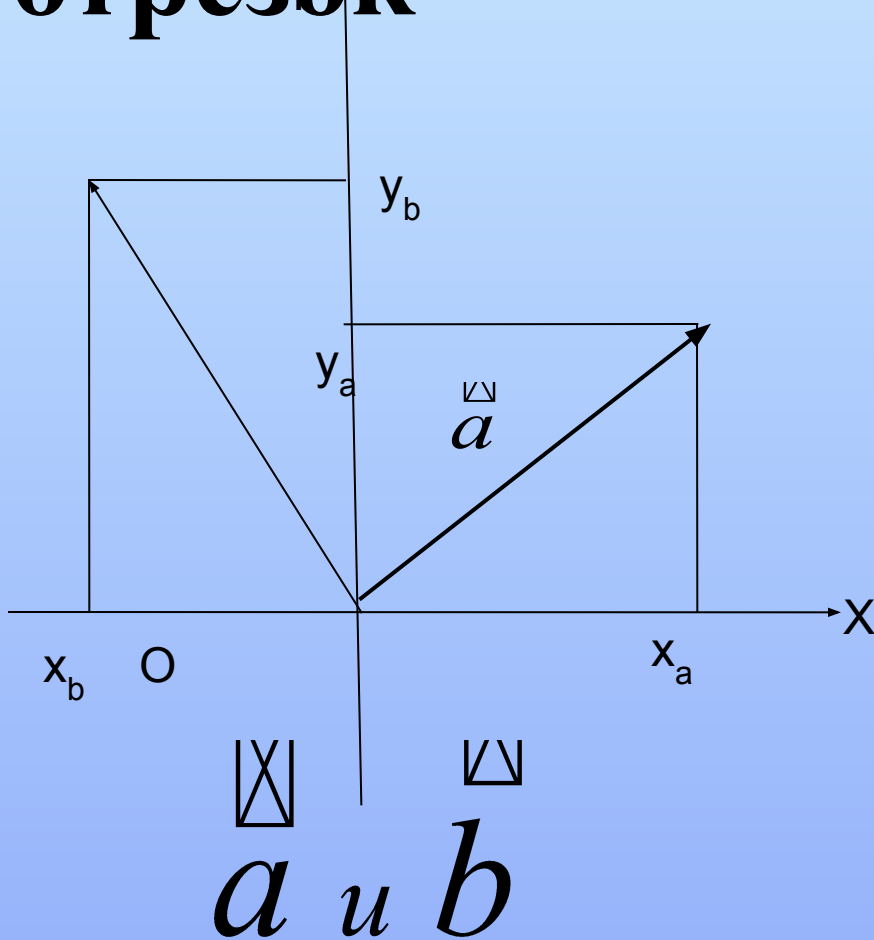


СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Геометрия 9 класс

Вектор – направленный отрезок



$$\vec{a}(x_a, y_a)$$

$$\vec{b}(x_b, y_b)$$

- Координаты вектора с концами в точках $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

- Длина вектора $a(x, y)$:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Координаты суммы векторов $a(x_A, y_A)$ и $b(x_B, y_B)$:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_B + x_A, y_B + y_A)$$

- Координаты произведения вектора $a(x, y)$ на число λ :

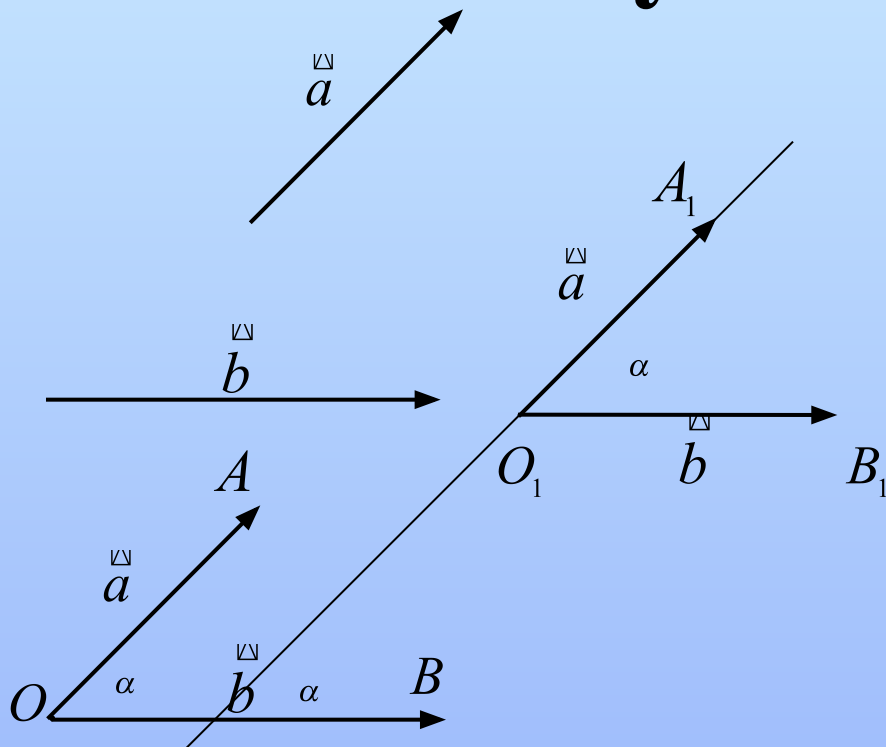
$$\lambda \cdot \overrightarrow{a} = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

