Оптимальное планирование

11 класс

Объекты планирования:

- деятельность отдельного предприятия,
- деятельность отрасли промышленности или сельского хозяйства,
- деятельность региона,
- деятельность государства.

Постановка задачи планирования:

- Имеются некоторые плановые показатели: x, y и др.;
- Имеются некоторые ресурсы: R1, R2 и др., за счет которых эти плановые показатели могут быть достигнуты. Эти ресурсы практически всегда ограничены.;
- Имеется определенная стратегическая цель, зависящая от значений x, y и других плановых показателей, на которую следует ориентировать планирование.

Нужно определить значение плановых показателей с учетом ограниченности ресурсов при условии достижения стратегической цели. Это и будет оптимальным планом.

Пример

Объект: детский сад,

Плановые показатели:

1) число детей, 2) число воспитателей

Основные ресурсы деятельности детского сада:

1) размер финансирования, 2) площадь помещения

Стратегические цели: сохранение и укрепление здоровья детей (минимизация заболеваемости воспитанников детского сада)

Запишите в тетрадь:

- Оптимальное планирование заключается в определении значений плановых показателей с учетом ограниченности ресурсов при условии достижения стратегической цели.
- Условия ограниченности ресурсов математически представляются в виде системы неравенств.
- Решение задачи оптимального планирования сводится к построению целевой функции и назначению определенных условий для ее величины: чаще всего максимума или минимума.

Пример решения задачи оптимального планирования

Задача: Кондитерский цех готовит пирожки и пирожные. Ограниченность емкости склада – за день можно приготовить не более 700 изделий. Рабочий день – 8 часов.. Если выпускать только пирожные, за день можно произвести не более 250 штук, пирожков можно произвести 1000 штук (без пирожных). Стоимость пирожного вдвое выше, чем стоимость пирожка. Требуется составить дневной план производства, обеспечивающий наибольшую выручку.

Построим математическую модель задачи

Плановыми показателями являются:

x — дневной план выпуска **тортов**;

y — дневной план выпуска **рулетов**.

Ресурсы производства:

длительность рабочего дня — **8** часов;

выработка за день — **700** шт.

Получим соотношения, следующие из условий ограниченности времени работы цеха и суммарного числа изделий.

Из постановки задачи следует, что на изготовление одного **торта** затрачивается в **4** раза больше времени, чем на изготовление одного **рулета**.

Если обозначить время изготовления **рулета** как **t** мин, то время изготовления **торта** будет равно **4 t** мин.

Значит, суммарное время на изготовление

x рулетов и **y тортов**:

$$\mathbf{t\,x + 4\,t\,y = (x + 4\,y) \cdot t}$$

Но это время не может быть больше длительности рабочего дня.

Отсюда следует ограничение в виде неравенства:

$$\mathbf{(x + 4\,y)\,t \le 8 \cdot 60, \text{ или } (x + 4\,y)\,t \le 480}$$

Итак, t — время изготовления одного **рулета**. Поскольку за рабочий день их может быть изготовлено **1000** штук, то на один рулет тратится **480/1000 = 0,48** мин.

Подставляя это значение в неравенство, получим:

$$(x + 4y) \cdot 0{,}48 \le 480$$

Отсюда:

$$x + 4y \le 1000$$

Ограничение на общее число изделий дает следующее неравенство:

$$x + y \le 700$$

Кроме того, не может быть отрицательного числа **рулетов** и **тортов**:

$$x + 4y \le 1000;$$

$$x + y \le 700;$$

$$x \ge 0;$$

$$y \ge 0$$

В итоге получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + 4y \le 1000 \\ x + y \le 700 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Система неравенств представляется на координатной плоскости четырехугольником, ограниченным прямыми, соответствующим линейным уравнениям

$x + 4y = 1000$

$x + y = 700$

$x = 0$

$y = 0$

Любая точка четырехугольника является решением системы неравенств. Но, искомым решением задачи будет та точка, в которой целевая функция максимальна.

<u>Выручка</u> — это стоимость **всей** проданной продукции.

Пусть цена одного **рулета** — **а** рублей.

По условию задачи, цена **торта** в два раза больше, т. е. **2•а** рублей.

Отсюда стоимость всей произведенной за день продукции равна:

$$a\,x + 2\,a\,y = a\,(x + 2\,y)$$

Целью производства является получение максимальной выручки.

Будем рассматривать записанное выражение как функцию от **x, y**:

$F(x, y) = a \cdot (x + 2\,y)$ – целевая функция.

Поскольку значение **а** – число, то максимальное значение

$F(x, y)$ будет достигнуто при максимальной величине

выражения $(x + 2y)$.

