 2 \cdot 2\} = 4.$$