Диктант

Даны точки **A(2; -3), B(-1; 2), C(0; -4)**

1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AB} = (-3, 5)$
2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BC} = (1, -6)$
3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$
4. Найдите длину вектора $\overrightarrow{BC}$ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$
5. Произведение $5 \cdot \overrightarrow{AB}$: $5 \cdot \overrightarrow{AB} = (-15, 25)$

Угол между векторами



$\vec{a}$ и $\vec{b}$

$O; \vec{OA} = \vec{a}; \vec{OB} = \vec{b}$

$\angle AOB = \alpha$

α — Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \alpha$

Если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$; $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$; $\vec{a} = 0, \vec{b} = 0$

то $\alpha = 0^\circ$

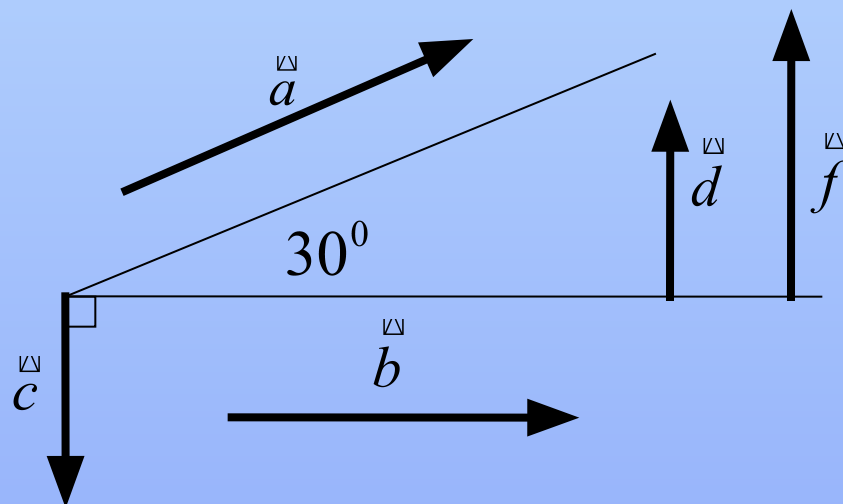
$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

Пример

$$\angle a; b = 30^\circ; \quad \angle a; c = 120^\circ$$

$$\angle b; c = 90^\circ; \quad \angle d; f = 0^\circ \quad \angle d; c = 180^\circ$$

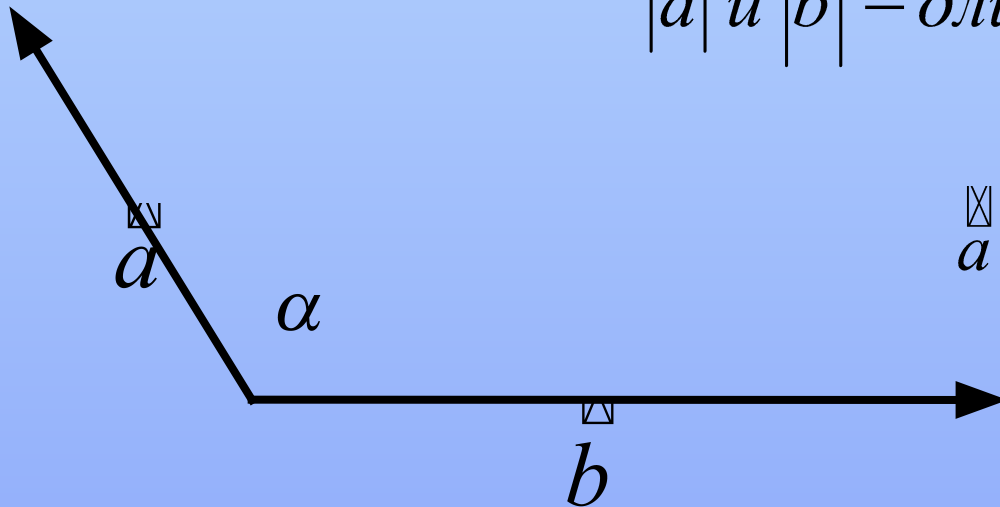
$$a \perp b, \text{ если } \alpha = 90^\circ$$