Поэтому в качестве целевой функции можно принять

$f\,(x,y) = (x + 2y)$.

Следовательно, требуется найти значения плановых показателей x и y, удовлетворяющих данной системе неравенств и придающих максимальное значение целевой функции **f**.

Использование MS Excel для решения задачи оптимального планирования

Нахождение точки в которой целевая функция максимальна производится с помощью методов линейного программирования. Эти методы имеются в математическом арсенале **MS Excel**.

Осуществляется это с помощью средства **«Поиск решения»**. Команда находится на вкладке **Данные** в группе **Анализ**.

Подготовить электронную таблицу

план

	A	B	C	D	E	F
1	**Оптимальное планирование**					
2						
3	**Плановые показатели**					
4		X (пирожки)	Y (пирожные)			
5						
6						
7	**Ограничения**					
8						
9		*Левая часть*	*Знак*	*Правая часть*		
10	*Время производства:*	= B5+4*C5	<=	1000		
11	*Общее количество:*	= B5+C5	<=	700		
12	*Положительность X:*	=B5	>=	0		
13	*Положительность Y:*	=C5	>=	0		
14						
15	**Целевая функция**	=B5+2*C5				
16						

Сервис / «Поиск решения»

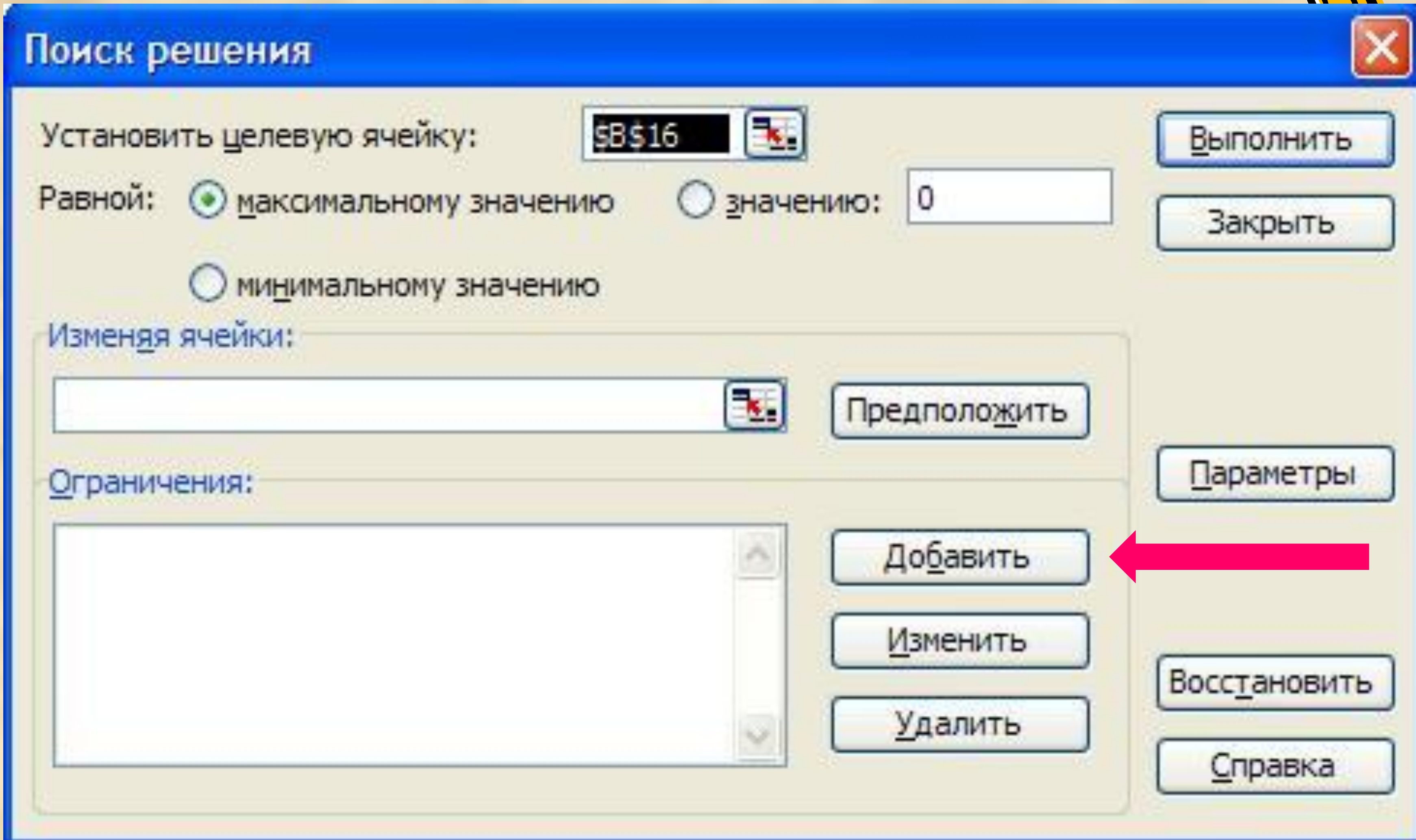


Рис. 3. Начальное состояние формы «Поиск решения»