Скалярным произведением векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ – скалярное произведение векторов

$|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ – длины векторов

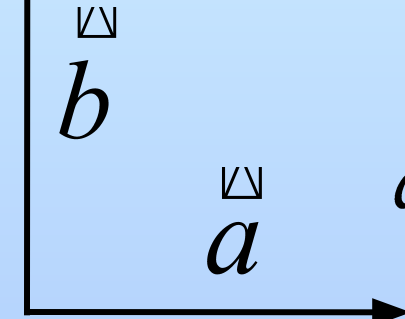


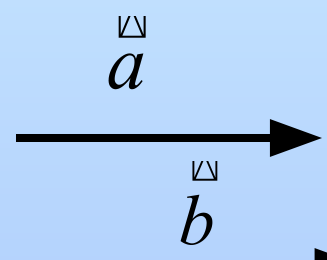
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Примеры:

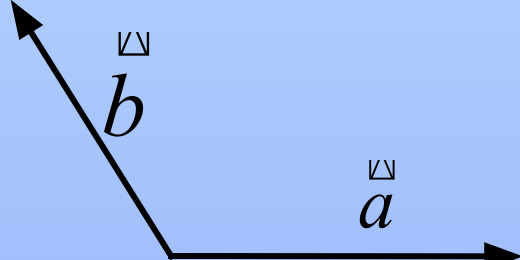
1. $\overline{|\vec{a}| = 2}, \overline{|\vec{b}| = 3}, \overline{\alpha = 60^0}$ $\overline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(60^0) = 3}$
2. $\overline{|\vec{a}| = 5}, \overline{|\vec{b}| = 1}, \overline{\alpha = 30^0}$ $\overline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 \cdot \cos(30^0) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}}$
3. $\overline{|\vec{a}| = 7}, \overline{|\vec{b}| = 4}, \overline{\alpha = 45^0}$ $\overline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 4 \cdot \cos(45^0) = 14 \cdot \sqrt{2}}$
4. $\overline{|\vec{a}| = 1}, \overline{|\vec{b}| = 1}, \overline{\alpha = 120^0}$ $\overline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(120^0) = \frac{-1}{2}}$
5. $\overline{|\vec{a}| = 7}, \overline{|\vec{b}| = 5}, \overline{\alpha = 90^0}$ $\overline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 \cdot \cos(90^0) = 0}$

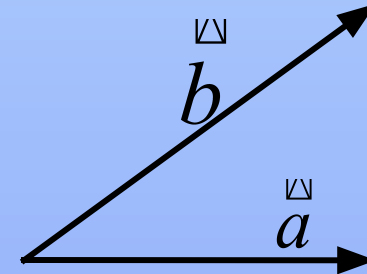
Свойства скалярного произведения:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$


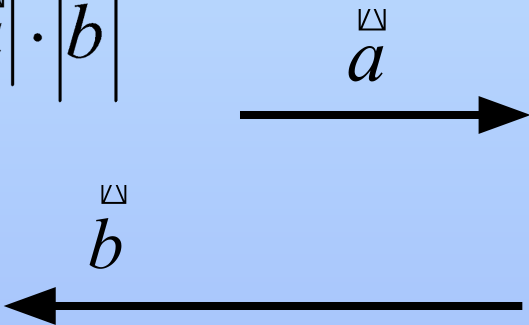
$$\vec{a} \uparrow \vec{b} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



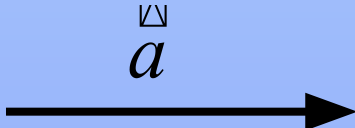
$$(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$


$$(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

Свойства скалярного произведения:

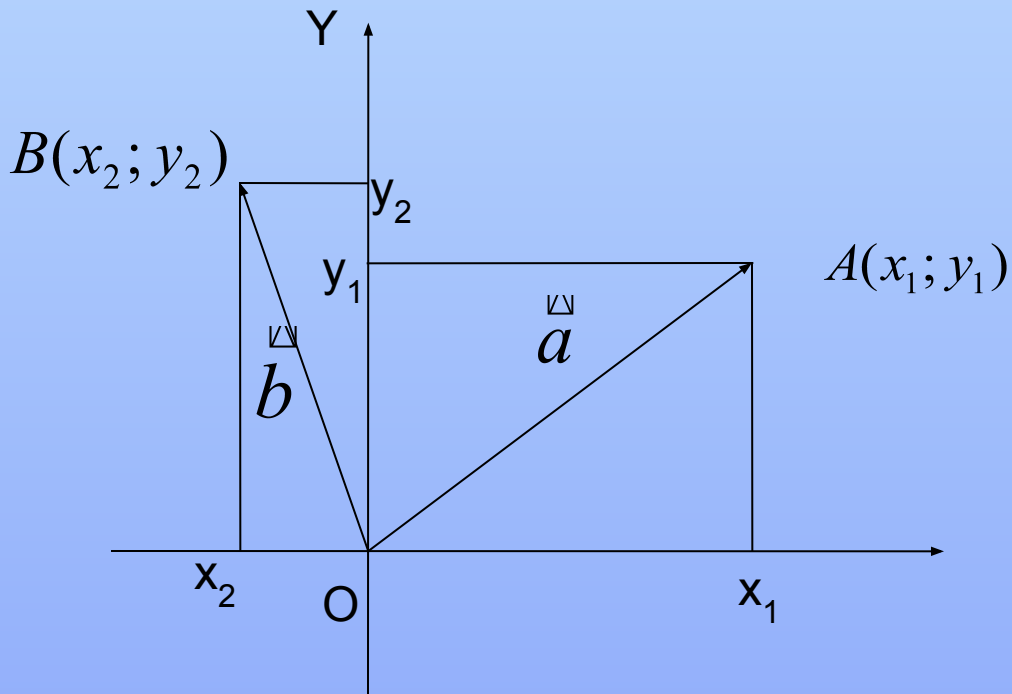
$$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$


$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \text{ — скалярный квадрат вектора}$$

$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$


Скалярным произведением векторов
и называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$



Примеры: скалярное произведение векторов

1. $\vec{a}(5, -4)$ и $\vec{b}(2, 1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 6$

2. $\vec{a}(0, 3)$ и $\vec{b}(7, -1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) = -3$

3. $\vec{a}(5, 2)$ и $\vec{b}(4, -1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = 18$

Вычислите скалярное произведение векторов:

$$\begin{array}{ll} \vec{a} & \vec{b} \\ 1. & a(1,1); b(1,2) \end{array} \quad a \cdot b = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

$$\begin{array}{ll} \vec{a} & \vec{b} \\ 2. & a(-2,5); b(-9,-2) \end{array} \quad a \cdot b = -2 \cdot (-9) + 5 \cdot (-2) = 8$$

$$\begin{array}{ll} \vec{a} & \vec{b} \\ 3. & a(-3,4); b(4,5) \end{array} \quad a \cdot b = -3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 8$$

$$\begin{array}{ll} \vec{a} & \vec{b} \\ 4. & a(5,2); b(-9,4) \end{array} \quad a \cdot b = 5 \cdot (-9) + 2 \cdot 4 = -37$$

$$\begin{array}{ll} \vec{a} & \vec{b} \\ 5. & a(-1,1); b(1,1) \end{array} \quad a \cdot b = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

Следствия

Следствие 1: $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Следствие 2: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Пример. Даны **2** вектора:

$$\vec{a}(1, 3) \quad \vec{b}(5, 2)$$

1. Вычислите скалярное произведение векторов:
2. Вычислите длину вектора a :
3. Вычислите длину вектора b :
4. Вычислите косинус угла между векторами:
5. Сделайте вывод: **тупой**, **прямой** или **острый** угол мы получили

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 11$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{11}{(\sqrt{10} \cdot \sqrt{29})} = \frac{11}{\sqrt{290}}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \implies \text{угол острый}$$

Вычисление угла между векторами с координатами:

$$a(a_1, a_2), b(b_1, b_2)$$

1. Вычислить скалярное произведение векторов:
2. Вычислить длину вектора a :
3. Вычислить длину вектора b :
4. Найти произведение длин векторов:
5. Разделить скалярное произведение векторов на произведение их длин:

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2}$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)}$$

Домашнее задание■

- §§101 – 103,
- вопросы №№ 13 - 18,
- задачи №№ 1044 (в), 1047 (в), 1048 (для углов В и С), 1066.