Заполнить форму

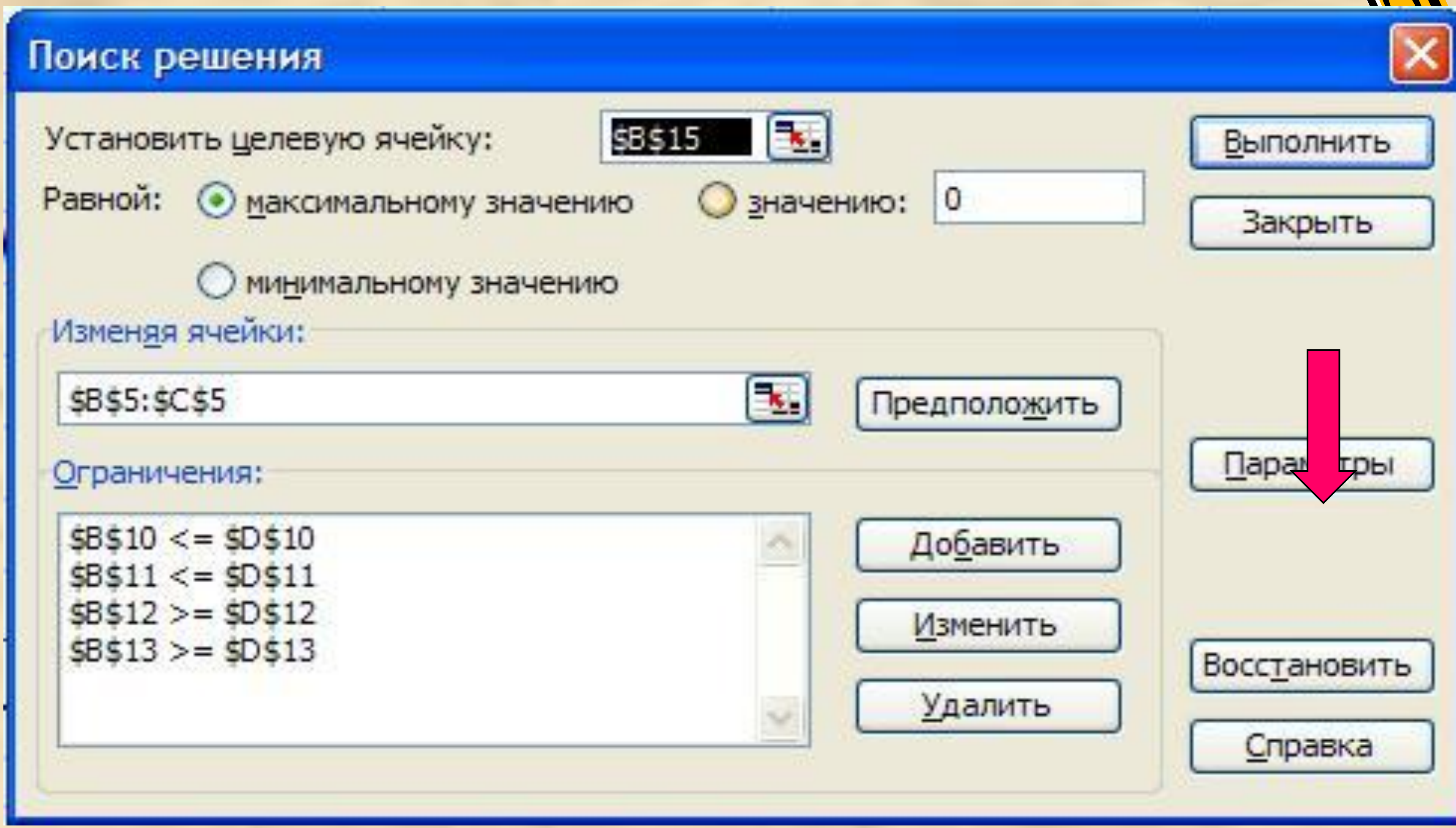


Рис. 4. Форма «Поиск решения» после ввода информации

Параметры

Нажать!

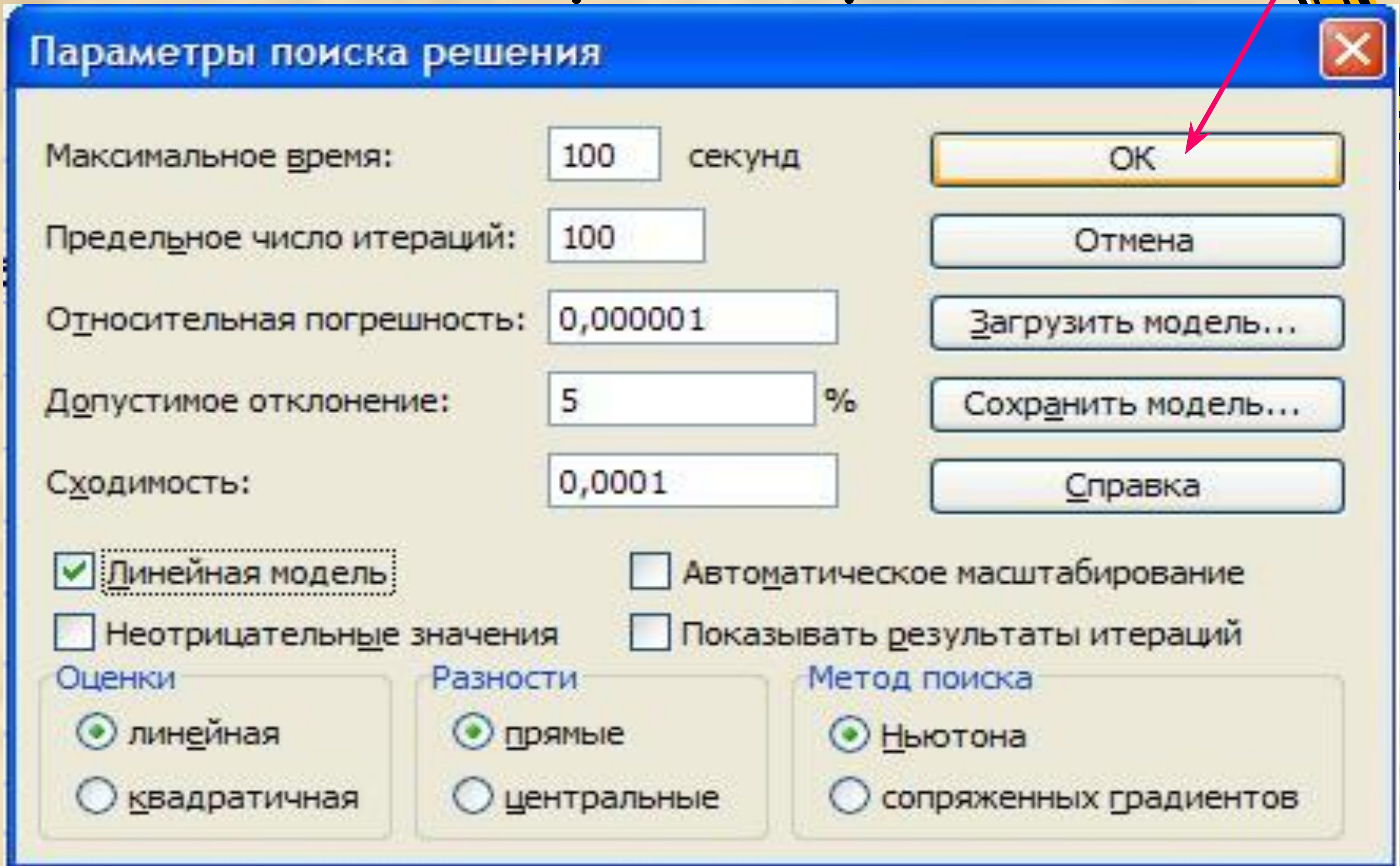


Рис. 5. Форма «Параметры поиска решения»

Щелкнуть кнопку Выполнить

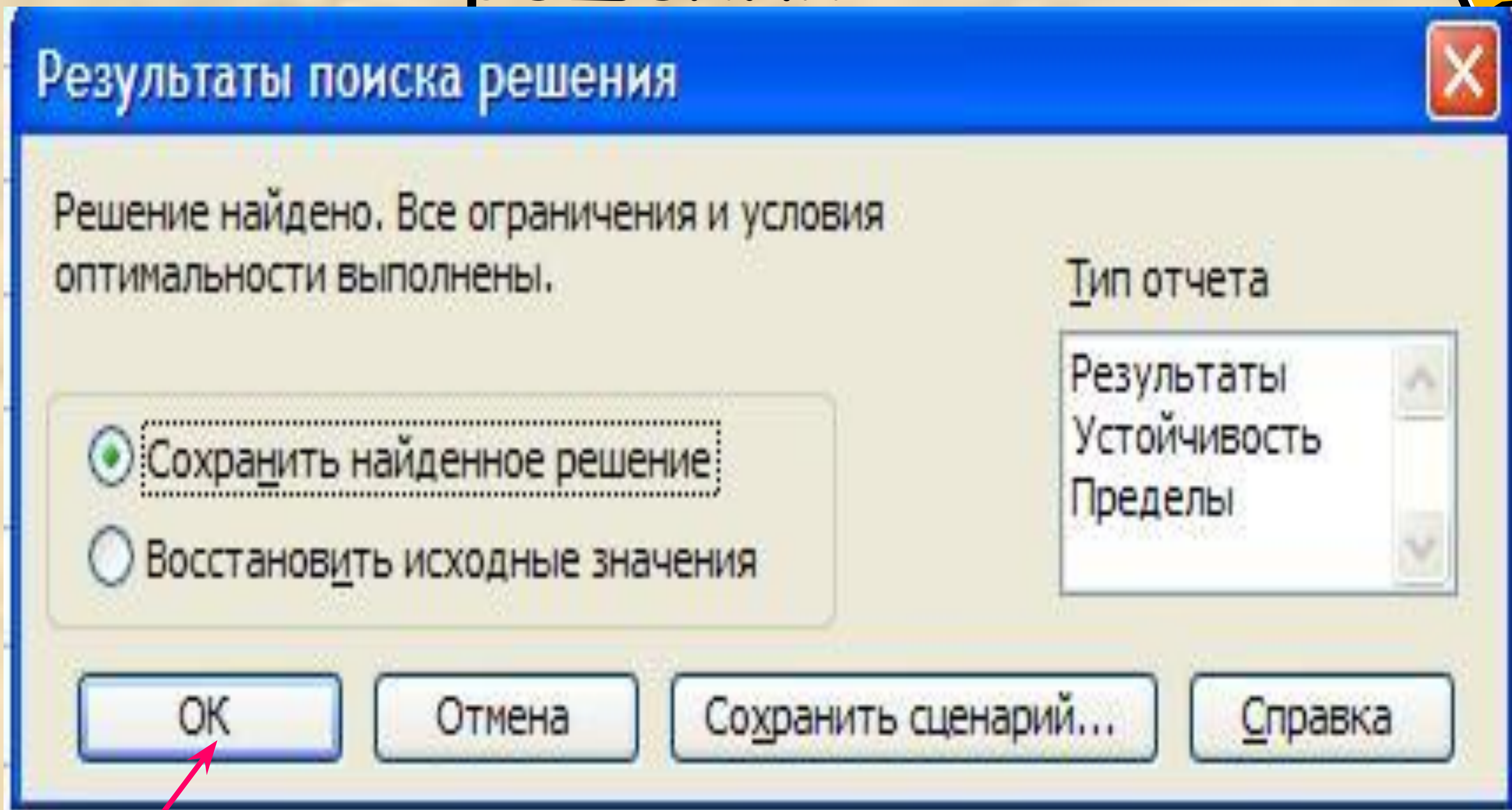
план

	A	B	C	D
1	**Оптимальное планирование**			
2				
3	**Плановые показатели**			
4		X (пирожки)	Y (пирожные)	
5		600	100	
6				
7	**Ограничения**			
8				
9		*Левая часть*	*Знак*	*Правая часть*
10	*Время производства:*	1000	<=	1000
11	*Общее количество:*	700	<=	700
12	*Положительность X:*	600	>=	0
13	*Положительность Y:*	100	>=	0
14				
15	**Целевая функция**	800		
16				
17				

Решение: f(x,y)=800

Рис. 6. Результаты решения задачи (соответствует точке **В** рис. 1.)

Форма «Результаты поиска решения»



Нажать!

Рис. 7.

Изменить условие: Y ≥ X

D13 =B5

решение

	A	B	C	D
1	**Оптимальное планирование**			
2				
3	**Плановые показатели**			
4		X (пирожки)	Y (пирожные)	
5		200	200	
6				
7	**Ограничения**			
8				
9		*Левая часть*	*Знак*	*Правая часть*
10	*Время производства:*	1000	<=	1000
11	*Общее количество:*	400	<=	700
12	*Положительность X:*	200	>=	0
13	*Положительность Y:*	200	>=	200
14				
15	**Целевая функция**	600		

Решение:
f(x,y)=600

Рис. 8. Результат решения задачи 2